

# I. — Singularité de la crête de la lame pour des houles rotationnelles limites.

## 1° MÉTHODE DE CALCUL.

On considère une onde progressive simple ayant atteint sa forme limite et se propageant à vitesse constante  $V$  sans déformation, ce qui suppose une profondeur constante ou illimitée.

En choisissant des axes mobiles, l'axe  $x$  horizontal dirigé de gauche à droite en sens inverse de la propagation, l'axe  $y$  vers le bas, l'origine étant liée à la crête de la lame, le mouvement ondulatoire est transformé en mouvement permanent. Les composantes de la vitesse sont données, avec les variables d'Euler, que le mouvement soit rotationnel ou non, par les équations (3), la fonction de courant  $\Psi$  étant indépendante du temps. Le tourbillon, qu'il y a lieu de considérer comme une donnée du problème, vaut, d'après l'équation (5) :

$$(158) \quad \left\{ \begin{array}{l} \zeta(x, y) = \zeta(r, \theta) = -\frac{1}{2} \Delta \Psi \\ = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} \right) = k + \mu r^{1/2} \cos \frac{1}{2} (\theta + \nu) + \dots, \end{array} \right.$$

$k, \mu, \nu, \dots$  étant des constantes connues. La raison de la prise en compte, pour  $\zeta$ , d'un terme en  $r^{1/2}$  résultera de l'exposé ultérieur. A l'approximation retenue, nous n'aurons d'ailleurs pas à faire usage de ce terme.

On a introduit des coordonnées polaires (fig. 18) :

$$x = r \sin \theta, \quad y = r \cos \theta$$

et exprimé, par leur intermédiaire, le développement en série du tourbillon aux environs de la crête, en négligeant les termes en  $r$  ou d'ordre supérieur.

La solution générale de l'équation (158) est la somme d'une solution particulière

$$(159) \quad \psi_0 = -\frac{k}{2} r^2 - \frac{\mu}{3} r^{5/2} \cos \frac{1}{2} (\theta + \nu) + \dots$$

et de la solution générale

$$(160) \quad \psi = \sum_0^n r^n \cos n (\theta - \beta_n)$$

de l'équation sans second membre. Les valeurs  $n$  sont des nombres, *a priori* quelconques, mêmes imaginaires.

Le théorème de Bernouilli, valable pour des mouvements rotationnels permanents, donne :

$$(161) \quad \frac{W^2}{2} - gy + \frac{p}{\rho} = C;$$

$W$  est la vitesse,  $p$  la pression; la constante  $C$  est différente selon la ligne de courant envisagée si le mouvement est tourbillonnaire. Ces lignes de courant, pour un mouvement permanent, sont identiques aux trajectoires des particules.

Si la crête est un point singulier anguleux, la vitesse  $y$  est obligatoirement nulle. En effet, un changement brusque de direction à vitesse non nulle impliquerait une accélération et des forces infinies. De plus, en surface,  $p$  est constant et, en modifiant la valeur de la constante  $C$ , on peut y supposer  $p = 0$ . A l'origine, tous les termes de gauche de l'équation (161) sont alors nuls et, dans cette hypothèse,  $C = 0$  pour toutes les particules de la surface libre qui constitue une nappe de

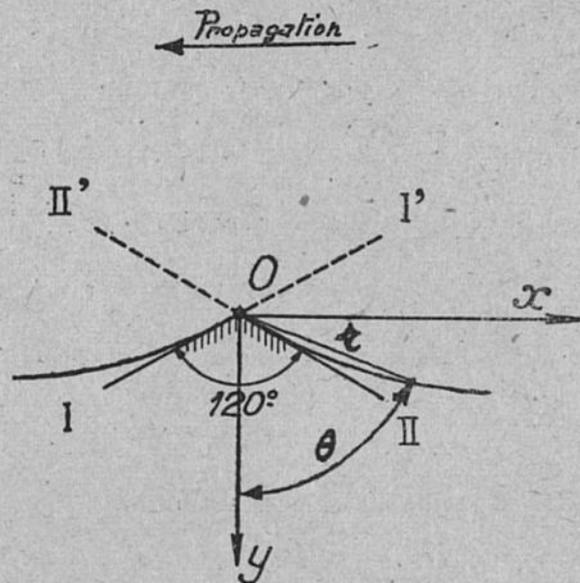


Fig. 18.

gnes de courant  $\Psi = \text{Const.}$  On a donc, sur la ligne d'eau, en désignant par  $-\frac{\partial \Psi}{r \partial \theta}$  la composante de la vitesse dans le sens du rayon vecteur  $r$  (*vitesse radiale*) et par  $\frac{\partial \Psi}{\partial r}$  celle normale au rayon vecteur (*vitesse tangentielle*) :

$$(162) \quad W^2 = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{r \partial \theta}\right)^2 = 2gy = 2gr \cos \theta.$$

En résumé, le problème de la forme limite de la houle revient à trouver une relation entre  $r$  et  $\theta$  déterminant la surface libre :

$$(163) \quad \theta = \theta_0 + \varepsilon(r) \quad \text{avec} \quad \varepsilon(0) = 0,$$

telle que l'équation non linéaire (162) et l'équation linéaire  $\Psi = \text{Const.}$  soient simultanément satisfaites. Ces deux conditions permettent de fixer les valeurs des constantes  $n$ ,  $\theta_0$ ,  $\alpha_n$ ,  $\beta_n$  et de la fonction  $\varepsilon(r)$ .

Tout d'abord, dans l'équation (160), le terme constant ( $n = 0$ ) peut être supposé nul, ce qui revient à poser  $\Psi = 0$  sur la ligne d'eau. De plus,  $n > 1$  car, sinon, les composantes de la vitesse ne tendraient pas vers zéro à l'origine. La plus petite valeur de  $n$  est donnée par l'équation (162) en égalant les puissances minima de  $r$  dans les deux membres :

$$2(n-1) = 1, \quad \text{ou, } n = 3/2.$$

Il peut, naturellement, y avoir des exposants  $n$  supérieurs. En ne considérant que les points assez proches de la crête, on peut limiter l'expression de  $\Psi$  aux termes d'exposants les plus faibles, d'où, en introduisant la valeur (163) de  $\theta$  et en développant :

$$(164) \quad 0 = \Psi = \psi + \psi_0 = o_1 r^{3/2} \cos \frac{3}{2}(\theta_0 - \beta_1) - \frac{3}{2} o_1 \varepsilon r^{3/2} \sin \frac{3}{2}(\theta_0 - \beta_1) \\ - \frac{k}{2} r^2 + o_2 r^2 \cos 2(\theta_0 - \beta_2) + \dots,$$

et, pour l'équation (162) :

$$(165) \quad \left\{ \begin{aligned} W^2 &= \frac{9}{4} o_1^2 r - 3 o_1 k r^{3/2} \cos \frac{3}{2}(\theta_0 - \beta_1) + 6 o_1 o_2 r^{3/2} \cos \left( \frac{\theta_0}{2} + \frac{3\beta_1}{2} - 2\beta_2 \right) + \dots \\ &= 2gr \cos \theta_0 - 2gr\varepsilon \sin \theta_0 + \dots \end{aligned} \right.$$

Ces développements doivent être vérifiés identiquement sur la ligne d'eau lorsque  $r$  varie.

En égalant à zéro les coefficients des puissances successives de  $r$ , on trouvera les solutions de première, deuxième approximation, etc. On se limitera à la seconde.

## 2° PREMIÈRE APPROXIMATION.

On l'obtient en annulant les coefficients des puissances minima de  $r$  dans les formules (164) et (165).

Pour  $\Psi$ , termes en  $r^{3/2}$  :

$$\cos \frac{3}{2}(\theta_0 - \beta_1) = 0$$

pour  $W^2$ , termes en  $r$  :

$$\frac{9}{4} o_1^2 = 2g \cos \theta_0.$$

La première équation fournit trois solutions distinctes pour  $\theta_0$  (fig 18) :

$$\theta_I = -\frac{\pi}{3} + \beta_1, \quad \theta_{II} = \frac{\pi}{3} + \beta_1, \quad \theta_{III} = \pi + \beta_1.$$

Les deux branches aboutissant à l'origine doivent, d'autre part, d'après la seconde équation ci-dessus, comporter avec l'axe  $y$  des angles tels que leur cosinus soient égaux.

Ces branches doivent donc être :

a. *confondues* et alors de direction quelconque,  $\beta_1$  restant arbitraire, ou *distinctes* et occuper ;

b. soit les positions I et II avec  $\beta_1 = 0$  ;

c. soit les positions symétriques I' et II' avec  $\beta_1 = \pi$ .

Ces dernières positions (c), correspondant à des valeurs négatives de  $y$ , sont à éliminer d'après l'équation (162). De même, la solution (a) ne peut convenir, car elle ne saurait représenter un point de rebroussement. En effet, dans ce dernier cas, l'écoulement sur les deux branches confondues devrait être de sens opposé,

le filet d'eau remontant d'un côté de la crête et s'écoulant de l'autre. Or, cet écoulement, donné par la vitesse radiale  $-\frac{\partial \Psi}{r \partial \theta}$ , est le même sur les deux branches confondues. Donc, (b) subsiste seul.

Lorsqu'une houlé, rotationnelle ou non, se propageant à vitesse constante, atteint sa forme limite, la crête présente un point anguleux dont les côtés comportent entre eux un angle de  $120^\circ$ . Les deux branches de la ligne d'eau sont symétriques par rapport à la verticale (1).

De plus,  $\text{Cos } \theta_0 = 1/2$ , donc, avec le sens admis pour la propagation :

$$o_1 = +\frac{2}{3}\sqrt{g}.$$

### 3° DEUXIÈME APPROXIMATION.

La partie principale de  $\varepsilon$  près de l'origine est visiblement de la forme  $br^{1/2}$ . En égalant à zéro les coefficients des puissances minima de  $r$  subsistant dans  $\Psi$  et  $W^2$ , il vient alors :

pour  $\Psi$ , termes en  $r^2$  :

$$-\frac{3}{2}o_1b \text{Sin } \frac{3\theta_0}{2} - \frac{k}{2} + o_2 \text{Cos } 2(\theta_0 - \beta_2) = 0,$$

pour  $W^2$ , termes en  $r^{3/2}$  :

$$6o_1o_2 \text{Cos } \left(\frac{\theta_0}{2} - 2\beta_2\right) = -2gb \text{Sin } \theta_0.$$

Ces relations doivent être vérifiées sur les deux branches limites

$$\theta_1 = -\frac{\pi}{3}, \quad \theta_{II} = +\frac{\pi}{3},$$

la constante  $b$  prenant sur chacune d'elles des valeurs distinctes  $b_I$  et  $b_{II}$ .

