
Réflexion sur les ouvrages :

Modèle de houle à dissipation

Menouar Houari (*), Philippe Sergent (), Denis Duhamel (*)**

Ecole Nationale des Ponts et Chaussées()
6 et 8 Avenue Blaise Pascal citée Descartes, Champs-sur-Marne 774555 Marne-la-Vallée cedex 2
duhamel@lami.enpc.fr
Centre d'Etude Technique Maritimes et Fluviales(**)
2, boulevard Gambetta BP 60 039 60 321 Compiègne cedex
philippe.sergent@equipement.gouv.fr*

RÉSUMÉ. La réflexion de la houle sur les ouvrages est un problème particulièrement important pour l'ingénierie portuaire. Les conditions de réflexion classiques sur les ouvrages demandent la connaissance d'un angle d'incidence a priori inconnu. Afin de s'en affranchir, nous développons un modèle horizontal de houle à dissipation. La dissipation est estimée à partir de la propagation de la houle dans un bicouche composé d'une couche fluide couvrant une couche poreuse. Le modèle est testé sur une bosse triangulaire poreuse et sur une digue à talus.

ABSTRACT. Reflection of water waves on maritime structures is an important problem of coastal engineering. Classic reflection conditions on structures require the knowledge of an angle of incidence that is a priori unknown. In order to get rid of it, we develop a horizontal dissipative model for water waves. Dissipation is assessed from the propagation of wave in a bilayer composed of a layer of fluid covering a porous bed. The model is tested on a triangular porous bar and a rubble mound breakwater.

MOTS-CLÉS : Houle, Agitation, Milieux poreux, Darcy, Forchheimer, Modèle horizontal, Dissipation, Réflexion, éléments finis.

KEYWORDS: Water waves, Agitation, Porous media, , Darcy, Forchheimer, Horizontal model, Dissipation, Reflection, Finite elements.

1. Introduction

La réflexion de la houle, à l'approche des ouvrages, intéresse particulièrement l'ingénierie portuaire. Elle a un effet direct sur la stabilité des ouvrages et sur l'agitation car elle constitue l'un des principaux facteurs de dissipation de la houle dans un bassin portuaire. Le traitement de la réflexion partielle dans les codes d'agitation, basés en général sur l'équation de pente douce, reste un problème délicat qui nécessite la connaissance :

- ❑ Du coefficient de réflexion, qui représente une caractéristique globale de l'effet des ouvrages étudiés, et en particulier l'influence de paramètres tels que la période de houle, la cambrure de houle, la direction d'incidence sur ce coefficient,
- ❑ De l'angle d'incidence de la houle pour pouvoir appliquer correctement la condition aux limites classique de réflexion partielle.

Cet angle d'incidence de la houle étant a priori inconnu, son utilisation pose des problèmes aussi bien théoriques que pratiques. Il est donc intéressant de pouvoir proposer une formulation qui n'utilise pas cet angle. C'est le cas du modèle horizontal que nous présentons ici et qui permet de traiter la réflexion partielle de la houle sur les ouvrages réfléchissants en prenant en compte la dissipation de la houle sur les enrochements.

Les ouvrages de protection des ports contre la houle sont les digues à talus, les jetées verticales ou les digues mixtes. Ils arrêtent la houle par destruction locale de son énergie ou par réflexion vers le large. Les digues à talus sont des collines de matériaux pierreux, enrochements, qui montent jusque vers la surface libre. Les digues mixtes sont constituées par une digue verticale posée sur une digue à talus constamment immergée. Nous présentons, dans ce qui suit, un modèle pour traiter l'écoulement dans ces ouvrages.

2. Milieu poreux

2.1. Equation de Forchheimer

On considère un milieu poreux saturé composé de deux phases : le squelette rigide et le fluide saturant l'espace interstitiel. Le milieu poreux est considéré inerte, il n'y a pas de création de masse pour les deux phases. On considère aussi que le squelette est immobile et que le fluide est incompressible. Les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement sont :

$$\operatorname{div}(\varepsilon \vec{V}_s) = 0 \quad [1]$$

avec ε la porosité du milieu, \vec{v}_s la vitesse interstitielle ou vitesse moyenne réelle du fluide. La quantité $\varepsilon\vec{v}_s$ désigne la vitesse de filtration ou vitesse d'écoulement.

$$\frac{\partial \vec{V}_s}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} (p + \rho g z) - \vec{F}_r - \vec{F}_i \quad [2]$$

où ρ représente la masse volumique du fluide, p la pression, z la cote verticale et $\vec{\nabla}$ désigne l'opérateur gradient.

Le terme de résistance \vec{F}_r s'exprime en fonction de la vitesse interstitielle (Ward, 1964) :

$$\vec{F}_r = \frac{\nu \varepsilon}{K} \vec{v}_s + \frac{C_f \varepsilon^2}{\sqrt{K}} |\vec{v}_s| \vec{v}_s \quad [3]$$

où ν représente la viscosité, C_f le coefficient de frottement turbulent et K la perméabilité du milieu poreux.

Le terme de résistance inertielle \vec{F}_i dépend du coefficient de masse virtuelle C_m et de l'accélération dans le sens de l'écoulement (Sollit, 1972).

$$\vec{F}_i = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} C_m \frac{\partial \vec{V}_s}{\partial t} \quad [4]$$

Le coefficient C_m peut être évalué pour un grain individuel de forme régulière mais reste généralement inconnu pour un ensemble de grains formant un corps poreux. En remplaçant les expressions de \vec{F}_r et \vec{F}_i dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement, on obtient l'équation de Forchheimer qui est l'équation généralement utilisée par les ingénieurs pour décrire les écoulements dans les milieux poreux sous l'action de la houle.

$$S \frac{\partial \vec{V}_s}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} (p + \rho g z) - \frac{\nu \varepsilon}{K} \vec{v}_s - \frac{C_f \varepsilon^2}{\sqrt{K}} |\vec{v}_s| \vec{v}_s \quad [5]$$

$$\text{avec } S = 1 + \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} C_m.$$

Le terme linéaire, terme de Darcy, gouverne les équations à faible nombre de Reynolds en milieu poreux assez fins. Le terme non-linéaire, terme de Forchheimer, est une extension du terme de Darcy pour des milieux poreux plus grossiers, à grands nombre de Reynolds où les phénomènes d'inertie l'emportent sur les effets de la viscosité.

