

УДК 551.466.4:551.466.81

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВНУТРЕННИХ И ПОВЕРХНОСТНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН В ПРИБЛИЖЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

А. Г. ВОРОНОВИЧ

Рассматривается распространение поверхностных и внутренних гравитационных волн, имеющих модельную структуру, в океане, свойства которого обладают временной и пространственной изменчивостью. Задача решается в линейной постановке методом геометрической оптики: предполагается, что длина и период волны много меньше соответственно пространственных и временных масштабов основного движения. Уравнение, определяющее амплитуду волны, удалось привести к виду закона сохранения некоторого адиабатического инварианта волны I:

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{C}_{\text{гп}} I) = 0.$$

Приводится решение данного уравнения и уравнения, определяющего фазу волны на характеристиках. В заключение обсуждаются некоторые простые следствия полученных соотношений.

1. В реальном океане практически всегда присутствуют течения и неоднородности поля плотности, обладающие как временной, так и пространственной изменчивостью. Поэтому представляло бы интерес рассмотреть, как такие неоднородности влияют на распространение поверхностных и внутренних гравитационных волн. В общей постановке данная задача является весьма сложной, и поэтому представляется целесообразным рассмотреть в первую очередь распространение коротких волн, длина и период которых много меньше соответственно характерных расстояний и времен изменчивости крупномасштабных движений. Если считать последние величинами порядка 100 км и 10 ч, то в пределах рассмотрения оказывается довольно широкий класс наблюдающихся в реальности волновых движений. С другой стороны, в этом случае становится возможным рассмотрение данной задачи методом геометрической оптики.

В литературе имеется большое число работ, рассматривающих данную задачу в более или менее общей постановке. Здесь уместно упомянуть работу [1], где в приближении геометрической оптики рассматривалось влияние неоднородности поля плотности на распространение внутренних волн (этому вопросу посвящены также работы [2, 3]). В общей постановке рассмотрение распространения волн в неоднородных средах проведено в [4, 5]. Особо следует отметить работы [6, 7], в которых рассматриваемая задача была решена при весьма общих предположениях в случае среды, медленно меняющейся по вертикальной координате. В такой постановке задача исследовалась неоднократно и другими авторами (см., например, [8, 9] и имеющуюся там библиографию). В [10] приведены результаты численного эксперимента по распространению внутренних волн на течениях с горизонтальным сдвигом.

В данной работе методом геометрической оптики в линейной постановке для неоднородного медленно меняющегося океана исследуется распро-

странение внутренних волн, имеющих модальную структуру, а также поверхностных волн. При этом мы будем считать океан несжимаемой жидкостью и воспользуемся приближением Буссинеска, т. е. отличие плотности жидкости от единицы будем учитывать только в членах, связанных с плавучестью.

2. Уравнения гидродинамики берем в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{u}_i}{dT} &= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial X_i}, \quad i=1, 2, \quad \frac{d\tilde{w}}{dT} + g\tilde{\rho} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z}, \\ \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial X_i} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} &= 0, \quad \frac{d\tilde{\rho}}{dT} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\tilde{u}_i$ ($i=1, 2$) — горизонтальные компоненты скорости; $\tilde{w}$ — вертикальная скорость; $\tilde{p}$ и $\tilde{\rho}$ — давление и плотность; X_i и z — горизонтальные и вертикальная координаты (ось z направлена вверх); d/dT — субстанциальная производная. Граничные условия имеют следующий вид:

$$\text{при } z=\tilde{h}(X_i, T) \quad \tilde{p}=p_a(X_i, T), \quad \tilde{w}=\frac{\partial \tilde{h}}{\partial T} + \tilde{u}_i \frac{\partial \tilde{h}}{\partial X_i}, \quad (2)$$

$$\text{при } z=-H(X_i) \quad \tilde{w} + \tilde{u}_i \frac{\partial H}{\partial X_i} = 0, \quad (3)$$