En éliminant  $b$  entre les deux équations, on obtient :

$$4o_2 \text{Cos } \left(\frac{\theta_0}{2} - 2\beta_2\right) \text{Sin } \frac{3\theta_0}{2} - \text{Sin } \theta_0 [k - 2o_2 \text{Cos } 2(\theta_0 - \beta_2)] = 0$$

et les parties paire et impaire de cette relation doivent s'annuler séparément, puisque l'équation doit être vérifiée pour  $\theta_0 = \pm \frac{\pi}{3}$ . Il en résulte :

$$\beta_2 = 0 \quad \text{et} \quad o_2 = \frac{k}{3}.$$

(1) D'autres formes limites ne sont pas entièrement exclues, car, si  $\psi$  comportait une infinité d'exposants négatifs  $n$ , il se pourrait, à la rigueur, que les caractéristiques du mouvement restent finies à l'origine, point singulier essentiel.

Par ailleurs, dans la démonstration, on n'a pas retenu des valeurs imaginaires de  $n$ , car elles ne conduiraient pas, en surface, à des limites déterminées pour  $\theta$  lorsque  $r$  tend vers zéro.

En introduisant ces valeurs dans l'une des deux équations ci-avant et égalant successivement  $\theta_0$  à  $\theta_1$  et  $\theta_{11}$ ,

$$(166) \quad b_1 = -b_{11} = \frac{4k}{9\sigma_1} = \frac{2}{3} \frac{k}{\sqrt{g}}.$$

L'équation de la branche de droite de la ligne d'eau s'écrit, par exemple, en deuxième approximation :

$$(167) \quad \theta = \frac{\pi}{3} - \frac{2k}{3\sqrt{g}} r^{1/2},$$

et la partie principale de sa courbure vaut

$$(168) \quad \frac{d^2(\theta r)}{dr^2} = \frac{-k}{2\sqrt{g}} \times r^{-1/2}$$

aux environs de l'origine. La branche de gauche est symétrique.

Nous avons, dans l'exposé préliminaire, donné la définition suivante :

*Le rotationnel a le même sens que la propagation lorsqu'il s'effectue dans le sens de la rotation des particules sur leur orbite.*

Par exemple, dans notre cas, propagation dirigée de droite à gauche, les orbites sont décrites en sens inverse des aiguilles d'une montre, sens négatif de rotation pour la direction des axes  $x$  et  $y$ . Le rotationnel sera donc de même sens que la propagation, ou de sens inverse, selon qu'il sera négatif ou positif. Les résultats précédents peuvent alors se résumer comme suit, la crête mobile étant, rappelons le, choisie comme origine :

*Lorsqu'une houle rotationnelle ou non, en profondeur sensiblement constante ou illimitée, atteint sa forme limite :*

a. *La surface libre aux environs de la crête est, en seconde approximation, symétrique par rapport au plan vertical passant par la crête.*

b. *Les deux branches du profil de la surface libre se coupent en formant un angle de  $120^\circ$ .*

c. *Si le tourbillon aux environs de l'origine est de même sens que la propagation, c'est-à-dire, dans le cas présent, si  $k < 0$ , le profil limite se trouve, aux environs de l'origine, au-dessus des deux tangentes menées de l'origine. Il tourne sa concavité vers le haut, comme dans le cas de la figure 2. Les résultats inverses sont vrais si le tourbillon et la propagation sont de sens inverse ( $k > 0$ ). Les deux branches du profil limite sont alors situées au-dessous des tangentes limites et la concavité tournée vers le bas (fig. 3).*

d. *La courbure des deux branches limites en un point à distance donnée et proche de l'origine est proportionnelle à l'intensité tourbillonnaire  $k$  et change de signe avec elle. A l'origine même, la courbure est infinie et le rayon de courbure nul si  $k \neq 0$ . Si  $k$  est nul, (ondes irrotationnelles à l'origine), la courbure serait, au contraire, nulle à l'origine (fig. 1) [1].*

(1) Cette dernière propriété sera établie plus loin, p. 381.

La symétrie du mouvement n'est pas limitée à la surface libre. Dans le mouvement relatif défini par les axes mobiles choisis et aux environs de l'origine :

e. *La fonction de courant, en seconde approximation, est symétrique par rapport à la verticale passant par la crête ; il en est de même des trajectoires liquides.*

Nous avons déjà fait remarquer, dans l'EXPOSÉ PRÉLIMINAIRE, comment la variation de forme de la surface libre, en fonction du sens et de l'intensité tourbillonnaire, permet de prévoir des formes limites de la houle d'autant plus cambrées que la constante  $k$ , considérée avec son signe, augmente, loi que nous avons énoncée comme suit :

f. *Un rotationnel de sens opposé à la propagation est un facteur de stabilité pour la houle et vice-versa.*

#### 4° INFLUENCE DE L'APPROCHE DU FOND SUR LA SINGULARITÉ DE LA CRÊTE.

Si l'on admet qu'une lame, sur une plage de profondeur décroissante, persiste un temps appréciable dans sa forme limite, les résultats ci-dessus comportent une généralisation simple sinon entièrement rigoureuse.

La vitesse de propagation diminue lorsque la profondeur décroît ; donc, si on considère des axes mobiles liés invariablement à la crête, ils sont soumis à une accélération dirigée vers le large, en sens inverse de la propagation. Par rapport à ces axes, le mouvement, aux environs de la crête limite, apparaît comme sensiblement permanent. Le freinage des particules, commandant celui des axes mobiles, est dû, en réalité, à la variation progressive des conditions aux limites ; néanmoins, on obtiendra un effet équivalent en soumettant les particules à une force horizontale fictive dirigée en sens inverse de la propagation et proportionnelle à l'accélération  $j$  des axes. En résumé, tout se passe comme si les forces extérieures comprenaient, outre la pesanteur  $g$ , la force  $j$  et si chaque particule liquide de masse unité était soumise à leur résultante  $g'$  inclinée du côté du large (fig. 19).

En conséquence, les deux branches limites de la crête forment avec  $g'$  deux angles égaux à  $60^\circ$  et la crête anguleuse s'incline dans le sens de la propagation d'un angle  $\omega$  tel que  $Tg \omega = \frac{j}{g}$ , le versant rive de la lame étant le plus incliné.]

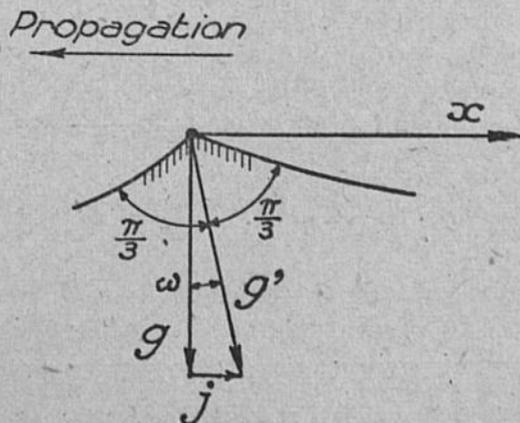


Fig. 19.

Pour le domaine de l'eau peu profonde — angle d'inclinaison du fond assez petit —, la vitesse des lames a été déterminée plus haut :

$$(144) \quad V' = V \sqrt{\frac{\alpha \pi s}{L}} = \sqrt{g \alpha s}$$

et l'accélération correspondante vaut :

$$\frac{dV'}{dt} = \frac{dV'}{ds} \frac{ds}{dt} = V' \frac{dV'}{ds} = \frac{g\alpha}{2} = j,$$

d'où,

$$(169) \quad \text{Tg } \omega = \frac{j}{g} = \frac{\alpha}{2} \frac{V'}{\omega}.$$

En eau peu profonde, l'angle d'inclinaison de la crête, sensiblement constant, est égal à la moitié de l'angle du fond (1).

En réalité, cet angle  $\omega$  croît peu à peu de zéro jusqu'à cette limite à partir de la zone assez profonde.

L'inclinaison des lames limites est donc faible sur fonds peu inclinés. Elle ne préjuge pas de l'obliquité que prendra la crête lorsque le déferlement sera nettement amorcé. Les calculs antérieurs sur l'inclinaison du point de rebroussement théorique font supposer que l'asymétrie de la crête déferlante augmente rapidement jusqu'à la formation de rouleaux de déferlement. Quoi qu'il en soit, au début du phénomène, les particules détachées de la crête s'écroutent toujours côté rive. On s'en rend compte comme suit :

Si l'on considère le mouvement relatif permanent et une crête sur le point d'atteindre sa forme limite, la vitesse d'écoulement de la nappe d'eau de surface, en direction opposée de la propagation, est presque nulle lorsque les molécules franchissent la crête. Cette vitesse devient exactement nulle lorsque la crête est anguleuse. Au delà, le déferlement commence et la nappe d'eau n'a plus la vitesse suffisante pour franchir la crête ; elle doit rebrousser chemin, donc s'écrouter côté rive. Dans le mouvement effectif, ceci implique, pour les particules déferlantes, une vitesse réelle supérieure à celle de la crête, donc à la vitesse de propagation.

## II. — Calcul approché des houles irrotationnelles limites en profondeur constante.

Pour calculer les caractéristiques des houles limites hors du domaine avoisinant la crête, il faut considérer davantage de termes dans le développement (164) de la fonction  $\Psi$ . Les calculs sont plus aisés si le mouvement est irrotationnel. On se bornera à cette hypothèse, à laquelle satisfont approximativement les houles courantes et qui permet l'obtention de résultats numériques complets.

### 1° DÉTERMINATION D'UNE INFINITÉ DE SOLUTIONS COMPORTANT, EN CRÊTE, LA SINGULARITÉ REQUISE.

Le mouvement relatif permanent étant irrotationnel possède un potentiel  $\Phi$  conjugué de la fonction de courant  $\Psi \equiv \psi$ . Il est plus simple de choisir comme

(1) On verra plus loin que la vitesse des crêtes limites est un peu supérieure à  $V'$  ; donc  $\omega$  est légèrement supérieur à  $\alpha/2$ . Néanmoins, la conclusion générale subsiste : la dissymétrie des lames limites reste faible.

variables indépendantes, au lieu des coordonnées rectangulaires  $x, y$  ou polaires  $r, \theta$ , le réseau de courbes orthogonales  $\varphi = \text{Const.}$  (lignes équipotentielles) et  $\psi = \text{Const.}$  (lignes de courant) [fig. 20].

Avec ces coordonnées, le profil de la surface libre est donné par la condition très simple  $\psi = 0$  et le problème se ramène à la seule détermination de la forme (160) de la fonction  $\psi$ .

Soit  $z = x + iy$  la fonction imaginaire de la nouvelle variable

$$f = \varphi + i\psi \quad (1).$$

La dérivée

$$(170) \quad w = \frac{df}{dz} = \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = -i \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = u - iv.$$

$u$  et  $v$  sont les composantes de la vitesse et  $w$ , comme  $z$ , est fonction de  $f$ .