2.2 Linéarisation

En considérant un mouvement harmonique, les termes dissipatifs, linéaire et non linéaire, de l'équation de Forchheimer sont remplacés par un terme linéaire équivalent :

$$\frac{\nu\varepsilon}{K}\vec{V}_s + \frac{C_f\varepsilon^2}{\sqrt{K}}|\vec{V}_s|\vec{V}_s \rightarrow f\omega\vec{V}_s \quad [6]$$

Dans cette expression, f peut être assimilé à un coefficient de frottement ou d'amortissement, ω représente la pulsation du mouvement harmonique de période T . L'évaluation du coefficient f repose sur l'hypothèse de Lorentz du travail équivalent qui consiste à égaliser sur une période, le travail du terme non-linéaire avec celui d'un terme linéaire. Le terme f vaut (Dingemans, 1996):

$$f\omega = \frac{\nu\varepsilon}{K} \left(1 + \frac{C_f\varepsilon\sqrt{K}}{\nu} \bar{f} \right) \quad [7]$$

tel que le terme \bar{f} est égal à :

$$\bar{f} = \frac{\int_0^T |\vec{V}_s|^3 dt}{\int_0^T |\vec{V}_s|^2 dt} = \frac{8}{3\pi} \sqrt{a+b} \left\{ E(m) - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{b}{a} \right) K(m) \right\} \quad [8]$$

tels que $a = \frac{1}{T} \int_0^T |\vec{V}_s|^2 dt$, $b = \text{Max} \left(|\vec{V}_s|^2 - a \right)$, $m = \frac{2b}{a+b}$.

$K(m)$ et $E(m)$ représentent respectivement les intégrales elliptiques de premier et de second ordre.

2.3. Equation pour un mouvement harmonique

Ecrivons les solutions harmoniques :

$$\begin{aligned} \vec{V}_s &= \text{Re}(\vec{\mathbf{V}}e^{-j\omega t}) \\ p^* &= \text{Re}(\mathbf{P}e^{-j\omega t}) \end{aligned} \quad [9]$$

avec $p^* = p + \rho g z$.

L'écriture linéaire de l'équation de conservation de la quantité de mouvement en fonction des grandeurs (\vec{V}, \mathbf{P}) et du terme de linéarisation f est :

$$-j\omega S\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\mathbf{P} - f\omega\vec{V} \quad [10]$$

que l'on peut aussi mettre sous la forme donnant la vitesse de filtration :

$$\varepsilon\vec{V} = \frac{1}{\rho j\omega}\beta\vec{\nabla}\mathbf{P} \quad [11]$$

avec $\beta = \frac{\varepsilon}{S + jf}$.

L'équation de conservation de la masse permet d'obtenir la relation de propagation finale :

$$\text{div}(\beta\vec{\nabla}\mathbf{P}) = 0 \quad [12]$$

Cette relation, avec les conditions aux limites sur la surface libre, le fond rigide et à l'interface du milieu poreux et du milieu fluide, définit un modèle à pression régissant la propagation d'une houle linéaire périodique en présence de milieu poreux. La résolution de cette équation, par un schéma itératif, permet de définir le champ de vitesse ainsi que la distribution de la pression dans le milieu poreux. Cette équation est commune aux deux milieux, le domaine est considéré alors comme hétérogène avec une fonction β variable dans l'espace. La fonction est constante et égale à 1 dans le fluide, elle est variable dans le milieu poreux.

3. Bicouche

Soit le cas du bicouche représenté sur la figure 1 et composé d'un fluide submergeant un fond poreux qui repose sur un fond rigide. Soit $Oxyz$ un repère cartésien dont les axes Ox , Oy définissent le plan horizontal coïncidant avec la surface libre du fluide au repos, l'axe Oz est dirigé vers le haut. Les vecteurs unitaires normaux à l'interface fluide-poreux et au fond rigide sont notés respectivement \vec{n} et \vec{n}_f , h représente la profondeur de la couche fluide et h_f la profondeur totale du domaine.

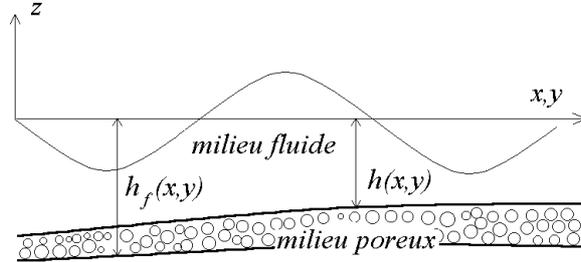


Figure 1. Schéma du bicouche .
Schema of bilayer.

