

## Examen écrit, cours C3-1, partie 2 (vagues) ENSTA et MASTER OACOS, 2010-2011

On s'intéresse ici à la dérive de polluants sous l'effet des vagues (houle et mer du vent).

**Question 1 (4 points):** Soit une tempête de forme carrée de 500 km de côté, où le vent est constant et uniforme, soufflant vers l'est de 25 m/s. On considère un océan de profondeur 500m. La durée de vie de la tempête est de 18h. Le vent est nul avant et après la tempête et à l'extérieur de celle-ci. Donnez un ordre de grandeur de la hauteur et période dominante de l'état de la mer là où et quand il est le plus fort.

**Question 2 (4 points):** On suppose que le spectre de l'état de mer est de la forme  $E(f) = \alpha f^{-5}$  pour  $f > f_p$  et  $E(f) = 0$  pour  $f < f_p$ , et que toutes les vagues vont dans la direction du vent. Quelles sont, pour la tempête considérée ci-dessus, les périodes moyennes  $T_{m0,1}$  et  $T_{m0,3}$  de l'état de mer? Quel est l'ordre de grandeur de la dérive de Stokes en surface? Quel est le transport de volume associé (dérive intégrée sur la verticale)? Quel serait, au moins qualitativement l'effet de la distribution angulaire de l'énergie des vagues sur la dérive de Stokes? Avant la tempête une houle de hauteur significative 2 m et de 15 s de période était présente avec un spectre très étroit en fréquence et direction. Quelle est la dérive de Stokes donnée par cette houle?

**Question 3 (2 points):** En réalité, la dérive induite par les vagues est modifiée par la force de Coriolis (section 9.7 du cours écrit). On admettra que, pour un océan homogène horizontalement, la conservation de la quantité de mouvement horizontale prend la forme,

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}(z, t)}{\partial t} = -f \mathbf{e}_z \times (\hat{\mathbf{u}}(z, t) + \mathbf{U}_s(z, t)) + \frac{\partial}{\partial z} \left[ K_z \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}(z, t)}{\partial z} \right] - \mathbf{T}^{\text{wc}} \quad (1)$$

avec  $\hat{\mathbf{u}}$  le vecteur vitesse horizontal pour le courant, et  $\mathbf{U}_s$  le vecteur dérive de Stokes horizontal,  $K_z$  un coefficient de mélange vertical, et  $-\mathbf{T}^{\text{wc}}$  la source de quantité de mouvement pour le courant qui correspond à la perte de quantité de mouvement des vagues par déferlement. On rappelle que le profil vertical de  $\mathbf{U}_s$  est de la forme  $\exp(2kz)$  pour des vagues monochromatiques et qu'il faut dans le cas général superposer les dérives des différentes composantes spectrales.  $\mathbf{U}_s$  est un forçage connu de l'équation (1), qui se déduit de la question précédente.

On va supposer que  $\mathbf{T}^{wc}$  est réparti uniformément sur la verticale entre la surface libre et une profondeur moyenne égale à la moitié de la hauteur significative  $H_s/2$ . Par ailleurs, on suppose que la source totale de quantité de mouvement induite par le déferlement est

$$\tau^{wc} = \int_{-0.5H_s}^0 \mathbf{T}^{wc}(z) dz \quad (2)$$

est dans la direction du vent et que  $\tau^{wc} = 0.8\tau$ . On paramétrisera la tension de vent par  $\tau = 1.5 \times 10^{-3} U_{10}^2$ . Enfin, la condition dynamique à la surface pour  $\hat{\mathbf{u}}$  exprime la continuité du flux de quantité de mouvement entre l'air et l'eau, c'est à dire:

$$K_z \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial z} = \tau - \tau^{wc}. \quad (3)$$

Discutez de l'équilibre des forces pour le transport (intégré sur la verticale). Que se passe-t-il en présence de houle seulement, avant la tempête? (faites toutes les hypothèses qui vous paraîtront raisonnables et nécessaires, on peut en particulier supposer que le coefficient de mélange  $K_z$  est nul). Quelle est la solution stationnaire pour  $\hat{\mathbf{u}}$  avant la tempête? Qu'en déduit-on pour la dérive de polluants dissous sous l'effet des vagues?

Pendant la tempête que se passe-t-il? Sans forcément chercher à résoudre le problème numériquement (si nécessaire on prendra un mélange constant  $K_z = 0.05 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  et un paramètre de Coriolis  $f = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ ). On pourra discuter en particulier de l'échelle verticale donnée par la dynamique d'Ekman,  $l_e = \sqrt{2K_z/f}$  et de l'échelle verticale sur laquelle se distribue la dérive de Stokes. Quelle différence y-a-t-il entre la dérive induite par la houle et la dérive induite par la mer du vent?