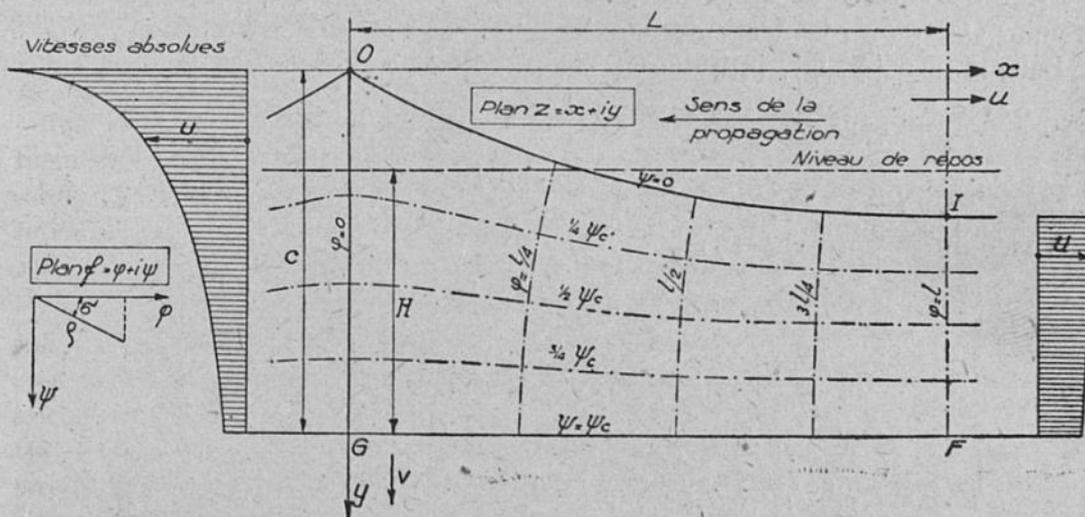


Fig. 20. — Forme de la houle limite calculée pour la longueur relative  $\lambda = \frac{2L}{H} = 4,50$ .

Répartition des vitesses absolues sur les verticales passant par la crête et le creux.

On posera, par extension des résultats précédemment acquis (voir valeur de  $\psi$ , formule (182) ci-après) :

$$(171) \quad w = 1: \frac{dz}{df} = q (-if)^{1/3} e^{\sum a_m (-if)^m},$$

la sommation s'étendant aux exposants  $m$ , pour l'instant indéterminés, mais positifs. Il en résulte :

$$(172) \quad dz = \frac{df}{w} = \frac{df}{q} (-if)^{-1/3} e^{-\sum a_m (-if)^m} = \frac{df}{q} (-if)^{-1/3} \sum_0 b_m (-if)^m,$$

d'où, en intégrant :

$$(173) \quad z = \int_0^f dz = \frac{i}{q} (-if)^{2/3} \sum_0 \frac{1}{2/3 + m} b_m (-if)^m.$$

(1)  $\varphi$  et  $\psi$  étant harmoniques conjuguées, l'expression  $f$  est une fonction de la variable imaginaire  $z$ ; inversement,  $z$  peut être considéré comme une fonction de  $f$ .

Le signe  $\sum_0$  indique une sommation pour laquelle le premier exposant  $m$  doit être choisi nul et  $b_0$  égal à l'unité. Les autres constantes  $b_m$  se déduisent des constantes  $a_m$  par l'équation de définition (172).

Le mouvement doit être symétrique par rapport à l'axe  $y$ , car c'est le cas pour les houles irrotationnelles d'amplitude finie en profondeur constante — solution de Struik — et, par conséquent, pour leur forme limite. Le mouvement défini par l'équation (171) possède cette propriété si les constantes  $m, a_m$  et  $q$  sont réelles, ce que nous admettrons.

Dans ce cas, à des valeurs égales et opposées de  $\varphi$  correspondent deux points du plan de figure symétriques par rapport à l'axe  $y$  et les trajectoires ou lignes de courant  $\psi = \text{Const.}$  sont symétriques par rapport à cet axe. Il suffira dorénavant de considérer la partie de l'ondulation comprise entre la crête  $O$  et le creux  $I(\varphi \geq 0)$ . L'axe  $IF$  du creux est également un axe de symétrie. Sur  $OG$  et  $IF$ , le point  $O$  excepté, les tangentes aux lignes de courant sont horizontales.

Dans le plan  $(\varphi, \psi)$ , introduisons les coordonnées polaires  $\rho$  et  $\sigma$ , c'est-à-dire posons  $f = \rho e^{i\sigma}$  et  $-if = \rho e^{i(\sigma - \frac{\pi}{2})}$  [fig. 20]. Soit, en outre :

$$(174) \quad \sum a_m (-if)^m = \tau - i\delta = \sum a_m \rho^m \text{Cos } m \left( \frac{\pi}{2} - \sigma \right) - i \sum a_m \rho^m \text{Sin } m \left( \frac{\pi}{2} - \sigma \right).$$

Il viendra — formule (171)

$$(175) \quad \left\{ \begin{array}{l} w = qf^{1/3} e^{\tau - i(\delta + \frac{\pi}{6})} \\ \quad = q\rho^{1/3} e^{\tau - i(\delta + \frac{\pi}{6} - \frac{\sigma}{3})}, \\ \text{donc,} \\ u = q\rho^{1/3} e^\tau \text{Cos} \left( \delta + \frac{\pi}{6} - \frac{\sigma}{3} \right), \quad v = q\rho^{1/3} e^\tau \text{Sin} \left( \delta + \frac{\pi}{6} - \frac{\sigma}{3} \right). \end{array} \right.$$

a. *Équation de surface.* Sur la ligne d'eau,  $\psi$  est nul, donc constant ; on peut alors dériver par rapport à  $\varphi$  l'équation de surface (162)

$$|w|^2 = w\bar{w} = u^2 + v^2 = 2gy.$$

$$\frac{d|w|^2}{d\varphi} = 2g \frac{dy}{d\varphi}; \text{ or } \frac{dz}{df} = \frac{1}{w} = \frac{\bar{w}}{|w|^2} = \frac{u + iv}{|w|^2} = \frac{dx + i dy}{d\varphi}$$

car, en surface,  $df \equiv d\varphi$ .

En égalant les parties imaginaires des deux derniers membres de cette équation  $\frac{dz}{df}$  et en introduisant la valeur trouvée de  $\frac{dy}{d\varphi}$ , il vient :

$$(176) \quad \frac{d|w|^2}{d\varphi} = 2g \frac{v}{|w|^2}.$$

En surface,  $\rho = \varphi$  et  $\sigma = 0$ , donc

$$|w|^2 = w\bar{w} = q^2 \rho^{2/3} e^{2\tau}$$

et

$$\frac{d|w|^2}{d\varphi} = q^2 \left( \frac{2}{3} \rho^{-1/3} e^{2\tau} + \rho^{2/3} 2 \frac{d\tau}{d\varphi} e^{2\tau} \right) = 2gq\rho^{1/3} \frac{e^\tau \text{Sin} \left( \delta + \frac{\pi}{6} \right)}{q^2 \rho^{2/3} e^{2\tau}}$$

d'après les équations (175) et (176).

L'équation de surface, c'est-à-dire la condition de pression constante est, en résumé, équivalente à la relation

$$(177) \quad \sin\left(\vartheta + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{q^3 e^{3\tau}}{3g} \left(1 + 3\rho \frac{d\tau}{d\rho}\right) = \frac{q^3}{3g} \frac{d(\rho e^{3\tau})}{d\rho}.$$

b. Détermination des constantes.

À l'origine,  $\rho = \varphi = \vartheta = \tau = 0$  et, d'après l'équation (177) :

$$(178) \quad \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} = \frac{q^3}{3g}, \text{ d'où } q = \sqrt[3]{\frac{3g}{2}}.$$

Pour les valeurs (174) de  $\tau$  et  $\vartheta$  en surface, on vérifiera, *a posteriori*, la succession suivante des premières constantes  $m$  :

$$\vartheta = a_1 \rho^m \sin m \frac{\pi}{2} + a_2 \rho^{2m} \sin 2m \frac{\pi}{2} + a_3 \rho^{3m} \sin 3m \frac{\pi}{2} + a_4 \rho^{m_2} \sin m_2 \times \frac{\pi}{2} + \dots$$

$$\tau = a_1 \rho^m \cos m \frac{\pi}{2} + a_2 \rho^{2m} \cos 2m \frac{\pi}{2} + a_3 \rho^{3m} \cos 3m \frac{\pi}{2} + a_4 \rho^{m_2} \cos m_2 \times \frac{\pi}{2} + \dots$$

d'où,

$$\begin{aligned} e^{3\tau} &= 1 + 3\tau + \frac{9\tau^2}{2} + \frac{9\tau^3}{2} + \dots = 1 + 3a_1 \rho^m \cos m \frac{\pi}{2} \\ &\quad + \rho^{2m} \left( 3a_2 \cos 2m \frac{\pi}{2} + \frac{9}{2} a_1^2 \cos^2 m \frac{\pi}{2} \right) \\ &\quad + \rho^{3m} \left( 3a_3 \cos 3m \frac{\pi}{2} + 9a_1 a_2 \cos m \frac{\pi}{2} \cos 2m \frac{\pi}{2} + \frac{9}{2} a_1^3 \cos^3 m \frac{\pi}{2} \right) \\ &\quad + 3a_4 \rho^{m_2} \cos m_2 \times \frac{\pi}{2} + \dots \end{aligned}$$

et, d'après l'équation (177), en développant

$$\sin\left(\vartheta + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \vartheta + \frac{1}{2} \cos \vartheta$$

selon les puissances de  $\rho$  :

$$(179) \quad \left\{ \begin{aligned} &2 \sin\left(\vartheta + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{d(\rho e^{3\tau})}{d\rho} = 0 = \rho^m a_1 \sqrt{3} \left[ \sin m \frac{\pi}{2} - \sqrt{3} (m+1) \cos m \frac{\pi}{2} \right] \\ &\quad + \rho^{2m} \left\{ a_2 \sqrt{3} \left[ \sin 2m \frac{\pi}{2} - \sqrt{3} (2m+1) \cos 2m \frac{\pi}{2} \right] - a_1^2 \left[ \frac{1}{2} \sin^2 m \frac{\pi}{2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{9}{2} (2m+1) \cos^2 m \frac{\pi}{2} \right] \right\} + \rho^{3m} \left\{ a_3 \sqrt{3} \left[ \sin 3m \frac{\pi}{2} - \sqrt{3} (3m+1) \cos 3m \frac{\pi}{2} \right] \right. \\ &\quad \left. - a_1 a_2 \left[ \sin m \frac{\pi}{2} \sin 2m \frac{\pi}{2} + 9 (3m+1) \cos m \frac{\pi}{2} \cos 2m \frac{\pi}{2} \right] - a_1^3 \left[ \frac{\sqrt{3}}{6} \sin^3 m \frac{\pi}{2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{9}{2} (3m+1) \cos^3 m \frac{\pi}{2} \right] \right\} \\ &\quad + \rho^{m_2} a_4 \sqrt{3} \left[ \sin m_2 \times \frac{\pi}{2} - \sqrt{3} (m_2+1) \cos m_2 \times \frac{\pi}{2} \right] + \dots \end{aligned} \right.$$

Cette expression étant identiquement nulle, les coefficients de chaque puissance de  $\rho$  sont séparément nuls et permettent de calculer une partie des constantes jusqu'alors indéterminées, en particulier les exposants  $m$ ,  $m_2$ , etc.