3.1 Système d'équations

Le modèle à pression qui régit la propagation d'une houle périodique en présence d'un fond poreux correspond au système d'équations suivant :

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}(\beta_l \vec{\nabla} \mathbf{P}) &= 0 & -h_f \leq z \leq 0 \\
 \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} \cdot \frac{\varepsilon_1}{\beta_1} \cdot \mathbf{P} &= 0 & z = 0 \\
 \beta_2 \vec{\nabla} \mathbf{P} \cdot \vec{n}_f &= 0 & z = -h_f \\
 \mathbf{P}(h^-) - \mathbf{P}(h^+) &= 0 & z = -h \\
 \beta_1 \vec{\nabla} \mathbf{P} \cdot \vec{n} - \beta_2 \vec{\nabla} \mathbf{P} \cdot \vec{n} &= 0 & z = -h
 \end{aligned}$$

[13]

Dans le système précédent, l'équation de propagation $\operatorname{div}(\beta_l \vec{\nabla} \mathbf{P}) = 0$ définit la distribution de la pression dans le domaine avec $l=1,2$ et $\beta_1=1$ et $\beta_2 = \frac{1}{S + jf}$ respectivement dans la couche fluide et poreuse. La condition aux limites en $z=0$ est obtenue à partir de la condition cinématique et la condition dynamique d'une surface libre ; pour le bicouche avec couche supérieure fluide, la porosité ε_1 est égale à 1. Le fond à $z=-h_f$ est rigide. Les conditions aux limites $z=-h$ à l'interface fluide-poreux traduisent les continuités du débit et de la pression.

3.2 Relation de dispersion

Considérons le cas de fonds plats et interfaces fluide-poreux planes, écrivons la solution du système précédent sous la forme de variables séparées :

$$\mathbf{P} = P(x, y)f(z) \quad [14]$$

En injectant cette solution dans la première équation du système précédent, on obtient :

$$-\frac{\operatorname{div}(\beta_{hl} \vec{\nabla} P)}{\beta_{hl} P} = \frac{(\beta_{zl} f')'}{\beta_{zl} f} = k^2$$

β_{hl}, β_{zl} représentent les variables séparées de β_l .

Le nombre d'onde k est identique dans les deux couches. En considérant β_{zl} constant par couche, la solution sur la verticale se met sous la forme suivante avec quatre constantes A, B, C, D:

$$\begin{aligned} f(z) &= A \operatorname{ch}(kz) + B \operatorname{sh}(kz) & -h \leq z \leq 0 \\ f(z) &= C \operatorname{ch}(kz) + D \operatorname{sh}(kz) & -h_f \leq z \leq -h \end{aligned} \quad [15]$$

L'application des conditions aux limites, sur la surface libre, le fond imperméable et à l'interface des deux milieux permet de calculer ces constantes ainsi que la relation de dispersion. Calculer la relation de dispersion consiste à déterminer une solution non nulle du système et à annuler le déterminant suivant :

$$\operatorname{Dét} \begin{vmatrix} -\frac{\omega^2}{gk} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\operatorname{th}(kh_f) & 1 \\ 1 & -\operatorname{th}(kh) & -1 & \operatorname{th}(kh) \\ -\operatorname{th}(kh) & 1 & \beta_2 \operatorname{th}(kh) & -\beta_2 \end{vmatrix} = 0 \quad [16]$$

La relation de dispersion s'écrit :

$$\omega^2 = gk \operatorname{th}(kh) + \beta_2 \operatorname{th}(k(h_f - h))(gk - \omega^2 \operatorname{th}(kh)) \quad [17]$$

On peut voir que pour $h_f - h$ nul, on retrouve l'équation pour une couche de fluide seule. Cette relation de dispersion a une infinité de valeurs propres solutions k_n et de fonctions propres associée f_n . On démontre que ces fonctions propres sont orthogonales. La relation d'orthogonalité est :

$$\int_{-h_f}^0 \beta_l f_p f_n = A \delta_{pn}$$

où A est une constante.

La relation d'orthogonalité ne dépend pas des termes d'interfaces, aussi elle est généralisable à un milieu poreux multicouche.

Les fonctions solutions sur la verticale sont :

$$\begin{aligned}
 f_n(z) &= ch(k_n z) + \frac{\omega^2}{gk_n} sh(k_n z) \quad -h \leq z \leq 0 \\
 f_n(z) &= \alpha \frac{ch(k_n(z+h_f))}{ch(k_n h_f)} \quad -h_f \leq z \leq -h
 \end{aligned} \tag{18}$$

$$\text{avec } \alpha = \left(1 - \frac{\omega^2}{gk_n} th(k_n h) \right) \frac{ch(k_n h) ch(k_n h_f)}{ch(k_n(h_f - h))}.$$

La norme F_n de ces fonctions est égale à :

$$\begin{aligned}
 F_n &= \int_{-h_f}^h \beta_2 f_n^2(z) dz + \int_{-h}^0 f_n^2(z) dz \\
 &= \beta_2 \alpha^2 \frac{sh(2k_n(h_f - h)) + 2k_n(h_f - h)}{4k_n ch^2(k_n h_f)} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left[h + \frac{sh(2k_n h)}{2k_n} - \frac{\omega^2 sh^2(k_n h)}{2gk_n^2} + \frac{\omega^4 \{sh(2k_n h) - 2k_n h\}}{2g^2 k_n^3} \right]
 \end{aligned} \tag{19}$$

3.3. Modèle horizontal

Nous présentons un modèle incluant les ouvrages réfléchissants et moyenné sur la verticale. L'équation déduite représente un modèle horizontal dissipatif permettant de modéliser les problèmes de propagation d'une houle en présence de corps poreux. Ce modèle permet notamment de traiter la réflexion partielle de la houle sur les ouvrages. Cette démarche a déjà été entreprise par certains auteurs comme Sato *et al.* (1990) et Dalrymple *et al.* (1991). Les modèles utilisés par ces auteurs sont basés sur l'équation de pente douce avec un terme dissipatif supplémentaire. Sato propose d'ajouter une zone fictive de dissipation d'énergie devant les ouvrages réfléchissants, cette zone est caractérisée par un coefficient de dissipation. Dans une démarche similaire à la notre et sur le cas d'un obstacle poreux vertical à surface

libre reposant sur un fond rigide variable, Zhu (2000) a présenté un modèle moyenné sur la hauteur de l'obstacle.

Dans ce qui suit, nous présentons la moyenne de la relation de propagation en milieu inhomogène sur une hauteur comprenant une couche poreuse et une couche fluide.