где $z=\tilde{h}$ и $z=-H$ — уравнения дна и свободной поверхности; p_a — атмосферное давление. Введем малый параметр ϵ , характеризующий медленность изменений основного движения по горизонтальным координатам и времени. По вертикальной координате медленности изменения не предполагается. Далее представим все гидродинамические поля состоящими из двух компонент:

$$\tilde{\phi} = \phi^{(0)}(z, x_i, t) + a\phi, \quad (4)$$

где под $\tilde{\phi}$ понимается любая из величин, характеризующих движение, причем $\phi^{(0)}$ — основное движение, ϕ — возмущение, распространяющееся на его фоне; $x_i = \epsilon X_i$ и $t = \epsilon T$ — медленные горизонтальные координаты и время; a — малый амплитудный параметр. Поскольку $\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{u}^{(0)}(z, x_i, t)$, то из уравнения непрерывности (1) следует, что $w^{(0)} \sim \epsilon |u_i^{(0)}|$. Значения всех остальных величин гидродинамических полей основного движения будем считать имеющими порядок единицы. Предположим также, что атмосферное давление и уровень дна меняются медленно: $p_a = p_a(x_i, t)$, $H = H(x)$.

Подставляя представление (4) с учетом малости $w^{(0)}$

$$w^{(0)} \rightarrow \epsilon w^{(0)} \quad (5)$$

в уравнения (1) — (3) и выделяя величины, связанные с основным движением, получаем

$$\frac{\partial \mathbf{u}^{(0)}}{\partial t} + u_i^{(0)} \frac{\partial \mathbf{u}^{(0)}}{\partial x_i} + w^{(0)} \frac{\partial \mathbf{u}^{(0)}}{\partial z} = -\frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i}, \quad (6a)$$

$$g\rho^{(0)} = -\frac{\partial p^{(0)}}{\partial z}, \quad (6б)$$

$$\frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial t} + u_i^{(0)} \frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial x_i} + w^{(0)} \frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial z} = 0, \quad (6в)$$

$$\frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_i} + \frac{\partial w^{(0)}}{\partial z} = 0. \quad (6г)$$

Граничные условия совпадают с условиями (2), (3), в которых тильду следует заменить на верхний индекс (0), а X_i и T — на x_i и t . Уравнения

(6а), (6в), (6г) и граничные условия являются точными равенствами, а (6б) — верно с точностью до величин порядка ε^2 .

Далее решение уравнений для возмущения φ будем искать в виде ВКБ-разложения:

$$\varphi = [\varphi^{(1)}(z, x_i, t) + \varepsilon \varphi^{(2)}(z, x_i, t) + \dots] \exp \left\{ \frac{i}{\varepsilon} S(x_i, t) \right\},$$

где S — фаза волны, определяющая локальное волновое число и частоту по формулам: $k_i = \partial S / \partial x_i$, $\omega = -\partial S / \partial t$. Выделяя теперь из исходных уравнений величины порядка a , нетрудно получить уравнение и граничные условия для вертикальной скорости $w^{(1)}$ возмущения (далее верхний индекс (1) везде опускаем)

$$w'' + \left(\frac{k^2 \mu^{(0)}}{\omega_d^2} - \frac{\omega_d''}{\omega_d} - k^2 \right) w = 0, \quad (7)$$

$$\left(\frac{w}{\omega_d} \right)' = \frac{gk^2}{\omega_d^3} w \quad \text{при} \quad z = h^{(0)} \quad \text{и} \quad w = 0 \quad \text{при} \quad z = -H. \quad (8)$$

Здесь $\omega_d = \omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}^{(0)}$ — доплеровская частота, зависящая от z (через $\mathbf{u}^{(0)}$); $\mu^{(0)}(z, x_i, t) = -g \partial \rho^{(0)} / \partial z$ — квадрат частоты Вейселя. Штрих здесь и далее обозначает производную по z . Краевая задача (7), (8) дает нам набор дисперсионных соотношений для различных мод

$$\omega = f(k_i, x_i, t) \quad (9)$$

и соответствующие решения $w = w(z, x_i, t)$, зависящие от x_i и t как от параметров. Все остальные величины, характеризующие волну, выражаются через w по формулам:

$$\mathbf{u} = \frac{i\mathbf{k}}{k^2} \omega_d \left(\frac{w}{\omega_d} \right)' - \frac{iw}{\omega_d} \frac{\partial \mathbf{u}^{(0)}}{\partial z}, \quad (10a)$$

$$p = \frac{i\omega_d^2}{k^2} \left(\frac{w}{\omega_d} \right)', \quad (10б)$$

$$\rho = -i \frac{w}{\omega_d} \frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial z}, \quad (10в)$$

$$h = \frac{iw}{\omega_d}. \quad (10г)$$

Выделяя далее в уравнениях и граничных условиях величины порядка $a\varepsilon$, получаем уравнения

$$\begin{aligned} i\omega_d \mathbf{u}^{(2)} - w^{(2)} \frac{\partial \mathbf{u}^{(0)}}{\partial z} - i\mathbf{k} p^{(2)} &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x_i} + u_j^{(0)} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \\ &+ w^{(0)} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + u_j \frac{\partial \mathbf{u}^{(0)}}{\partial x_j} \Leftarrow - \frac{1}{\omega_d} \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}, \\ i\omega_d w^{(2)} - g \rho^{(2)} + \frac{\partial p^{(2)}}{\partial z} &= \frac{\partial w}{\partial t} + u_j^{(0)} \frac{\partial w}{\partial x_j} + w \frac{\partial w^{(0)}}{\partial z} + w^{(0)} \frac{\partial w}{\partial z} \Leftarrow \frac{ik^2}{\omega_d}, \\ i\omega_d \rho^{(2)} - \frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial z} w^{(2)} &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_j^{(0)} \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial x_j} + w^{(0)} \frac{\partial \rho}{\partial z} \Leftarrow \frac{k^2}{\omega_d^2} g, \\ \frac{\partial w^{(2)}}{\partial z} + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}^{(2)} &= - \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \Leftarrow \frac{\omega_d'}{\omega_d} + \frac{\partial}{\partial z}, \end{aligned} \quad (11)$$

и граничные условия

$$p^{(2)} - g\rho^{(0)}h^{(2)} = 0,$$

$$w^{(2)} + i\omega_d h^{(2)} = \frac{\partial h}{\partial t} + u_j^{(0)} \frac{\partial h}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial h^{(0)}}{\partial x_j} - h \left(\frac{\partial w^{(0)}}{\partial z} - \frac{\partial h^{(0)}}{\partial x_j} \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial z} \right) \text{ при } z = h^{(0)},$$

$$w^{(2)} = -u_j \frac{\partial H}{\partial x_j} \text{ при } z = -H.$$
(12)

Действуя на эти уравнения указанными справа в (11) операторами, получаем

$$w^{(2)''} + \left(\frac{k^2 \mu^{(0)}}{\omega_d^2} - \frac{\omega_d''}{\omega_d} - k^2 \right) w^{(2)} = F, \quad (13)$$

где F — результат применения операторов к правым частям. Выражая в (12) $p^{(2)}$ и $h^{(2)}$ через $w^{(2)}$, получаем граничные условия

$$\omega_d \frac{\partial w^{(2)}}{\partial z} - \left(\frac{gk^2}{\omega_d} + \omega_d' \right) w^{(2)} = G_1 \text{ при } z = h^{(0)},$$

$$w^{(2)} = -u_j \frac{\partial H}{\partial x_j} = G_2 \text{ при } z = -H.$$
(14)

Условие разрешимости неоднородной краевой задачи (13), (14) записывается в виде:

$$\int_{-H}^{h^{(0)}} F \frac{iw}{k^2} dz - \frac{i}{k^2} \frac{w}{\omega_d} G_1 \Big|_{z=h^{(0)}} - \frac{i}{k^2} G_2 \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=-H} = 0. \quad (15)$$