Coefficient de  $\rho^m$  : Il sera nul, quelle que soit la constante  $a_1$ , pourvu que

$$(180) \quad \sin m \frac{\pi}{2} - \sqrt{3} (m+1) \cos m \frac{\pi}{2} = 0.$$

Cette équation comporte, entre autres, l'infinité de racines incommensurables positives adaptée à notre objet :

$$\begin{aligned} m &= m_1 \cong 0,80 \\ m_2 &\cong 2,90 = 3,62 m, \text{ etc...} \\ m_K &\cong 2K - 1, \text{ pour } K \text{ entier, assez grand.} \end{aligned}$$

A chacune de ces racines positives correspond un terme  $a_m (-i)^m$  dans l'expression (171), dont le coefficient  $a_m$  reste arbitraire. Il y a donc une infinité de solutions distinctes au problème cherché qui procèdent selon des développements de puissances transcendantes de la variable  $\rho$ .

Coefficients des autres puissances de  $\rho$  : La valeur la plus générale de l'exposant de  $\rho$  s'écrit  $M = n_1 \times m_1 + n_2 \times m_2 + \dots + n_K \times m_K$ , où  $n_1, n_2, \dots$  sont des entiers positifs ou nuls.

Seuls des exposants de cette forme, à ranger par ordre de grandeur croissant, peuvent se reproduire par la multiplication de séries procédant selon ces puissances. On justifie ainsi l'ordre des 4 premiers exposants choisis,  $m, 2m, 3m, m_2$ , puisque  $m_2$  est compris entre  $3m$  et  $4m$ .

Le coefficient de  $\rho^M$ , égalé à zéro, détermine de façon unique, par une équation du premier degré, la valeur de la constante  $a_M$  en fonction des précédentes, tant que le facteur de  $a_M$ , soit

$$(181) \quad \sqrt{3} \left[ \sin M \frac{\pi}{2} - \sqrt{3} (M+1) \cos M \frac{\pi}{2} \right],$$

est différent de zéro. Il en est probablement toujours ainsi mais cette vérification et celle de la convergence des séries obtenues sont inutiles pour notre but. En arrêtant arbitrairement le développement (171) à un terme de rang déterminé, on obtient, en tout état de cause, la représentation d'un mouvement permanent. Il suffira, pour notre objet, que les conditions aux limites de ce mouvement soient suffisamment proches de celles de la houle limite en profondeur constante. On obtiendra effectivement ce résultat en arrêtant les séries aux termes contenant la constante arbitraire  $a_4$ . Les constantes  $a_2$  et  $a_3$  se déterminent alors sans ambiguïté, en fonction de  $a_1$ , en égalant à zéro les coefficients de  $\rho^{2m}$  et  $\rho^{3m}$  dans l'identité (179).

$$a_2 = 0,211 a_1^2 \quad \text{et} \quad a_3 = -0,111 a_1^3.$$

Quant aux constantes  $b_m$ , on les calcule aisément d'après leur équation de définition (172) :

$$\begin{aligned} b_1 &= -a_1, \quad b_2 = -a_2 + \frac{a_1^2}{2} = 0,289 a_1^2 = 0,289 b_1^2 \\ b_3 &= -a_3 + a_1 a_2 - \frac{a_1^3}{6} = 0,155 a_1^3 = -0,155 b_1^3, \quad b_4 = -a_4, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Au lieu de  $a_1$  et  $a_4$ , on peut considérer  $b_1$  et  $b_4$  comme arbitraires.

Remarque. — Les diverses solutions trouvées ne se combinent pas linéairement.  
c. Toutes les solutions envisagées comportent, à l'origine, la singularité de la crête limite.

En effet, en élevant à la puissance  $3/2$  l'égalité (173), il vient :

$$\left(\frac{2gz}{3i}\right)^{3/2} = o_1 (-iz)^{3/2} = (-if) \left[1 + \frac{1}{2/3+m} b_1 (-if)^m + \dots\right],$$

d'où, par inversion,

$$(-if) = o_1 (-iz)^{3/2} - \frac{b_1 \times o_1^{m+1}}{2/3+m} (-iz)^{3/2(m+1)} + \dots$$

La partie réelle de cette quantité représente la fonction de courant :

$$(182) \quad \psi = o_1 \left[ r^{3/2} \cos \frac{3\theta}{2} + b' r^{3/2(m+1)} \cos \frac{3}{2}(m+1)\theta + \dots \right];$$

$b'$  est une nouvelle constante, arbitraire au même titre que  $b_1$ .

Cette forme de  $\psi$ , généralisation de la formule (164) (pour  $k=0$ ), montre que toutes les solutions trouvées comportent une crête anguleuse de  $120^\circ$  à l'origine, car, dans les deux expressions, le terme principal en  $r^{3/2}$  est identique.

Quant à l'équation de la surface libre  $\psi = 0$ , elle s'écrit, pour la branche de droite par exemple, en développant, d'après l'expression (182),  $\theta$  en fonction de  $r$  :

$$\theta = \frac{\pi}{3} + \frac{2b'}{3} r^{\frac{3m}{2}} \cos \frac{\pi}{2}(m+1) + \dots$$

$\frac{3m}{2} \approx 1,20$  étant supérieur à l'unité, la courbure de chacune des deux branches limites de la ligne d'eau est nulle à l'origine pour une houle irrotationnelle, quelle que soit la solution envisagée, c'est-à-dire les valeurs des constantes  $b'$ ,  $b_1$ , etc. On avait énoncé précédemment cette propriété.

## 2° CONDITIONS AUX LIMITES POUR UNE HOULE EN PROFONDEUR CONSTANTE.

Une houle limite est déterminée dès que sa longueur  $2L$  et la profondeur au repos  $H$  sont fixées. Si ces deux données sont amplifiées dans un certain rapport, il existe une houle limite homothétique dont les vitesses croissent comme la racine carrée du même rapport<sup>(1)</sup>. Cette propriété permet de ramener à une simple infinité l'ensemble des houles limites réellement distinctes, le paramètre variable étant la longueur relative  $\lambda = 2L/H$ .

Le groupe de solutions déterminé au paragraphe précédent se rapporte à des mouvements permanents et irrotationnels d'un fluide incompressible. À l'approximation retenue, le profil de la surface libre est représenté par une ligne de courant et la pression  $y$  est constante. De plus, toutes ces solutions comportent à l'origine la singularité de la crête limite et sont symétriques par rapport à l'axe  $y$ ; pour qu'elles représentent des houles périodiques limites en profondeur constante, il est nécessaire et suffisant que les deux conditions supplémentaires suivantes soient vérifiées (fig. 20).

a. Sur la verticale passant par un creux — point de la ligne d'eau à tangente horizontale —, la composante verticale de la vitesse doit être nulle. Cette verticale doit donc être une ligne équipotentielle.

b. Le fond horizontal doit constituer une ligne de courant.

Nous nous contenterons de vérifier qu'en disposant convenablement des deux premières constantes arbitraires  $a_1$  et  $a_4$  (ou  $b_1$  et  $b_4$ ), on peut satisfaire, avec une approximation suffisante, à ces deux conditions.

<sup>(1)</sup> C'est l'énoncé, pour ce cas particulier, de la loi de Reech-Froude.

## 3° MÉTHODE APPROCHÉE DE CALCUL DES HOULES LIMITES EN PROFONDEUR CONSTANTE.

On considère la profondeur  $H$  comme assez faible vis-à-vis de la longueur d'onde ; c'est le cas le plus intéressant pour les applications. On se donne la longueur  $2L$  de la houle et, à titre provisoire, la profondeur d'eau  $c$  en crête ; on calculera plus loin la profondeur au repos correspondante  $H$ . Il s'agit de déterminer, outre les deux inconnues  $b_1$  et  $b_4$ , les valeurs constantes  $l$  du potentiel sur la verticale du creux et  $\psi_c$  de la ligne de courant du fond. Les quatre équations de condition seront choisies comme suit :

a. La composante verticale de la vitesse est nulle au creux ; c'est sa définition même.

Autrement dit :  $\frac{dz}{df} = \frac{1}{w} = \frac{u+iv}{|w|^2}$  est réel au point I. La partie imaginaire de l'expression (172) est donc nulle pour  $-if = -il$  et  $\sigma = 0$ , soit :

$$(183) \quad \frac{1}{q} \sum_0 b_m l^{-1/3+m} \operatorname{Sin} \frac{\pi}{2} (m - 1/3) = 0.$$

b. La demi-longueur de la houle est égale à  $L$ , c'est-à-dire, la partie réelle de  $z$  au point I vaut  $L$ , soit, d'après l'équation (173) :

$$(184) \quad L = \frac{1}{q} \sum_0 \frac{1}{2/3+m} b_m l^{2/3+m} \operatorname{Sin} \frac{\pi}{2} (m + 2/3).$$

c. La profondeur d'eau à la crête est égale à  $c$ , autrement dit, au point G, pour  $-if = \psi_c$ ,

$$(185) \quad c = \frac{z}{i} = \frac{1}{q} \sum_0 \frac{1}{2/3+m} b_m \psi_c^{2/3+m}.$$

d. La ligne de courant délimitant le fond passe, au droit du creux, à la profondeur  $c$  au-dessous de la crête.

Cette ligne de courant ne pourra donc différer notablement d'une ligne horizontale, puisque, d'une part, sa tangente est horizontale au point G par raison de symétrie et, d'autre part, elle reprend la même cote au point F. L'indice I indiquant la valeur des fonctions au point de même dénomination, on a, d'après la formule de Taylor, sur la verticale IF :

$$(186) \quad \left\{ \begin{aligned} z &= z_1 + (f-f_1) \left( \frac{dz}{df} \right)_1 + \frac{(f-f_1)^2}{2} \left( \frac{d^2z}{df^2} \right)_1 + \dots = z_1 + \psi i \left( \frac{dz}{df} \right)_1 - \frac{\Psi^2}{2} \left( \frac{d^2z}{df^2} \right)_1 \\ &\quad - \psi^3 \frac{i}{6} \left( \frac{d^3z}{df^3} \right)_1 + \dots, \end{aligned} \right.$$

car  $f_1 = l$  et  $f = l + i\psi$ .