3.3.1 Intégration sur la hauteur

Soit $f(z, h(x, y), h_f(x, y))$ une fonction de pondération. Nous écrivons la forme faible suivante :

$$\begin{cases} \int_{-h_f}^{-h} f \operatorname{div}(\beta_2 \bar{\nabla} \mathbf{P}) = 0 \\ \int_{-h}^0 f \operatorname{div}(\beta_1 \bar{\nabla} \mathbf{P}) = 0 \end{cases}$$

Après intégration par parties, applications des conditions aux limites et après avoir raccordé les deux intégrales grâce aux conditions de continuité à l'interface fluide-poreux. On obtient l'expression finale de l'intégrale sur la hauteur:

$$\operatorname{div} \left(\beta_1 \int_{-h_f}^0 f \bar{\nabla} \mathbf{P} dz \right) - \int_{-h_f}^0 \bar{\nabla} f \beta_1 \bar{\nabla} \mathbf{P} dz - \int_{-h_f}^0 \frac{\partial f}{\partial z} \beta_1 \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial z} dz - \left[f \beta_1 \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial z} \right]_{z=0} = 0 \quad [20]$$

La dernière intégrale sur la hauteur est indépendante des termes d'interfaces, comme pour la relation d'orthogonalité, l'expression (20) peut être généralisée à un poreux multicouche.

3.3.2. Modèle global

Soit la forme générale de la solution exprimée à partir d'une série de modes propres verticaux :

$$\mathbf{P}(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z, h, h_f) P_n(x, y) \quad [21]$$

Injectons cette forme dans l'intégrale (20) et choisissons f_p comme fonction de pondération. L'orthogonalité des fonctions f_n donne la relation suivante :

$$\operatorname{div}(F_p \bar{\nabla} P_p) + \frac{\omega^2}{g} \varepsilon_1 \sum_{n=0}^{\infty} P_n + \sum_{n=0}^{\infty} [\bar{Q}_{pn} - \bar{Q}_{np}] \bar{\nabla} P_n + \sum_{n=0}^{\infty} [\operatorname{div} \bar{Q}_{pn} - R_{pn} - P_{pn}] P_n = 0 \quad [22]$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{pn} = \int_{-h_f}^0 f_p \beta_l f_n dz \\ P_{pn} = \int_{-h_f}^0 \frac{\partial f_p}{\partial z} \beta_l \frac{\partial f_n}{\partial z} dz \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} R_{pn} = \int_{-h_f}^0 \bar{\nabla} f_p \beta_l \bar{\nabla} f_n dz \\ \bar{Q}_{pn} = \int_{-h_f}^0 f_p \beta_l \bar{\nabla} f_n dz \end{array} \right.$$

En négligeant la contribution de tous les modes évanescents d'ordre supérieur, nous réécrivons la relation pour le premier mode $p = n = 0$:

$$\text{div}\left(F_0 \bar{\nabla} P_0\right) + k_0^2 F_0 P_0 = \left(R_{00} - \text{div} \bar{Q}_{00}\right) P_0 \quad [23]$$

L'hypothèse des fonds et interfaces de faibles pentes permet de négliger le terme R_{00} en $(\bar{\nabla} h)^2$ et $(\bar{\nabla} h_f)^2$ ainsi que $\text{div} \bar{Q}_{00}$ en Δh et Δh_f .

L'équation de pentes douces généralisée à des domaines avec fonds poreux dissipatifs s'écrit donc :

$$\text{div}\left(F_0 \bar{\nabla} P_0\right) + k_0^2 F_0 P_0 = 0 \quad [24]$$

On vérifie que, pour des hauteurs de couches poreuses nulles, on retrouve l'équation classique de Berkhoff pour une couche fluide seule :

$$\text{div}\left(cc_g \bar{\nabla} P_0\right) + k_0^2 cc_g P_0 = 0 \quad [25]$$

3.3.3. Cas limite : un coefficient β petit

Nous examinons, dans cette section, la solution de la relation de dispersion, du terme F_0 et de la condition aux limites à l'interface dans le cas où le coefficient β est petit, cela revient à considérer une perméabilité ou une porosité très faible.

Pour la relation de dispersion donnée par la relation (17), elle se réduit à :

$$\omega^2 \approx gk \text{th}(kh) \quad [26]$$

le nombre d'onde solution est pratiquement réel, et est noté :

$$k = k_r + j\delta$$

avec $\delta \ll 1$.

En ce qui concerne le terme F_0 , donné par la relation (19), il devient :

$$F_0 \approx \int_{-h}^0 f_0^2(z) dz \approx \frac{cc_g}{g} \quad [27]$$

La condition aux limites à l'interface donnée par la relation (13) se réduit à :

$$\vec{\nabla} P \cdot \vec{n} \approx 0 \quad [28]$$

l'interface est proche de celle d'un fond imperméable.

En remplaçant ces derniers résultats dans l'équation de notre modèle on obtient :

$$\text{div}(cc_g \vec{\nabla} P) + (k_r^2 - \delta^2 + 2jk_r \delta) cc_g P = 0$$

cette relation devient, après avoir négligé, le terme d'ordre deux δ^2 à :

$$\text{div}(cc_g \vec{\nabla} P) + k_r^2 cc_g P + j\omega 2\delta cc_g P = 0 \quad [29]$$

La dernière relation représente l'équation de Berkhoff avec un terme dissipatif supplémentaire.

En ayant examiné les cas limites d'une très faible perméabilité ou porosité, nous avons retrouvé le modèle classique de Berkhoff. Le modèle horizontal à dissipation que nous présentons, est une généralisation du modèle de Berkhoff sur fonds poreux.