Здесь в качестве решения однородной краевой задачи взято iw/k^2 . Выражения для F и G_1 имеют вид

$$F = -\frac{\mathbf{k}}{\omega_d} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla p + u_j^{(0)} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} + w^{(0)} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + u_j \frac{\partial \mathbf{u}^{(0)}}{\partial x_j} \right) +$$

$$+ \frac{ik^2}{\omega_d} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u_j^{(0)} \frac{\partial w}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial z} (w w^{(0)}) \right) + \frac{k^2}{\omega_d} g \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_j^{(0)} \frac{\partial \rho}{\partial x_j} + \right.$$

$$\left. + u_j \frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial x_j} + w^{(0)} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) - \frac{\omega_d'}{\omega_d} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial u_j}{\partial x_j},$$

$$G_1 = -\omega_d \frac{\partial u_j}{\partial x_j} - \frac{gk^2}{\omega_d} \left[\frac{\partial h}{\partial t} + u_j^{(0)} \frac{\partial h}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial h^{(0)}}{\partial x_j} - h \left(\frac{\partial w^{(0)}}{\partial z} - \frac{\partial h^{(0)}}{\partial x_j} \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial z} \right) \right] -$$

$$- \mathbf{k} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla p + u_j^{(0)} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j} + w^{(0)} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + u_j \frac{\partial \mathbf{u}^{(0)}}{\partial x_j} \right).$$

Здесь $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2)$. Путем громоздких преобразований условие (15) удается привести к виду закона сохранения некоторого «адиабатического инварианта» I :

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (C_{rp}^{(i)} I) = 0, \quad (16)$$

где

$$I = \int_{-H}^{h^{(0)}} \left(\frac{\mu^{(0)}}{\omega_d^3} - \frac{\omega_d''}{2\omega_d^2 k^2} \right) w^2 dz + \left(\frac{g}{\omega_d^3} + \frac{\omega_d'}{2\omega_d^2 k^2} \right) w^2 \Big|_{z=h^{(0)}}, \quad (17)$$

$$C_{rp}I = \int_{-H}^{h^{(0)}} \left\{ u^{(0)} \left[\frac{\mu^{(0)}}{\omega_d^3} - \frac{\omega_d''}{2\omega_d^2 k^2} \right] + \frac{1}{2\omega_d k^2} \frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial z^2} + \frac{k}{k^2} \left(\frac{\mu^{(0)}}{\omega_d^2} - 1 \right) \right\} w^2 dz + \\ + \left[u^{(0)} \left(\frac{g}{\omega_d^3} + \frac{\omega_d'}{2\omega_d^2 k^2} \right) - \frac{1}{2\omega_d k^2} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial z} + \frac{gk}{\omega_d^2 k^2} \right] w^2 \Big|_{z=h^{(0)}}. \quad (18)$$

Пользуясь только краевой задачей (7), (8), нетрудно показать, что отношение выражений (18) и (17) действительно является групповой скоростью $C_{rp}^{(i)} = \partial f / \partial k_i$. Важно отметить, что уравнение (16) не будет иметь место для произвольных основных гидродинамических полей скорости, плотности и т. д., но только для тех, которые управляются уравнениями гидродинамики; при вычислениях были существенно использованы уравнения (6) и граничные условия (2), (3). Если отфильтровать поверхностные волны, используя в исходных уравнениях при $z=0$ граничное условие «твердой крышки» $w(0)=0$, то слагаемые, вычисляемые при $z=0$ в (17), (18), исчезают.

Отметим, что в случае отсутствия течений выражение (17) сводится к $I=E/\omega$, где E — энергия волны. В случае чисто внутренних волн и высоких чисел Ричардсона (медленное изменение горизонтальной скорости

с глубиной) получаем $\omega_d'' \ll \frac{\mu^{(0)}}{\omega_d} k^2$ и $I = \int_{-H}^{h^{(0)}} \frac{E}{\omega_d} dz$, что согласуется с обыч-

ным выражением для адиабатического инварианта внутренней волны в этом случае (здесь E — плотность энергии).

Отметим, что основное уравнение (16) и выражения (17), (18) должны непосредственно получиться из подходящего вариационного принципа по методике, предложенной в [4, 5]. Однако к настоящему времени это нами проделано не было.