Si le point  $z$  se confond avec F, il faut, pour  $\psi = \psi_c$ ,  $z = L + ic$  ; par conséquent, la partie imaginaire de  $z$  doit être égale à  $c$  ; celle de  $z_1$  vaut, en vertu de l'équation (173) :

$$(187) \quad 2h = \frac{1}{q} \sum_0 \frac{1}{2/3+m} b_m l^{2/3+m} \operatorname{Cos} \frac{\pi}{2} (m + 2/3),$$

$2h$  étant l'amplitude de la houle limite.

En tenant compte de l'équation  $v = 0$  au point I, on trouve ainsi, tous calculs faits :

$$(188) \quad c = 2h + \frac{1}{u_1} \left\{ \psi_c - \frac{\psi_c^2}{2} \left( \frac{d\delta}{d\varphi} \right)_1 + \frac{\psi_c^3}{6} \left[ \frac{g}{u_1^3} \left( \frac{d\delta}{d\varphi} \right)_1 + \left( \frac{d\delta}{d\varphi} \right)_1^2 \right] \right\}$$

comme dernière équation de condition arrêtée au terme en  $\psi_c^3$ . Selon les équations (172) et (174) :

$$(189) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{u_1} = \frac{1}{q} \sum_0 b_m l^{-1/3+m} \cos \frac{\pi}{2} (m - 1/3), \\ \left( \frac{d\delta}{d\varphi} \right)_1 = \sum m a_m l^{m-1} \sin \frac{\pi}{2} m. \end{array} \right.$$

Pour simplifier les calculs, il est indiqué, non pas de partir des valeurs L et c, mais de disposer du rapport d'homothétie en faisant  $l = 1$ . On donne ensuite une certaine valeur numérique à la constante  $b_1$ , ce qui correspond à une longueur relative  $\lambda$  déterminée. La condition (183) fournit alors  $b_4$  par une équation linéaire, puis, en égalant les deux expressions de c, (185) et (188), on obtient, pour  $\psi_c$ , une équation qui permet son calcul approché. Les trois équations (184), (185) et (187) déterminent ensuite L, c et  $2h$ .

En introduisant les valeurs numériques retenues de m,  $a_m$  et  $b_m$ , les équations de condition et valeurs annexes s'écrivent comme suit :

$$(183)' \quad 0 = \frac{1}{q} \left( \frac{1}{2} l^{-1/3} - 0,670 l^{-1/3+m} b_1 - 0,263 l^{-1/3+2m} b_1^2 - 0,016 l^{-1/3+3m} b_1^3 \right. \\ \left. + 0,776 l^{-1/3+m_2} b_4 \right),$$

$$(184)' \quad L = \frac{1}{q} \left( 1,299 l^{2/3} + 0,502 l^{2/3+m} b_1 - 0,052 l^{2/3+2m} b_1^2 + 0,050 l^{2/3+3m} b_1^3 \right. \\ \left. - 0,177 l^{2/3+m_2} b_4 \right),$$

$$(185)' \quad c = \frac{1}{q} \left( \frac{3}{2} \psi_c^{2/3} + 0,682 \psi_c^{2/3+m} b_1 + 0,127 \psi_c^{2/3+2m} b_1^2 - 0,051 \psi_c^{2/3+3m} b_1^3 \right. \\ \left. + 0,280 \psi_c^{2/3+m_2} b_4 \right),$$

$$(187)' \quad 2h = \frac{1}{q} \left( \frac{3}{4} l^{2/3} - 0,458 l^{2/3+m} b_1 - 0,116 l^{2/3+2m} b_1^2 - 0,005 l^{2/3+3m} b_1^3 \right. \\ \left. + 0,217 l^{2/3+m_2} b_4 \right),$$

$$(189)' \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{u_1} = \frac{1}{q} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} l^{-1/3} + 0,739 l^{-1/3+m} b_1 - 0,118 l^{-1/3+2m} b_1^2 + 0,154 l^{-1/3+3m} b_1^3 \right. \\ \quad \left. - 0,631 l^{-1/3+m_2} b_4 \right), \\ \left( \frac{d\delta}{d\varphi} \right)_1 = -0,763 l^{m-1} b_1 + 0,196 l^{2m-1} b_1^2 - 0,158 l^{3m-1} b_1^3 + 2,87 l^{m_2-1} b_4, \end{array} \right.$$

où

$$q = \sqrt[3]{\frac{3g}{2}} = 2,45, \quad m = 0,80 \quad \text{et} \quad m_2 = 2,90.$$

## 4° DÉTERMINATION DES CARACTÉRISTIQUES PRINCIPALES DES HOULES LIMITES.

a. *Cambrure*  $\frac{h}{L}$ . — Elle ressort directement des calculs précédents.

b. *Profondeur d'eau au repos*  $H$  et *longueur relative*  $\lambda$ .

Les volumes étant respectés lors du mouvement, le profil de l'eau au repos et celui de l'onde limite ont même surface (fig. 21).

$$HL = \text{surface (OGFI)} = \text{rectangle OGFO}' - \text{triangle OIO}' - \text{segment } S \\ = cL - hL - S.$$

$\bar{z}$  étant le conjugué de  $z$ ,

$$(190) \quad S = \int_0^l \frac{r^2 d\theta}{2} = - \int_0^l \text{partie imag. de } \left( \frac{\bar{z} dz}{2} \right) \\ = \frac{3}{4q^2} \left\{ 0,244 l^{4/3+m} b_1 + 0,041 l^{4/3+2m} b_1^2 + 0,031 l^{4/3+3m} b_1^3 - 0,190 l^{4/3+m} b_4 \right\},$$

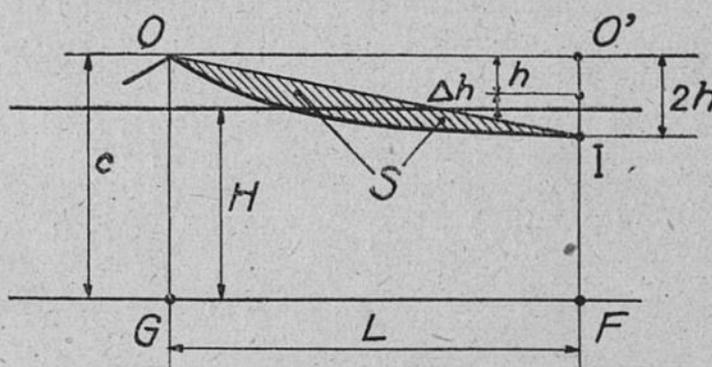


Fig. 21.

$$(191) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{d'où, } H = c - h - \frac{S}{L} \\ \text{et la longueur relative } \lambda = \frac{2L}{H}. \end{array} \right.$$

c. *Surélévation*  $\Delta h$  du niveau moyen (fig. 21).

$$(192) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta h = (c - H) - h = \left( h + \frac{S}{L} \right) - h = \frac{S}{L} \\ \text{et la surélévation relative } \frac{\Delta h}{h} = \frac{S}{Lh}. \end{array} \right.$$

d. *Vitesse apparente de propagation*  $V_a$  de la houle limite (fig. 22).

On a appelé  $V_a$  la vitesse directement observable de la crête de la houle et, plus précisément, dans le cas où il n'y a pas de déplacement d'ensemble de la masse liquide.

Appliquons le théorème de la projection horizontale des quantités de mouvement aux particules d'eau occupant, à l'instant considéré, l'emplacement E de l'onde F'IOIE. Les seules forces extérieures horizontales, les pressions agissant aux deux extrémités, s'équilibrent, le mouvement étant périodique. Le centre de gravité du système se déplace donc à vitesse constante et cette vitesse est nulle, ainsi que la

somme des projections horizontales des quantités de mouvement, puisqu'il n'y a pas de déplacement d'ensemble. Les composantes, parallèles à  $x$ , des vitesses absolues sont égales à  $(u - V_a)$  et, comme  $\psi$  est nul en surface, il vient :

$$0 = \iint_k (u - V_a) \rho_e dx dy = \rho_e \iint \frac{\partial \psi}{\partial y} dy dx - V_a \times \rho_e \iint dx dy = \rho_e \psi_c \times 2L - V_a \times \rho_e \times 2HL :$$

d'où

$$(193) \quad V_a = \frac{\psi_c}{H} \quad (1)$$

e. *Vitesses effectives de propagation.*

Les particules étant soumises à un courant d'entraînement variable avec la profondeur, la vitesse effective de propagation, relative aux particules situées

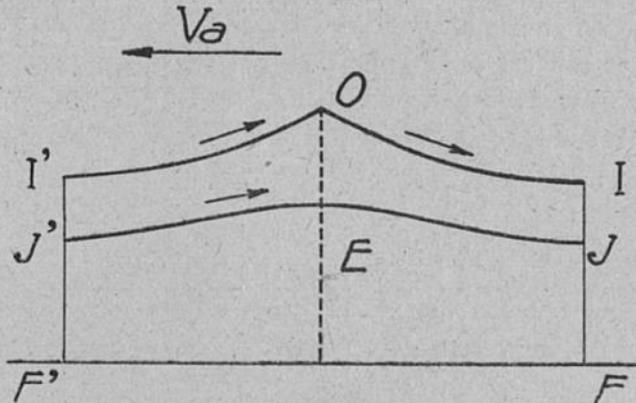


Fig. 22.

sur une certaine ligne de courant, varie avec la ligne de courant envisagée. Sur l'une d'elles,  $df = d\phi$  est réel, donc

$$dz = \frac{df}{w} = d\phi \times \frac{\bar{w}}{|w|^2}$$

et, en prenant les parties réelles,  $dx = \frac{ud\phi}{|w|^2}$ .

D'autre part,  $u = \frac{dx}{dt}$  et  $dt = \frac{dx}{u} = \frac{d\phi}{|w|^2}$ .

Le temps  $2T$  nécessaire pour qu'une particule déterminée partant de la ligne de creux I'F' recoupe la ligne IF après un cycle ondulatoire complet vaut

$$2T = \int_{J'}^J \frac{d\phi}{|w|^2} = 2 \int_0^l \frac{d\phi}{|w|^2},$$

l'intégrale étant prise le long de la ligne  $\psi = \text{Const.}$  choisie.

La vitesse effective de propagation  $V_e$ , pour toutes les particules se disposant durant le mouvement sur une certaine ligne de courant J'J, est donc donnée par

$$(194) \quad V_e = \frac{2L}{2T} = L : \int_0^l \frac{d\phi}{|w|^2}.$$

Le calcul de l'intégrale et de sa dérivée par rapport à  $\psi$  est malaisé, sauf en surface et sur le fond.

(1) Nous désignons, dans ce chapitre, la densité de l'eau par  $\rho_e$ , pour la différencier de la coordonnée polaire  $\rho$ .