4. Mise en œuvre numérique du modèle

Nous abordons dans cette section quelques aspects de la mise en œuvre numérique du modèle. Nous insisterons d'abord sur la résolution de la relation de dispersion, qui est une étape essentielle, ensuite sur le traitement numérique du terme f pour lequel plusieurs itérations sont nécessaires pour la convergence du modèle.

4.1 Résolution de la relation de dispersion

La résolution de la relation de dispersion constitue l'une des étapes essentielles de la mise en œuvre numérique du modèle. Elle permet également de comprendre le comportement dissipatif des ouvrages poreux. La relation de dispersion est une

équation non linéaire. Un schéma itératif de la forme suivante, avec un choix approprié de G , suffit pour résoudre la relation de dispersion :

$$x_i = G(x_{i-1}) \quad [30]$$

La convergence du schéma précédent dépend de la période, de la profondeur et du terme f , voir les figures 3e et 3f. Nous présentons une forme de G qui présente l'avantage d'être stable lorsque $x = kh$ est petit :

$$G(x) = \frac{x + a - \beta_2 \cdot (x - a \cdot thx) \cdot th(n-1)x}{1 + thx} \quad [31]$$

Les termes a , n et x représentent respectivement : $a = \frac{\omega^2 h}{g}$, $n = \frac{h_f}{h}$ et $x = kh$.

4.1.1. Influence du coefficient de frottement f et de la fréquence sur la dissipation

Nous nous intéressons dans cette section aux comportements dissipatif du bicouche et du bloc poreux vertical en fonction de la valeur du coefficient de frottement f de la fréquence :

4.1.1.1. Exemple du bicouche

Afin de mieux comprendre l'influence du coefficient de frottement f et de la fréquence sur la propagation et la dissipation de la houle, examinons les variations de la partie réelle et de la partie imaginaire du nombre d'onde en fonction du coefficient de frottement f et de la fréquence représentée par le nombre adimensionnel a . En ce qui concerne l'influence du coefficient de frottement f , on observe sur la figure 3b que le maximum de dissipation se produit pour des valeurs intermédiaires de f . La dissipation diminue ensuite lorsque le coefficient de frottement f augmente. Pour de grandes valeurs de f obtenues pour un milieu poreux peu perméable, la dissipation devient très faible et le modèle se rapproche alors de l'équation de Berkhoff classique. On constate sur la figure 3d un comportement caractéristique du bicouche : les hautes fréquences sont moins dissipées que les basses. Comme on peut le voir sur les figures 3a et 3c, la présence du fond poreux influe peu sur la partie propagative du nombre d'onde.

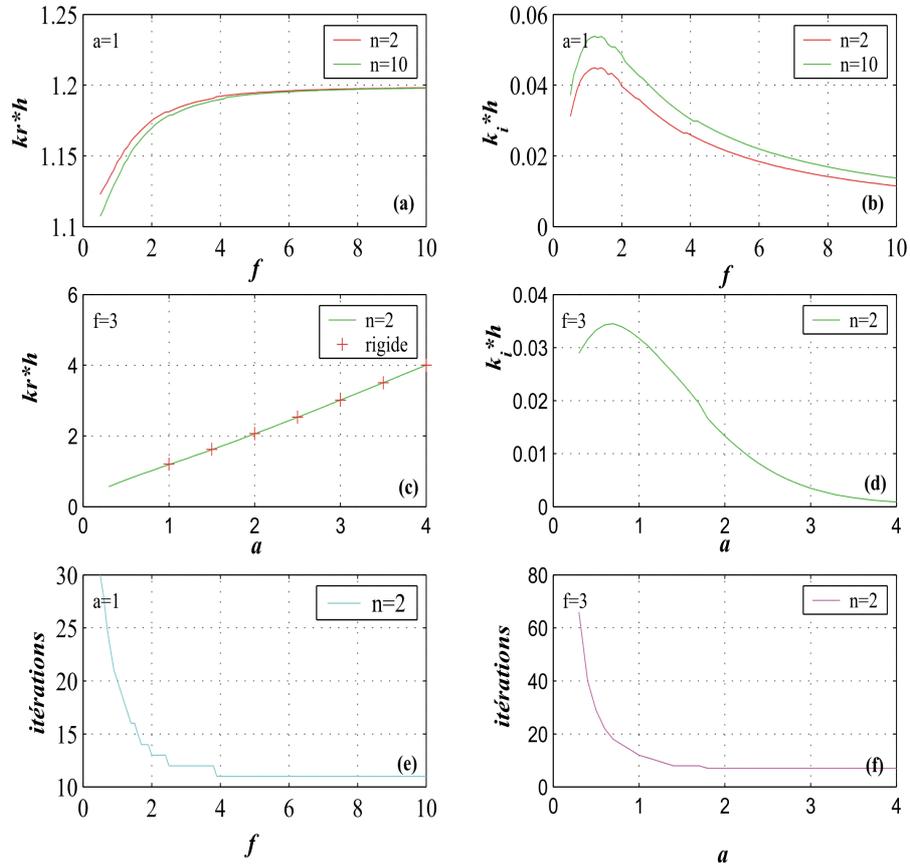


Figure 3. *Bicouche. Résolution de la relation de dispersion.*
 Bilayer. Resolution of the dispersion relation

Les figures 3e et 3f montrent qu'une dizaine d'itérations est en général suffisante pour atteindre le test d'arrêt que nous avons choisi. On observe aussi que la convergence est d'autant plus longue que le coefficient de frottement f et la pulsation ω sont faibles.

4.1.1.2. Exemple du bloc poreux vertical

Pour le cas du bloc poreux vertical à surface libre introduit par K. Sollit (1972), voir figure 4, la relation de dispersion est donnée par la relation :

$$\omega^2 = \frac{\beta}{\varepsilon} gk \operatorname{th}(kh) \quad [31]$$

On observe sur la figure 5 que la dissipation est proportionnelle à la fréquence. Les hautes fréquences sont davantage dissipées que les basses.