Интегрируя уравнение (16) по достаточно большой горизонтальной поверхности S , легко получаем, что суммарный адиабатический инвариант $\oint Ids$ волны при ее распространении сохраняется.

3. Учитывая определение волнового числа и частоты, получаем из дисперсионного соотношения (9) уравнение, определяющее фазу волны (уравнение Гамильтона — Якоби):

$$\frac{\partial S}{\partial t} + f \left(\frac{\partial S}{\partial x_i}, x_i, t \right) = 0. \quad (19)$$

Уравнения (19) и (16) полностью определяют распространение линейной волны в приближении ВКБ. Характеристики уравнения (19) задаются системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial f}{\partial k_i} = C_{rp}^{(i)}(k_j, x_j, t), \quad (20a)$$

$$\frac{dk_i}{dt} = - \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad (20б)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = - \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (20в)$$

Фаза волны вдоль характеристики вычисляется по формуле

$$S = S_0 + \int_{t_0}^t (k_i C_{rp}^{(i)} - \omega) dt, \quad (21)$$

где S_0 — ее начальное значение. Характеристики уравнения (16) совпадают с (20). Отсюда легко получается, что вдоль характеристики сохраняется величина:

$$I \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(\xi, t)} = \text{const}, \quad (22)$$

где ξ — параметр, задающий при $t=t_0$ начальное многообразие. Соотношение (22) имеет следующую геометрическую интерпретацию: если рассмотреть две бесконечно близкие проекции характеристик на координатное подпространство (x_1, x_2) и обозначить dl расстояние между ними (рис. 1), то вдоль характеристик имеет место равенство

$$|C_{rp}I|dl = \text{const}. \quad (23)$$

Из (20а) имеем, что вектор C_{rp} перпендикулярен отрезку dl , так что соотношение (23) есть закон постоянства потока адиабатического инва-

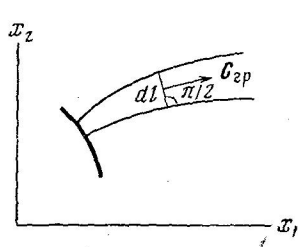


Рис. 1

Рис. 1. К определению dl : тонкие линии — две близкие проекции характеристик, жирная линия — начальное многообразие $\{x_1(\xi, t_0), x_2(\xi, t_0)\}$

Рис. 2. Профиль течения с горизонтальным сдвигом и общая картина проекций характеристик на координатное подпространство в случае $u^{(0)} = (u(y), 0)$, $\rho^{(0)} = \rho^{(0)}(z)$

Рис. 3. Графическое построение для определения параметров короткой волны. Дисперсионные кривые проведены при некоторой фиксированной «бегущей координате» $x' = x - Ct$. Точки пересечения соответствуют параметрам волны

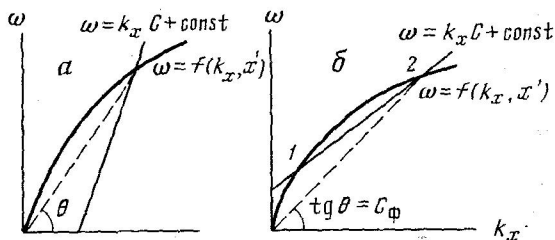


Рис. 3

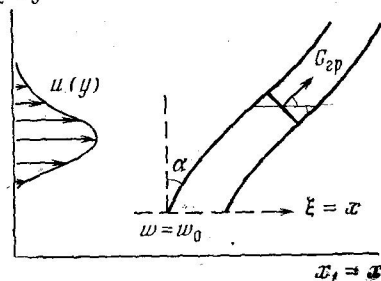


Рис. 2

рианта вдоль лучевой трубки. Таким образом, если система уравнений (20) решена, то соотношения (22), (23) определяют амплитуду и фазу волны.

4. Из (20б), (20в) следует, что если параметры океана не зависят от времени, то вдоль характеристики $\omega = \text{const}$, если же они не зависят от координаты x_1 , то $k_1 = \text{const}$ (закон Снеллиуса).