Vitesse effective de propagation en surface  $V_s = \frac{L}{T_s}$ . Dans ce cas,  $-if = -ip$  et

$$T_s = \int_0^l \frac{d\rho}{|w|^2} = \frac{3}{q^2} \left[ l^{1/3} - \frac{2a_1 l^{1/3+m}}{3(1/3+m)} \cos m \frac{\pi}{2} + \dots \right]$$

$$\approx \frac{3}{q^2} [l^{1/3} + 0,180 l^{1/3+m} b_1 + 0,092 l^{1/3+2m} b_1^2 + 0,054 l^{1/3+3m} b_1^3 - 0,030 l^{1/3+m_2} b_4].$$

Vitesse effective de propagation sur le fond  $V_F = \frac{L}{T_F}$ .

On peut alors écrire :

$$\int_{F'}^F \frac{d\varphi}{|w|^2} = \int_{F'}^F \frac{df}{w^2},$$

car, sur une ligne de courant,  $df = d\varphi$  et, sur le fond,  $w^2 = |w|^2 = u^2$  est réel.

La nouvelle intégrale est celle d'une fonction analytique et le chemin d'intégration peut être déformé de la ligne de fond au tracé  $F'I'OIF$  (fig. 22). Les quotes-parts de l'intégrale sur les parties verticales  $F'I'$  et  $IF$  égales, mais parcourues en sens opposé, s'annulent.

Il reste donc :

$$T_F = \frac{1}{2} \int_{F'OI} \frac{df}{w^2} = \int_0^l \text{partie réelle de } \frac{df}{w^2}$$

$$\approx \frac{3}{q^2} \left[ \frac{1}{2} l^{1/3} + 0,578 l^{1/3+m} b_1 + 0,030 l^{1/3+2m} b_1^2 - 0,030 l^{1/3+3m} b_1^3 - 0,193 l^{1/3+m_2} b_4 \right].$$

Selon la première formule (175), on a, en surface, pour  $\sigma = 0$  et  $df = d\varphi = d\rho$

$$\frac{df}{w^2} = \frac{d\varphi}{|w|^2} e^{2i\left(\vartheta + \frac{\pi}{6}\right)}.$$

La partie réelle de cette expression, soit  $\frac{d\rho}{|w|^2} \cos 2\left(\vartheta + \frac{\pi}{6}\right)$ , est plus petite que  $\frac{d\rho}{|w|^2}$ , donc,  $T_F < T_s$  et  $V_F > V_s$ .

La vitesse effective de propagation est plus petite en surface qu'au fond (où elle est d'ailleurs maximum).

On vérifiera également, par le calcul direct, les inégalités  $V_s < V_a < V_F$ .

Ainsi, le courant d'entraînement des particules ( $V_e - V_a$ ), différence entre les vitesses effective et apparente de propagation, agit dans le sens de la propagation pour la zone supérieure du liquide et en sens opposé pour la zone profonde. Cette distribution des courants d'entraînement est donc analogue mais non identique à celle de la figure 5 obtenue pour les houles irrotationnelles de petite amplitude, car la tangente à la courbe représentative des courants est non seulement verticale au niveau du fond, mais également horizontale en surface. Le courant d'entraînement diminue donc très vite avec la profondeur.

f. Répartition, dans l'onde limite, des vitesses relatives et absolues des particules.

Les composantes horizontales des vitesses relatives étant calculées au moyen des équations (171) ou (172), il suffira d'en soustraire la vitesse  $V_a$  de déplacement des axes pour obtenir les composantes horizontales des vitesses absolues des particules. Quant aux composantes verticales des vitesses, calculées au moyen des

mêmes équations, elles valent indistinctement pour les mouvements relatif et réel. Par raison de symétrie, les maxima et minima de ces différentes vitesses se produisent au droit des crêtes et des creux.

*Répartition des vitesses sur la verticale passant par la crête.*

Sur cette verticale,  $-if = \psi$ , et la composante verticale des vitesses est nulle. L'équation (172) des vitesses relatives s'écrit alors :

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{u} = \frac{1}{q} \psi^{-1/3} \sum_0 b_m \psi^m.$$

Cette formule, pour  $\psi = \psi_c$ , donne la vitesse  $u_c$  sur le fond. En surface,  $\psi = 0$ , donc  $u_0 = 0$ . Près de la crête, la partie principale de  $w$  est  $q(-if)^{1/3}$  et sa dérivée, prise par rapport à  $z$ ,

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{df} \frac{df}{dz} = w \frac{dw}{df} \frac{1}{\psi} = -\frac{iq^2}{3} (-if)^{-1/3}.$$

En particulier, sur l'axe  $y$ ,  $w = u$ ,  $dz = idy$  et  $-if = \psi$ , donc

$$\frac{du}{dy} = \frac{q^2}{3} \psi^{-1/3}.$$

Cette valeur est infinie à l'origine. En portant sur un graphique les valeurs de  $u$  normalement à l'axe  $y$ , la tangente à la courbe représentative des vitesses est horizontale à l'origine. En soustrayant des valeurs trouvées la vitesse de déplacement  $V_a$ , le graphique des vitesses absolues prend la forme reproduite dans la figure 20, établie pour la longueur relative  $\lambda = \frac{2L}{H} = 4,50$ .

*Répartition des vitesses sur la verticale passant par le creux.*

Sur cette verticale également, les composantes verticales des vitesses sont nulles. Au point I, la valeur de la vitesse horizontale relative a été calculée (1<sup>re</sup> formule 189). Pour les autres points de cette verticale, on obtient en dérivant l'expression (186) :

$$(195) \quad \frac{dz}{df} = \frac{1}{w} = \frac{u+iv}{|w|^2} = \left(\frac{dz}{df}\right)_1 + i\psi \left(\frac{d^2z}{df^2}\right)_1 - \frac{\psi^2}{2} \left(\frac{d^3z}{df^3}\right)_1 + \dots$$

En remplaçant les dérivées au point I par leurs valeurs et prenant les parties réelles,

$$(196) \quad \frac{1}{u} \frac{1}{u_1} \left\{ 1 - \psi \left(\frac{d\delta}{d\phi}\right)_1 + \frac{\psi^2}{2} \left[ \frac{g}{u_1^2} \left(\frac{d\delta}{d\phi}\right)_1 + \left(\frac{d\delta}{d\phi}\right)_1^2 \right] \right\}.$$

g. *Approximation réalisée.*

Le mouvement défini par les équations précédentes satisfait aux conditions aux limites de façon approchée, par suite de l'arrêt des séries aux termes en  $b_n$ . Ces développements (172 et 173) étant effectués à partir de l'origine O, les écarts, faibles sur la verticale passant par la crête, seront maxima sur celle passant par le creux. On peut vérifier, comme suit, les approximations réalisées sur cette dernière verticale IF.

En surface, on connaît la vitesse relative exacte au creux,  $u_c = 2\sqrt{gh}$ . Cette valeur, tirée de l'équation (162), sera comparée à la vitesse approximative  $u_1$  (équation 189).

D'autre part, sur IF, la vitesse doit être, en réalité, horizontale; or, l'équation

(195) donne, en en considérant les parties imaginaires et se limitant aux termes du deuxième ordre en  $\psi$  :

$$v' = \frac{-\psi^2}{2} \left( u \frac{d^2 \partial}{d\varphi^2} \right)_1 \neq 0 \text{ en général.}$$

L'écart  $v'_r$  sera maximum sur le fond, pour  $\psi = \psi_c$ , et l'inclinaison résiduelle de la ligne de courant se calculera par  $\frac{v'_r}{u_r}$ .

En résumé, on prendra comme critères de l'exactitude de la méthode les écarts suivants mesurés en  $\%$  sur la verticale du creux.

En surface  $\frac{u_c - u_1}{u_1}$ , au fond  $\frac{v'_r}{u_r}$ .

##### 5° VALEURS NUMÉRIQUES DES PRINCIPALES CARACTÉRISTIQUES DES HOULES LIMITES EN FONCTION DE LEUR LONGUEUR RELATIVE $\lambda$ ET COMPARAISON AVEC L'OBSERVATION.

Il est indiqué, pour préciser les caractéristiques du mouvement, de déterminer des valeurs relatives, c'est-à-dire des nombres purs, uniquement fonctions de la longueur relative  $\lambda = \frac{2L}{H}$  correspondant au choix de  $b_1$ .

On obtient ainsi : la profondeur au repos rapportée à la demi-amplitude limite, soit  $\frac{H}{h}$ , la cambrure limite  $\gamma = \frac{h}{L}$  et la surélévation relative du niveau moyen  $\frac{\Delta h}{h}$ .

Les différentes vitesses seront également des nombres purs si on les compare à une vitesse type. Pour cette dernière, on adoptera la vitesse de propagation des ondes de faible amplitude en profondeur constante.

$$(34) \quad V_1 = \sqrt{\frac{gL}{\pi} \operatorname{Th} \pi \frac{H}{L}}.$$

Il en sera de même pour les pressions données par l'équation (161) avec  $C = 0$ , si on les divise par  $\rho_0 g H$ , c'est-à-dire les compare aux pressions de repos mesurées à une échelle telle qu'elles soient égales à l'unité sur le fond.

La méthode exposée donne des résultats d'une précision satisfaisante dans le domaine  $2,78 \leq \lambda \leq 9,20$  et, par extrapolation,  $2,5 \leq \gamma \leq 10$  qui couvre les besoins courants. (Voir le tableau VIII qui indique, en particulier, les écarts maxima et le tableau IX).

Pour  $\lambda < 2,78$ , l'équation de condition pour  $\psi_c$  n'a plus de racine convenable, ce à quoi il fallait s'attendre, car cette équation suppose une profondeur assez faible pour assurer la validité du développement de Taylor limité au terme en  $\psi^3$ . Cependant, pour ces valeurs de  $\lambda$ , la houle limite est déjà très voisine de celle en profondeur illimitée (solution connue de Stokes) et un perfectionnement de la méthode, aisé à réaliser, s'avère inutile.

Pour  $\lambda > 9,20$ , les écarts maxima sur la ligne de creux atteignent près de 20 %, ce qui est peu satisfaisant, mais seraient nettement inférieurs, en général, en particulier sur la ligne de crête qui fournit les caractéristiques essentielles du mouvement. Ici, également, un perfectionnement de la méthode semble inutile, les houles plus longues n'apparaissant guère dans les applications courantes.