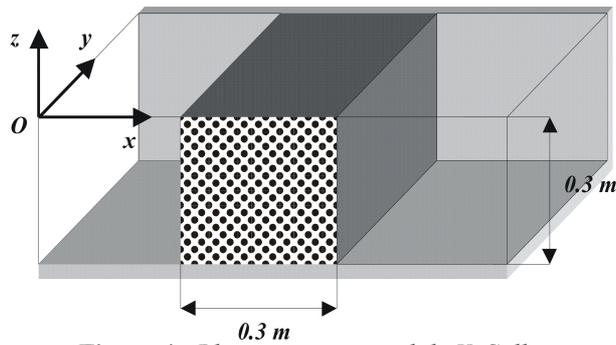


Figure 4. Bloc poreux vertical de K. Sollit.
K. Sollit's vertical porous block.

Nous avons un comportement dissipatif inverse du bloc poreux par rapport au bicouche. En effet, si les hautes fréquences sont fortement dissipées par le bloc vertical à surface libre, ces dernières le sont nettement moins par le bicouche. Pour les hautes fréquences, la présence d'un fond poreux dissipatif influe peu sur la propagation de la houle qui a lieu en surface.

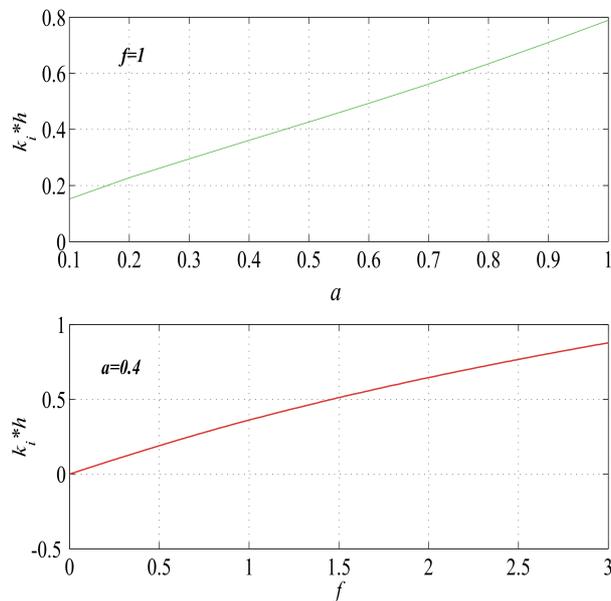


Figure 5. Bloc poreux vertical. Résolution de la relation de dispersion.
Porous vertical block. Resolution of the dispersion relation.

4.2. Schéma itératif : résolution par élément finis

Nous considérons un coefficient f moyenné sur la hauteur et variable dans le plan. Plusieurs itérations sont nécessaires à la convergence du modèle. Le schéma de résolution itératif est le suivant :

- a. Initialisation du terme f (au terme de Darcy).
- b. Résolution de la relation de dispersion.
- c. Calcul par élément finis du champs de vitesse.
- d. Calcul du nouveau terme f .
- e. Test d'arrêt sur f : fin ou retour à l'étape b.

4.2.1. Traitement numérique du terme f

Nous présentons dans cette section le traitement numérique du terme f , autrement dit, le passage d'une fonction continue définie en trois dimensions à une variable discrète moyennée sur la hauteur et définie pour chaque point du maillage. Soient les composantes du vecteur vitesse complexe donnée par la relation (11),

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} a_1 + ja_2 \\ a_3 + ja_4 \\ a_5 + ja_6 \end{pmatrix}$$

et soit $\mathbf{P} = (Z_1 + jZ_2)(P_1 + jP_2)$ la forme complexe de la pression telles que P_1, P_2 les variables horizontales, Z_1, Z_2 la solution sur la hauteur.

Soit l'approximation sur un éléments finis triangulaire linéaire des variables P_1, P_2 :

$$P_1 = \sum_{i=1}^3 N_i P_i^1 \quad P_2 = \sum_{i=1}^3 N_i P_i^2$$

telles que P_i^1, P_i^2 représentent respectivement les variables nodales réelles et imaginaires au nœud i , N_i représentent les fonctions de formes d'un élément finis triangulaire linéaire.

A l'aide de l'équation (11) avec un coefficient S pris égal à 1, comme le font Sollit et Cross (1972), on déduit de la précédente approximation du champ de pression la forme discrétisée des composantes du vecteur vitesse pour un nœud n :

$$\begin{aligned}
a_{1n}(z, x_n, y_n) &= -\frac{1}{\rho\omega} \frac{1}{f_n^2 + 1} \left[(f_n Z_1 - Z_2) \sum_{i=1}^3 N_{i,x} P_i^1 - (f_n Z_2 + Z_1) \sum_{i=1}^3 N_{i,x} P_i^2 \right] \\
a_{2n}(z, x_n, y_n) &= -\frac{1}{\rho\omega} \frac{1}{f_n^2 + 1} \left[(f_n Z_2 + Z_1) \sum_{i=1}^3 N_{i,x} P_i^1 - (f_n Z_1 - Z_2) \sum_{i=1}^3 N_{i,x} P_i^2 \right] \\
a_{3n}(z, x_n, y_n) &= -\frac{1}{\rho\omega} \frac{1}{f_n^2 + 1} \left[(f_n Z_1 - Z_2) \sum_{i=1}^3 N_{i,y} P_i^1 - (f_n Z_2 + Z_1) \sum_{i=1}^3 N_{i,y} P_i^2 \right] \\
a_{4n}(z, x_n, y_n) &= -\frac{1}{\rho\omega} \frac{1}{f_n^2 + 1} \left[(f_n Z_2 + Z_1) \sum_{i=1}^3 N_{i,y} P_i^1 - (f_n Z_1 - Z_2) \sum_{i=1}^3 N_{i,y} P_i^2 \right] \\
a_{5n}(z, x_n, y_n) &= -\frac{1}{\rho\omega} \frac{1}{f_n^2 + 1} \left[(f_n Z_{1,z} - Z_{2,z}) N_n P_n^1 - (f_n Z_{2,z} + Z_{1,z}) N_n P_n^2 \right] \\
a_{6n}(z, x_n, y_n) &= -\frac{1}{\rho\omega} \frac{1}{f_n^2 + 1} \left[(f_n Z_{2,z} + Z_{1,z}) N_n P_n^1 + (f_n Z_{1,z} - Z_{2,z}) N_n P_n^2 \right]
\end{aligned}
\tag{32}$$