Рассмотрим, например, плоско-параллельное течение: $\{u_1^{(0)}, u_2^{(0)}\} = \{u(y), 0\}$, $\rho^{(0)} = \rho^{(0)}(z)$. В этом случае характеристики будут семейством параллельных кривых (рис. 2), откуда следует, что наряду с ω и k_x сохраняется величина:

$$C_{rp}^{(y)} I = \text{const}. \quad (24)$$

Если положить $\mu^{(0)} = N_0^2 = \text{const}$, то из (24) и (18) получаем

$$\frac{k_y}{k^2} \left(\frac{N_0^2}{(\omega - k_x u)^2} - 1 \right) \omega^2 = \text{const},$$

откуда

$$\frac{w}{w_0} = R \left(\frac{\cos^2 \alpha}{R - \sin^2 \alpha} \right)^{1/4}.$$

Здесь

$$R = \left(\frac{N_0^2}{\omega^2} - 1 \right) / \left(\frac{N_0^2}{(\omega - k_x u)^2} - 1 \right); \quad k_x = \frac{\pi n}{H} \left(\frac{N_0^2}{\omega^2} - 1 \right) \sin \alpha;$$

H — глубина океана; n — номер моды; ω, w_0 — начальная частота и амплитуда (на спокойной воде). Если $uk_x > 0$, то при росте $|u|$ в точке, где $R = \sin^2 \alpha$ имеем: $k_y \rightarrow 0$, $C_{\text{гp}}^{(y)} \rightarrow 0$ и $w \rightarrow \infty$. Если же $uk_x < 0$, то с ростом $|u|$ при $\omega - k_x u \rightarrow N_0$ имеем $k_y \rightarrow \infty$, $w \rightarrow \infty$. Интересно, что во втором случае волна доходит до критического уровня за бесконечное время ($t \sim |u - u_{\text{кр}}|^{-1/2}$), а в первом — за конечное, но поскольку при этом $k_y \rightarrow 0$, то раньше нарушаются пределы применимости метода геометрической оптики.

Рассмотрим одномерную задачу распространения коротких поверхностных волн на глубокой воде с течением без вертикального сдвига, скорость которого зависит от x (этого можно добиться за счет изменения рельефа удаленного дна).

Краевая задача (7), (8) при $\mu^{(0)} = 0$, $u^{(0)} = u(x)$, $H = \infty$ дает решение:

$$w = w_0 e^{kz}, \quad (\omega - ku)^2 = gk.$$

В данном случае $\omega = \text{const}$ и

$$C_{\text{гp}} I = -\frac{w_0^2}{k} \int_{-\infty}^0 e^{2kz} dz + \left(u \frac{g}{(\omega - ku)^3} + \frac{g}{k(\omega - ku)^2} \right) w_0^2 = \frac{w_0^2}{2k^2} \frac{\omega + uk}{\omega - uk} = \text{const}.$$

Этот результат совпадает с выражением, полученным в [11].

Рассмотрим распространение короткой линейной волны на фоне нелинейной стационарной волны, бегущей вдоль оси x со скоростью C . В этом случае

$$\omega = f(k_i, x_i, t) = f(k_i, x - Ct).$$

Из уравнений (20) при этом следует, что вдоль характеристики сохраняются величины $\omega - k_x C = \text{const}$, $k_y = \text{const}$ (первая из них есть доплеровская частота в системе координат стационарной волны). Эти три уравнения можно решать графически (рис. 3). При изменении бегущей координаты x' (т. е. при переходе в другую фазу стационарной волны) дисперсионные кривые будут как-то деформироваться, прямые же остаются на месте. Видно, что если в некоторый момент фазовая скорость волны $C_\phi = \omega/k < C$ (рис. 3, а), то как бы ни менялась дисперсионная кривая, точка пересечения всегда имеется. При этом короткая волна все время отстает от стационарной, поскольку $C_{\text{гp}} < C$. В случае же $C_\phi > C$ картина несколько иная. Если в какой-то момент параметры волны соответствуют точке 1 (рис. 3б), то