Les calculs numériques permettent de dégager les lois suivantes :

a. La cambrure limite  $\gamma$  de la houle varie de 0,135 à 0,087 lorsque la longueur

LONGUEUR RELATIVE de la houle $\lambda = \frac{2L}{H}$	CONSTANTE $b_1$	CONSTANTE $b_2$	$\psi_c$	CAMBRURE LIMITE.		PROFON- DEUR RAPPORTÉE à la demi- amplitude limite $H : h$ .	SURELEVATION RELATIVE DU NIVEAU MOYEN $\frac{\Delta h}{h}$ .		ÉCARTS MAXIMA EN %.				
				VALEUR calculée. $\gamma = \frac{h}{L}$ .	VALEUR approchée $0,140 Th \frac{\pi H}{L}$ .		Calcul direct de la houle limite.	Calcul au moyen des variables de Lagrange. Deuxième approximation formule (53).	Valeur courante formule (54).	$\frac{u_c - u_1}{u_1}$	$\frac{v_f}{u_f}$		
2.78	0.60	0	0.70	0.135	0.137	5.34	0.37	0.232	0.216	—	1.6	—	2.5
4.50	0.70	0.133	0.425	0.123	0.123	3.62	0.41	0.302	0.220	—	6.8	—	7.4
6.85	0.85	0.348	0.284	0.105	0.102	2.80	0.50	0.527	0.225	—	12.5	—	7.2
9.20	1.00	0.579	0.210	0.087	0.083	2.50	0.60	0.850	0.228	—	19.8	—	6.0

TABLEAU VIII. — Éléments caractéristiques des houles limites pour différentes longueurs relatives  $\lambda$ .

relative  $\lambda$  varie de 2,78 à 9,20. La valeur supérieure de  $\gamma$  est très proche de la limite trouvée par Stokes pour  $\lambda = 0$  (soit  $H = \infty$ ).

A titre comparatif, les lames de tempête assez longues, sur le point de déferler, ont une cambrure comprise entre 0,10 et 0,08.

Les valeurs trouvées pour  $\gamma$  peuvent se représenter sensiblement par la relation déjà indiquée :

$$(55) \quad \gamma_a = \frac{h}{L} = 0,140 \operatorname{Th} \pi \frac{H}{L}.$$

La cycloïde limite, dans la théorie classique du déferlement, répond à une loi analogue, mais, pour laquelle, le coefficient 0,140 est remplacé par  $1/\pi = 0,318$ .

Les cambrures limites, calculées selon la méthode préconisée et en accord satisfaisant avec l'expérience (1), n'atteignent que  $\frac{0,140}{0,318} = 44\%$  de celles, excessives, données par la théorie courante du déferlement, laquelle admet comme critère l'apparition d'un point de rebroussement. On a signalé dans l'exposé préliminaire, que ceci correspondrait au cas, irréalisable en pratique, d'un rotationnel infini en surface.

b. Dans le même domaine de variation de  $\lambda$ , le rapport de la profondeur à la demi-amplitude limite prend des valeurs comprises entre 5,34 et 2,50. Hors cet intervalle, et pour des houles relativement très courtes (mer très profonde), ce rapport tend vers l'infini; pour des houles très longues, au contraire, la formule (55) donne par extrapolation :

$$\lim \frac{H}{h} = \frac{H}{L} \times \frac{1}{\gamma} \sim \frac{H}{L \times 0,140} \frac{\pi H}{L} = 2,28.$$

À titre comparatif, la théorie trochoïdale fournirait des valeurs 2,28 fois plus faibles, et, au contraire des précédentes, nettement insuffisantes; en effet, l'expérience montre que ce rapport dépasse régulièrement 2 (Stevenson), reste le plus souvent aux alentours de 3 (Gaillard : 3,34, moyenne de 134 observations) et monte dans certains cas à 5 et davantage (2). Sur modèles réduits, M. Larras trouve de un peu plus de 1 (fond lisse) à 1,5 (fond rugueux) pour des plages inclinées à 20%, donc pour des conditions assez éloignées du calcul théorique admettant une profondeur constante; par contre, le rapport remonte aux valeurs courantes 3 et 4 pour des plages inclinées à 5%. À Alger, lors de la tempête du 3 février 1934, des lames de 200 m. de longueur déferlaient *sans vent* par des fonds de 9 m.; notre calcul indique une houle limite de 7,65 m. Or, la plus forte houle observée a été de 7 m., mais il est vraisemblable de supposer que l'amplitude a varié de 7 à 8,40 m. avec maximum maximorum de 9 m. (3).

c. Dans les mêmes conditions de variation de  $\lambda$ , la surélévation relative du niveau moyen varie de 0,37 à 0,60, valeurs encadrant celle de 0,50, obtenue comme

(1) Il est normal que l'observation fournisse, pour les cambrures limites, des chiffres légèrement plus faibles que des valeurs théoriques présumées correctes.

En effet, sans parler de l'action accélératrice possible du vent ou d'un rotationnel en accord avec la propagation, la houle n'est jamais débarassée complètement d'ondulations secondaires qui en accroissent localement la cambrure.

(2) Renseignements tirés de la Note de M. Larras. Déferlement des Lames.

(3) Selon l'article de M. l'Ingénieur en chef Renaud, déjà cité.

LONGUEUR RELATIVE de la houle $\lambda = \frac{2L}{H}$	VITESSE APPARENTE de propagation $V_a =$ vitesse des crêtes.	VITESSES EFFECTIVES de propagation $V_c$	COURANT D'ENTRAI- NEMENT des particules $V_c - V_a$	VITESSES DES PARTICULES dans le mouvement relatif $V_r$		VITESSES ABSOLUES DES PARTICULES $V_r - V_a$		VITESSES ORBITALES DES PARTICULES $V_r - V_c$		PRESSIONS DE LA HOULE LIMITE.	
				Crête.	Croux.	Crête.	Croux.	Crête.	Croux.	Crête.	Croux.
2.78	1.06	0.800 1.086	- 0.260 0.026	0 1.025	1.320 1.113	- 1.060 - 0.035	0.260 0.053	- 0.800 - 0.061	0.520 0.027	0 1.028	0 0.987
4.50	1.075	0.823 1.110*	- 0.252 0.035	0 0.978	1.310 1.260	- 1.075 - 0.097	0.235 0.185	- 0.823 - 0.132	0.487 0.150	0 1.081	0 0.884
6.85	1.157	0.878 1.196	- 0.279 0.039	0 0.976	1.350 1.450	- 1.157 - 0.181	0.193 0.293	- 0.878 - 0.220	0.472 0.254	0 1.159	0 0.705
9.20	1.222	0.920 1.250	- 0.302 0.028	0 0.972	1.355 1.535	- 1.222 - 0.250	0.133 0.313	- 0.920 - 0.278	0.435 0.285	0 1.23	0 0.63

REMARQUES. — Les vitesses sont comparées à la vitesse-type  $V_1 = \sqrt{g \frac{L}{\pi}} \text{Th} \frac{\pi H}{L}$ ; les pressions à la valeur  $\rho_0 g H$ .  
Les chiffres supérieurs se rapportent à la surface libre, les chiffres inférieurs au fond.

TABLEAU IX. — Vitesses et pressions caractéristiques des houles limites pour différentes longueurs relatives  $\lambda$ .

moyenne de nombreuses observations (0,46 et 0,52 Gaillard); M. Larras a mesuré 0,59 à Alger).

d. *La vitesse apparente de propagation  $V_a$ , c'est-à-dire la vitesse de déplacement des crêtes anguleuses, dépasse de 6 à 22 % la vitesse de propagation  $V_1$  des ondes de faible amplitude, lorsque la longueur relative varie comme ci-dessus. Gaillard a trouvé le rapport de ces vitesses compris entre 1 et 1,3, mais s'est exprimé prudemment sur ce résultat un peu imprévu.*

Cet énoncé et les suivants ne supposent aucun déplacement d'ensemble de la masse liquide dont le centre de gravité reste fixe; de plus, des houles irrotationnelles; sinon, les valeurs de  $V_a : V_1$  seraient encore supérieures (1).

*L'accroissement de la vitesse de déplacement des crêtes par rapport à la vitesse type est d'autant plus marqué que la houle est plus longue. Les observations de Gaillard paraissent confirmer ce fait.*

*En résumé, la méthode de calcul utilisée, bien qu'elle ne fasse appel qu'aux lois des fluides parfaits, donne des résultats très généralement d'accord avec l'expérience.*

Il serait néanmoins intéressant de vérifier plus systématiquement si la variation de la longueur relative influe sur les caractéristiques des houles limites dans le sens indiqué par nos calculs.

D'autre part, selon les essais sur modèles réduits, l'angle d'inclinaison et la nature du fond paraissent jouer des rôles qu'il serait utile d'élucider du point de vue théorique, le premier dans le cadre de l'hydrodynamique classique, le second en faisant appel au frottement.

e. *Le courant d'entraînement des particules atteint, en surface, des valeurs comprises entre 26 et 30 % de la vitesse de propagation type  $V_1$ , lorsque la longueur relative varie comme précédemment. Ce courant d'entraînement est dirigé dans le sens de la propagation. Au fond, le courant, de sens inverse, atteint environ 3 % de  $V_1$ .*

Le courant de surface est donc très marqué. Pour une houle limite longue de 100 m. et par des fonds de 15 m. il atteindrait 3,0 m./sec.

f. *Les vitesses effectives de propagation des perturbations par rapport à une particule déterminée sont, en surface, inférieures à la vitesse type des ondes de faible amplitude, par suite du courant d'entraînement très marqué des particules superficielles agissant dans le sens de la propagation. Sur le fond, par contre, la direction du courant d'entraînement est inversée et les vitesses effectives de propagation dépassent très nettement la vitesse type  $V_1$ .*

g. *Sur la verticale passant par la crête, la vitesse réelle (absolue) des particules égale en surface la vitesse apparente de propagation  $V_a$  et se trouve être la plus grande vitesse produite dans la masse liquide; elle diminue très rapidement, sans changer de signe, lorsque la profondeur croît. La vitesse sur le fond, même pour des houles en eau peu profonde, n'atteint pas le quart de  $V_a$ . De plus, comme le graphique représentatif des vitesses présente une tangente horizontale à l'origine, fig. 20, il se produit une pointe de vitesse très marquée et localisée aux environs de la crête limite. La pression de choc, produite par l'arrêt brutal de la lame déferlante sur un obstacle, doit donc être particulièrement forte au niveau de la crête ou*

(1) Dans les essais récents de Dieppe — voir Études sur les efforts dus aux lames, par MM. de Rouville, inspecteur général, P. Besson et P. Pétry, ingénieurs des Ponts-et-Chaussées, Annales 1938, VII — ce rapport varie de 1,08 à 1,42 avec quelques résultats aberrants (avoisinant 2).

un peu en dessous. Il s'agit du phénomène très bref dénommé « gifle » par M. J. Larras (Déferlement des Lames), auquel fait suite une « pression de bourrage » d'intensité bien moindre. M. Larras a observé, sur un modèle réduit, que la surpression fugitive de la gifle s'étale à peu près uniformément sur une assez large zone de choc voisine du niveau de repos de l'eau. Il y a donc analogie, mais non identité, entre la prévision théorique et l'expérience.

Quant à l'intensité de cette pression de choc, si on admet un brusque changement de signe de la quantité de mouvement, c'est-à-dire un *choc élastique* sans perte d'énergie cinétique, elle est donnée par  $\frac{P}{\rho_{eg}} = 2u^2$  (1).