En remplaçant les précédentes relations dans l'expression (7) du terme f , on définit pour chaque nœud à une hauteur z donnée un coefficient $f_n(x_n, y_n, z)$. Ces valeurs de $f_n(x_n, y_n, z)$ sont ensuite moyennées sur la verticale du nœud :

$$f^n(x_n, y_n) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l f_n(x_n, y_n, z_i) \tag{33}$$

l désigne le nombre de subdivisions de la couche poreuse.

5. Applications

5.1. Bosse poreuse triangulaire

Les auteurs Isobe, Cruz et Watanabe (1997) ont développé un modèle horizontal temporel qui tient compte des non linéarités de la surface libre et du terme d'inertie pour étudier les fonds poreux. Le modèle repose sur les équations de Boussinesq appliquées aux fonds poreux. Ils ont appliqué notamment leur modèle sur les cas d'un fond poreux sur une bosse poreuse triangulaire. Les résultats obtenus par les auteurs ont été confrontés à des mesures expérimentales effectuées dans des bassins à houle à l'université de Tokyo. Nous avons testé notre modèle sur ce cas dont le profil et les dimensions géométriques du fond sont donnés sur la figure 5.

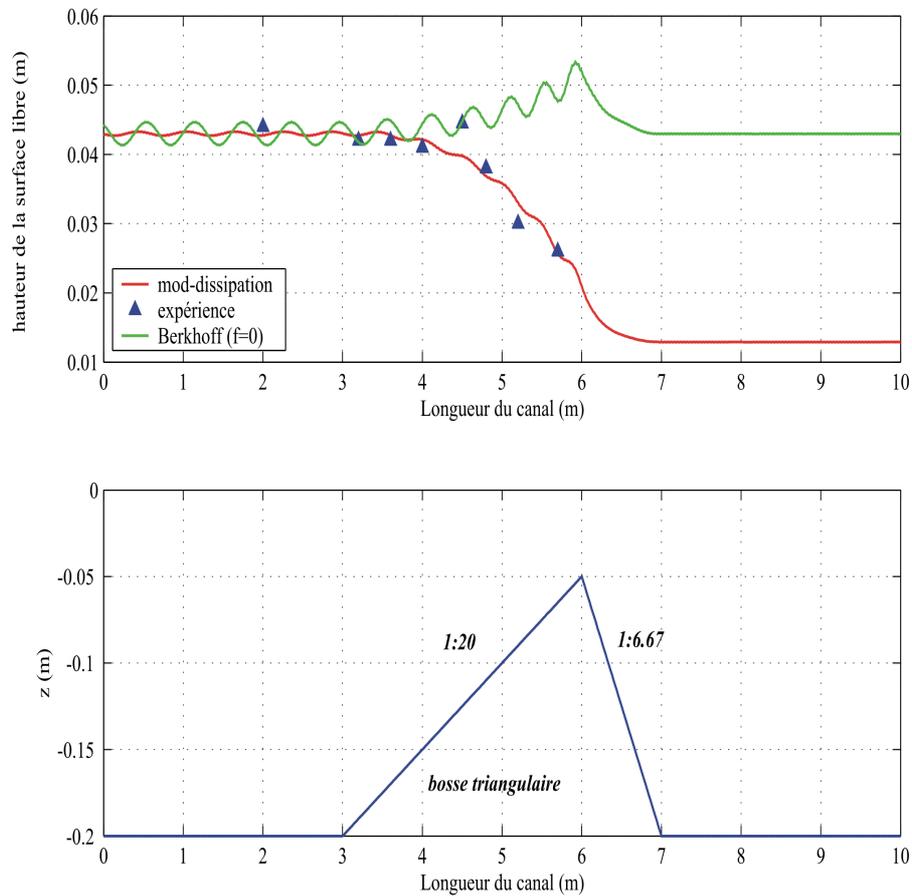


Figure 5. *Bosse poreuse triangulaire*
Triangular porous bar.

La houle de hauteur 4.3 cm est générée à l'extrémité $x=0$ et est absorbée de l'autre côté. Les résultats numériques obtenus sont représentés sur la figure 5 pour permettre une comparaison avec les mesures expérimentales. Afin de mieux voir l'amortissement de la houle lorsqu'elle traverse la bosse poreuse, nous avons représenté deux courbes, l'une représentant l'élévation de la surface libre dans le cas d'un fond poreux, l'autre est relative au cas d'un fond rigide. Nous pouvons comparer sur ces deux graphiques l'effet de l'ouvrage poreux sur la houle par rapport à celui d'un ouvrage rigide. On peut voir l'atténuation de la houle lorsque cette dernière se propage au dessus du corps poreux. On constate que la partie transmise de la houle est faible par rapport au cas où la pente était rigide. La réflexion de la houle est aussi très atténuée par rapport à un obstacle rigide. On remarque aussi que les résultats fournis par notre modèle sont proches des valeurs expérimentales. Les calculs

correspondent à un diamètre équivalent d égal à 0,67 cm, une porosité ε égale à 0,44, un coefficient de frottement C_f égal à 0,40 et une perméabilité K égale à $2,5 \cdot 10^{-4} \text{cm}^2$.