$$\frac{d}{dt} (x - Ct) > 0,$$

и короткая волна обгоняет стационарную. Если при этом дисперсионная кривая деформируется достаточно сильно, то в некоторый момент точки 1 и 2 сольются, после чего параметры волны будут соответствовать точке 2 и короткая волна станет отставать от стационарной:

$$\frac{d}{dt} (x - Ct) < 0.$$

Если стационарная волна — периодическая, то в соответствующий момент точки 1 и 2 опять сольются, волна «перейдет» к точке 1 и этот процесс будет последовательно повторяться. Если в случае рис. 3, а короткая волна побывает во всех фазах стационарной волны, то в случае рис. 3, б име-

ются некоторые запрещенные зоны, в пределы которых короткая волна не проникает. В обоих случаях параметры волны меняются таким образом, что $\Delta\omega/\Delta k_x = C$.

Представляется разумным предположить, что уравнение (16) будет иметь место и при более общей постановке задачи, например при учете вращения земли или отказе от приближения Буссинеска. При этом выражения для адиабатического инварианта и его потока легко угадать, заметив, что их отношение должно равняться групповой скорости, формула которой просто получается из обычной краевой задачи, а также используя предельный переход к рассмотренному случаю.

В заключение выражаю глубокую благодарность Л. М. Бреховских, а также всем членам его рабочего семинара — К. А. Наугольных, С. А. Рыбаку, В. В. Гончарову и В. М. Куртепову, чьи полезные советы помогли мне при решении данной задачи.

Академия наук СССР
Акустический институт

Поступила в редакцию
20 января 1976 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Миropольский Ю. З. Распространение внутренних волн в океане с горизонтальными неоднородностями поля плотности. Изв. АН СССР. ФАО, 10, № 5, 1974.
2. Самодуров А. С. Внутренние волны в среде с меняющейся по горизонтали частотой Вейселя — Брента. Изв. АН СССР. ФАО, 10, № 3, 1974.
3. Воронович А. Г. О распространении внутренних волн в неоднородном по горизонтали океане. Изв. АН СССР. ФАО 12, № 1, 1976.
4. *Bretherton F., Garrett C.* Wavetrains in inhomogeneous moving media. Proc. Roy. Soc., A302, 529, 1968.
5. *Bretherton F.* Propagation in slowly varying waveguides. Proc. Roy. Soc., A302, 555, 1968.
6. *Grimshaw R.* Nonlinear internal gravity waves in a slowly varying medium. J. Fluid Mech., 54, pt. 2, 1972.
7. *Grimshaw R.* Nonlinear internal gravity waves in a rotating fluids. J. Fluid Mech., 74, pt. 3, 1975.
8. *Moore C.* Several effects of a baroclinic current on the cross-stream propagation of inertial-internal waves. Geophys. Fluid. Dyn., 6, 245, 1975.
9. *Moore C.* Several effects of a baroclinic current on the three-dimensional propagation of internal-inertial waves. Geophys. Fluid Dyn., 6, 277, 1975.
10. Иванов Ю. А. Морозов Е. Г. Деформация внутренних гравитационных волн потоком с горизонтальным сдвигом скорости. Океанология, 14, № 3, 1974.
11. *Longuet-Higgins M. S., Stewart R. W.* The changes in amplitude of short gravity waves on steady non-uniform currents. J. Fluid Mech., 10, pt. 4, 1961.

INTERNAL AND SURFACE GRAVITY WAVE PROPAGATION IN THE GEOMETRIC OPTICS APPROXIMATION

A. G. VORONOVICH

Propagation of surface and internal gravity waves which have a model structure is considered for the ocean with properties varying in space and time. The problem is solved in linear case using the geometrical optics method. It is assumed that the wave length and period are much smaller than basic motion space-time scales. The equation determining the wave amplitude can be written in the form of the law of some wave «adiabatic invariant» I conservation: $\partial I / \partial t + \text{div} (C_{\text{гп}} I) = 0$. The solution of this equation and the one determining the wave phase are obtained employing the method of characteristics. Finally some simple consequences of obtained relationships are considered.