Examen ecrit, cours C3-1, partie 2 (vagues) ENSTA et MASTER OACOS, 2010-2011

On s'intéresse ici à la dérive de polluants sous l'effet des vagues (houle et mer du vent).

Question 1

Le fetch adimensionnel sur le bord est du carré est, $X^\star = 500000 \times 9.81/25^2 = 7849$ et pseudo-fetch correspondant à un état de mer limité par le temps est $X' = (18 * 3600 * 9.81/25/70)^1.3 = 2130$. Cette dernière valeur étant plus faible, on en déduite qu'à ce point, la croissance des vagues est limitée par le temps et que un ordre de grandeur des hauteurs significatives et périodes dominantes est donné par les formules empiriques (4.5) et (4.6),

$$H_s = \sqrt{X'/22000} \times 0.26 \times 25^2/9.81 = 5.15 \text{ m} \tag{1}$$

$$T_p = (X'/22000)^{0.33} \times 1.2 \times 2\pi/9.81 \times 25 = 8.9 \text{ s} \tag{2}$$

Question 2

Puisque l'on connait H_s on peut en déduire α puisque, la variance de l'élévation de la surface est $E = \int E(f)df = \alpha T_p^4/4$ et par ailleurs $H_s = 4\sqrt{E}$. Il vient $\alpha = 4Hs^2Tp^{-4}/16 = 0.0011\text{m}^2\ \text{s}^{-4}$. On peut alors calculer les moments d'ordre 1 et 3, $m_{03} = \int E(f)f^3df = \alpha T_p = 0.0094\text{m}^2\ \text{s}^{-3}$ et $m_{01} = \int E(f)fdf = \alpha T_p^3/3 = 0.2489\text{m}^2\ \text{s}^{-1}$ et on ne déduit les périodes moyennes $T_{m0,1} = (m_{01}/m_0)^{-1} = 6.7$ s, et $T_{m0,3} = (m_{03}/m_0)^{-1/3} = 5.6$ s.

Pour une composante monochromatique la dérive de Stokes est proportionnelle à la variance de l'élévation de la surface. On peut donc calculer la dérive de Stokes en surface pour un spectre par la sommation des dérives pour chaque composante spectrale,

$$U_{ss} = \int 2k\sigma E(f)df. \tag{3}$$

En utilisant la relation de dispersion en eau profonde $\sigma^2 = gk$ il vient, $U_{ss} = 2(2\pi/T_{m0,3})^3 \times m_0/g = 48$ cm/s. Le transport associé T_s est donné par l'intégrale sur la verticale de la dérive de chaque composante spectrale, qui a un profil exponentiel en $\exp(2kz)$ soit $T_s = \int \sigma E(f)df = 3.1\text{m}^2/\text{s}$, à comparer au transport d'Ekman, $\tau/(rho_w f)$ qui est de l'ordre de 11 m^2/s pour $f = 10^{-4}\mathrm{s}^{-1}$.

Du fait de la distribution angulaire de l'énergie des vagues, la dérive de Stokes dans la direction x est la somme

$$U_{ss} = \int 2k\cos(\theta)\sigma E(f,\theta) d\theta df. \tag{4}$$

cette valeur est donc réduite par le facteur $\cos(\theta)$ et la largeur angulaire de la distribution spectrale $\sigma E(f,\theta)$. Pour un spectre plus étroit que $\cos(\theta)$ cette réduction est inférieure à 50% (en réalité elle est de l'ordre de 20 %).

Pour la houle on peut faire le calcul avec un vague monochromatique équivalente. La variance de l'élévation de la surface est $m_0 = 0.7\mathrm{m}^2$, et $U_{ss} = 2(2\pi/15)^3 \times m_0/9.81 = 1$ cm/s. Ce qui est beaucoup plus faible, du fait de la plus grande période mais aussi de la moindre hauteur.

Question 3: L'intégration sur la verticale donne,

$$\rho_w \frac{\partial M^e}{\partial t} = -\rho_w f \mathbf{e}_z \times (T_e + T_s) + \tau \tag{5}$$

On a un équilibre dynamique entre la force de Coriolis qui s'applique au tranport Eulérien T_e mais aussi au transport de Stokes T_s, et la tension de vent. Du coup la solution stationnaire est $T_e + T_s = -\tau/(\rho_w f)$ avec un transport net à droite dans l'hémisphère nord. En absence de vagues on aurait $T_e = -\tau/(\rho_w f)$ si bien que l'on en déduit que le transport de masse T_e (en absence de vagues), devient $T_e + T_s$ en présence de vagues, mais que sa valeur est inchangée: les vagues n'induisent pas de transport de masse dans le cas stationnaire.

Pour la houle seule on n'a pas de déferlement et donc $\mathbf{T}^{\mathrm{wc}}$ est nul, et on peut supposer que K_z est très faible, et, à la limite, nul. Par ailleurs, τ est à peu près nul en absence de vent. On se retrouve donc avec une solution stationnaire très simple: $\widehat{\mathbf{u}}(z) - \mathbf{U}_s(z)$. Il n'y a donc aucune dérive induite par les vagues car les vagues génèrent un courant qui compense exactement la dérive de Stokes.

Pendant la tempête le terme de mélange devient important. Quel est son effet? On peut estimer l'epaisseur de la couche d'Ekman, sur laquelle $\widehat{\mathbf{u}}$ varie du fait de l'équilibre entre Coriolis et la diffusion verticale de la quantité de mouvement induite par le mélange. Cette épaisseur est $\sqrt{2K_z/f} = 50$m. On s'attend donc à trouver un $\widehat{\mathbf{u}}$ relativement homogène pour des profondeurs inférieures à 20 m. Par ailleurs, la tension de vent est “pré-distribuée” à 80% sur la verticale par le terme $\mathbf{T}^{\mathrm{wc}}$, ce qui se traduit aussi nécessairement par une homogénéisation du profil de courant dans les 2.5 m mètres près de la surface. Il faut comparer ces échelles à celles de la variation de U_s. Pour U_s

on peut considérer une vague monochromatique qui donne la même dérive en surface, donc avec le même m_0 et une période égale au $T_{m0,3}$. Dans ce cas, la dérive décroit de 96% en un quart de longueur d'onde soit 12 m. Il apparait donc que la dérive de particule est la somme d'une dérive de Stokes fortement cisaillée près de la surface, d'un courant Eulérien induit par les vagues dont le compense le transport de Stokes mais dont le cisaillement est faible, et du courant d'Ekman “classique”. Ainsi la mer du vent induit une forte dérive en surface qui est compensée par un sous-courant plus homogène.