5.2. Digue à talus

Ce cas test vise à reproduire le coefficient de réflexion d'une digue à talus en enrochement en appliquant le modèle horizontal proposé. Le talus testé a une pente égale à $\cot \alpha = 1.5$ et une profondeur h en pied d'ouvrage de 0.4 mètres.

Les caractéristiques physiques de l'enrochement d'une digue à talus sont prises des valeurs expérimentales présentées par Sollit et Cross (1972) et reprises par Madsen (1974). Elles correspondent à un diamètre équivalent d égal à 1 cm, la porosité ε égale à 0,43, le coefficient de frottement C_f égal à 0,41 et la perméabilité K égale à $3,7 \cdot 10^{-4} \text{cm}^2$.

Le tableau 1 représente les valeurs numériques du coefficient de réflexion obtenu avec notre modèle, les valeurs fournies par la relation de Seelig ajustée prenant en compte notamment le diamètre des enrochements et par la relation par défaut de Seelig avec $(a;b)=(0,6;6,6)$. On constate que les résultats du modèle sont proches de la relation de Seelig ajustée. Pour les grands nombres d'Iribaren, la relation de Seelig est dite conservatrice car elle a tendance à sous-estimer le coefficient de réflexion. Les valeurs numériques obtenues sont légèrement supérieures à celles de Seelig.

T (s)	Nombre d'Iribaren	K_R numérique	K_R Seelig ajusté	K_R Seelig (0,6/6,6)
0,5	2,94	0,44	0,40	0,34
1	4,86	0,49	0,62	0,47
2	6,13	0,73	0,76	0,51
3	7,36	0,91	0,80	0,53
4	8,44	0,93	0,82	0,55
5	9,41	0,93	0,88	0,56
6	10,29	0,93	0,85	0,56

Tableau 1. Comparaison des coefficients de réflexion pour une digue à talus
Comparison of reflection coefficients of a rubble mound breakwater.

Le coefficient de réflexion d'un talus dépend des paramètres de la houle, des dimensions géométriques de l'ouvrage et des caractéristiques physiques des enrochements. Le modèle numérique présenté ici, permet d'étudier facilement la sensibilité du coefficient de réflexion aux différents paramètres.

6. Conclusions

Un modèle de houle à dissipation a été développé dans le but d'améliorer la prise en compte des ouvrages réfléchissants dans les codes de calcul d'agitation portuaire. Le modèle part d'une formulation d'un bicouche composé d'une couche fluide submergeant un fond poreux mais peut être facilement généralisé pour un multicouche. La mise en œuvre numérique du modèle consiste à résoudre un modèle linéaire. Plusieurs itérations sont nécessaires pour la convergence du coefficient de frottement f , variable dans le plan.

Le modèle est testé ici sur le cas d'une bosse poreuse triangulaire et sur un talus en enrochements. Les résultats obtenus approchent assez bien, sur le cas de la bosse triangulaire, les résultats expérimentaux ainsi que les résultats numériques obtenus avec un modèle de Boussinesq. Pour le cas du talus, les résultats du modèle sont comparables aux estimations paramétriques de la relation de Seelig. Le modèle reproduisant bien l'effet des ouvrages poreux sur la houle, ces-derniers peuvent donc être pris en compte, dans un modèle d'agitation, par une couche dissipative dont les caractéristiques sont déduites de la bathymétrie et de la géométrie des enrochements.

7. Références

- [CRU97] Cruz E.C., Isobe M. et Watanabe A., « Boussinesq equations for wave transformation on porous beds », *Coast. Eng.*, 30, p. 125-156, 1997.
- [DAR91] Dalrymple R.A., Losada M.A. et Martin P.A., « Reflection and transmission from porous structures under oblique wave attack », *Journal of fluid mechanics*, 224, p. 625-644, 1991.
- [DIN96] Dingemans M.W., « Water wave propagation over uneven bottoms », "World Scientific", 1996.
- [HOU02] Houari M., « Etude des conditions aux limites dans un modèle numérique d'agitation de houle », PhD Thèse – Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2002.
- [MAD74] Madsen O.S., « Wave transmission through porous structures », *Coast. Eng.* – 100 WW3, p. 169-188, 1974.
- [ROP99] Ropert F., « Modélisation numérique du comportement hydraulique des caissons », Jarlan – PhD Thèse -Université Technologique de Compiègne, 1999.
- [SAT90] Sato W., Isobe M. et Isumiya T., « A numerical Model for calculating wave height distribution in a harbour of arbitrary shape », *Coast. Eng.* 33, 2, p. 119-131, 1990.
- [SOL72] Sollit C.K. et Cross R.H., « Wave transmission through permeable breakwater », *Coast. Eng.*, 13, p. 1827-1846, 1972.
- [SUL97] Sulisz W., « Wave loads on caisson founded on multilayered rubble base », *J. Wtrwy. Port Coast. and Oc. Eng.*, 123, 3, p. 91-101, 1997.
- [SUL85] Sulisz W., « Wave reflection and transmission at permeable breakwaters of arbitrary cross section », *Coast. Eng.*, 9, 4, p. 371-386, 1985.
- [WAR64] Ward J. C., « Turbulent flow in porous media - Proc. Asce. J. Hyd.- 90, 5, 1-12, 1964.

- [WIL92] Williams A.F., Burchart H.F. et Den Adel H., « The permeability of rubble mound breakwater and new ideas», *Mast G6-S Coastal Structures*, 2, p. 129-138, 1992.
- [ZHU00] Zhu S., « On calculating the length of a short-crested over a porous seabed», *Applied Ocean Research*, 22, p. 63-73, 2000.
- [ZUH01] Zhu S., «Water waves within a porous medium on an undulating bed», *Coast. Eng.*, 42, p. 87-101, 2001.