Pour les houles longues qui sont les plus violentes, par exemple pour  $\lambda = 9,20$ ,  $u = 1,22 \times V_1 = 1,13 \sqrt{gH}$  et  $\frac{H}{h} = 2,50$ , d'où  $\frac{P}{\rho_c} = 2 \times 1,13^2 \times 2,5 h = 6,4 h$ .

L'observation et les essais ont révélé des pressions instantanées allant jusqu'à 5 et 6  $h$  (Stevenson - J. Larras). Eu égard à l'étalement de la gifle et à la perte d'intensité correspondante, il y a concordance satisfaisante avec la valeur théorique. En conséquence, la *pointe fugitive de pression produite au début du déferlement sur un obstacle rigide paraît due à un choc élastique* (2).

h. Sur la verticale passant par le creux, les vitesses réelles (absolues) des molécules diminuent de la surface au fond pour les houles assez courtes  $\lambda < 5$ , augmentent, au contraire, pour les houles plus longues. Ces vitesses, nettement inférieures à  $V_a : 3$ , sont dirigées en sens inverse de la propagation. Pour des houles de faible amplitude sans courant d'entraînement, les diagrammes des vitesses absolues seraient égaux et de signe contraire au droit de la crête et du creux. On peut se rendre compte sur la fig. 20 combien ces deux diagrammes sont dissemblables pour une houle limite.

i. Il est indiqué d'appeler *vitesses orbitales* des particules celles mesurées par rapport à des axes mobiles se déplaçant à la vitesse du courant d'entraînement au niveau de la particule. Dans ce système d'axes, les orbites des molécules sont fermées. Les vitesses orbitales au droit des verticales passant par la crête et le creux — correspondant aux points hauts et bas des orbites — ont une répartition analogue à celle des vitesses absolues ; néanmoins, même en crête et pour des houles longues, elles n'atteignent pas la vitesse type  $V_1$ .

j. Les valeurs extrêmes sur le fond de la pression relative, lorsque la lame déferlante présente sa crête ou son creux à l'aplomb du point considéré, diffèrent d'autant plus de l'unité (valeur de repos) que la houle est plus longue. Si, comme des essais récents semblent l'indiquer, la mise en émulsion des fonds meubles dépend des variations de pression, les houles longues seront plus agissantes.

D'une façon générale, et aux différents points de vue auxquels nous nous sommes placés, les houles limites pour des fonds de profondeur donnée seront d'autant plus violentes et dangereuses qu'elles seront plus longues.

(1) En cas de choc non élastique, la pression serait moitié moindre.

(2) Il s'agit de la valeur moyenne et normale de cette pointe de pression et non de ses valeurs extrêmes, sporadiques et très localisées, atteintes en cours de déferlement et qui peuvent être beaucoup plus considérables (voir les essais de Dieppe précités). Elles paraissent dues à l'action conjuguée d'un coup de bélier, favorisé par la forme géométrique de l'obstacle opposé à la lame, et de l'air comprimé occlus dans les rouleaux et se détendant brusquement.

### III. — Profondeur d'eau nécessaire pour éviter un déferlement dangereux sur une digue verticale.

Pour un ouvrage de type vertical fondé sur un *sous-sol meuble*, il y a lieu de ménager une cote de fondation suffisamment basse afin de supprimer la possibilité de déferlement de lames de dimensions telles qu'elles mettraient en danger l'équilibre de la digue ou menaceraient d'affouiller son soubassement. En vue de fixer le coefficient de sécurité à adopter, on peut naturellement se borner aux houles déferlantes de la plus forte amplitude envisagée ; mais, même parmi ces dernières, seules représenteront un risque réel celles appartenant à un domaine de variation restreint des longueurs relatives  $\lambda$  compris, par exemple, entre les limites 6 et 10 déjà considérées antérieurement pour le calcul de ces ouvrages.

En effet, si  $\lambda$  est supérieur à 6 ou 7 et seulement dans ce cas :

a. le clapotis produit le long de la muraille par la houle limite brisera nettement et le mouvement résultant sera fortement perturbé avec possibilité de chocs, cavitations, etc. ;

b. les vitesses sur le fond ou dans la masse liquide et les effets dynamiques lors du déferlement, proportionnels au carré de ces vitesses, seront suffisamment violents, car les uns et les autres croissent avec la longueur relative, rapidement sur le fond, plus lentement en surface, ainsi qu'il ressort des calculs numériques faits plus haut.

Par ailleurs, les valeurs  $\lambda > 10$  se rencontrent peu fréquemment pour des houles limites et, de plus, correspondent à une probabilité de déferlement très faible pour une digue fondée correctement.

Si l'on détermine, en effet, le rapport limite  $\frac{H}{h}$  pour les longueurs relatives 6 et 10, on obtient 3,10 et 2,45 selon le tableau VIII. En adoptant une revanche de 33 % qui semble un minimum, eu égard à la perturbation causée, éventuellement, par le soubassement d'enrochements ou le bloc de garde, on en déduit qu'il faut établir la muraille par des fonds au moins égaux à 4,15  $h$  dans le premier cas — lames de longueur moyenne — et 3,25  $h$  dans le second — lames longues. Par conséquent, si le déferlement de ces dernières est le plus à craindre, parce que plus violent, sa probabilité, pour une profondeur et une amplitude données, est nettement plus faible que pour des lames plus courtes :

*En résumé, il semble suffisant d'établir une digue verticale sur fond affouillable à une profondeur sous les basses mers supérieure ou égale à 4  $h$ , 2  $h$  étant la plus forte amplitude prévisible pour la houle du large (1). La profondeur 3  $h$ , quelquefois préconisée, paraît trop hardie, la profondeur 5  $h$  surabondante, car pour les houles courtes ou très courtes déferlant par des fonds de cette importance ou des fonds plus considérables, il n'y a plus, à proprement parler, de danger pour l'ouvrage ou son infrastructure. En effet, pour le domaine envisagé des longueurs relatives, ces profondeurs correspondent à la zone assez profonde ; les vitesses sur le fond sont très diminuées et le déferlement, d'ailleurs moins violent, limité uniquement aux régions superficielles.*

(1) Cette déduction théorique est en accord avec la conclusion II' du Congrès de Navigation de Bruxelles (sept. 1935).

#### IV. — L'accroissement des vitesses des mouvements ondulatoires aux abords de la rive et la théorie dite du flot de fond.

Le calcul des vitesses, près de la rive, est rendu aléatoire par le déferlement qui intervient en général. Cependant, même dans ce cas et sur fonds peu inclinés, plans ou non, la méthode énergétique, qu'on utilisera systématiquement ci-après, fournit des résultats utilisables.

##### 1° HOULES AVANT DÉFERLEMENT.

La houle venant du large est supposée avoir atteint, sans déferlement, une profondeur donnée  $H$ . Les autres données du problème et les inconnues, avec les notations adoptées dans la seconde partie de cette étude, sont, pour les premières, les caractéristiques du large, l'amplitude  $2h$ , la longueur d'onde  $2L$  et la cambrure correspondante  $\gamma = \frac{h}{L}$ , pour les secondes, les caractéristiques  $2h'$  et  $2L'$  à la profondeur  $H$ .

Le calcul de ces deux inconnues se fait comme suit en appliquant la méthode énergétique. On introduit le paramètre

$$\tau = a'H = \frac{\pi H}{L'} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

inversement proportionnel à la longueur relative  $\lambda = \frac{2L'}{H}$ . Il s'ensuit, pour la longueur d'onde  $2L'$ , la valeur

$$\frac{2\pi}{a'} = 2L' = \frac{2\pi H}{\tau} = 2L \operatorname{Th} \tau$$

d'après l'expression (154), d'où l'équation déterminant  $\tau$ :

$$(197) \quad \tau \operatorname{Th} \tau = \frac{\pi H}{L},$$

tandis que la relation (155) fournit l'amplitude  $2h'$ .

Selon la formule (57), les valeurs extrêmes et de signe contraire atteintes alternativement en un point quelconque du profil liquide par la composante horizontale de la vitesse  $u$  s'écrivent, au premier ordre d'approximation et avec les notations actuelles :

$$(198) \quad u_{max} = \frac{h'b \operatorname{Ch} a'(H-y)}{\operatorname{Sh} a'H} = h' \sqrt{\frac{\pi g}{L}} \frac{\operatorname{Ch} a'(H-y)}{\operatorname{Sh} \tau}.$$

La fréquence  $\frac{b}{2\pi}$  de la houle est constante en tous points et correspond à celle du large pour une profondeur illimitée, soit  $\frac{1}{2T} = \frac{b}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi g}{L}}$  selon la formule (90).

En effet, en cas contraire, il y aurait, avec le temps, accumulation ou raréfaction continue des ondes comprises entre deux plans verticaux, les nombres des ondes y pénétrant ou en sortant étant inégaux, et le phénomène ne saurait être périodique.

On peut aussi énoncer cette loi comme suit : En tous points, la célérité de l'onde est proportionnelle à sa longueur ; le rapport est égal, selon les formules (123) et (144), à

$$(199) \quad \frac{b}{\pi} = \frac{V'}{L'} = \frac{V}{L} = \sqrt{\frac{g}{\pi L}}.$$

En introduisant les valeurs  $a'$  et  $h'$  en fonction de  $\tau$  dans la formule (198), on trouve pour  $u_{max}$  une expression qu'il est inutile d'écrire et dont la propriété essentielle est la suivante :

$u_{max}$  croît constamment du fond à la surface sur une même verticale et, sur le fond, du large vers la rive.

En eau *profonde* ou *assez profonde*, les valeurs de  $u_{max}$  diffèrent peu de celles correspondant au cas d'une profondeur illimitée; en particulier, les vitesses sur le fond sont très faibles; en eau *peu profonde*, cas de beaucoup le plus intéressant pour les applications, les variations de  $u_{max}$  sont, au contraire, marquées et, de plus, les formules se simplifient considérablement.

Dans cette région,  $H \leq \frac{L}{\pi}$  et l'on peut poser, avec une approximation suffisante qui croît rapidement vers la rive :

$$\text{Sh } \tau \simeq \text{Th } \tau \simeq \tau, \text{ tandis que } \text{Ch } a'(H-y) \simeq 1.$$

Il s'ensuit, selon les formules (197), (198) et (155) et en remplaçant dorénavant le paramètre  $\tau$  par la longueur relative  $\lambda$  dont la signification physique est plus évidente :

$$(200) \quad \frac{2L'}{H} = \lambda = \frac{2\pi}{\tau} \simeq 2 \sqrt{\frac{\pi L}{H}} = 3,54 H^{-1/2} L^{1/2},$$

$$(201) \quad u_{max} \simeq h \sqrt{\frac{\pi g}{L} \frac{\lambda^{3/2}}{4\pi^{3/2}}} = \frac{U \lambda^{3/2}}{4\pi^{3/2}} = \frac{1}{\pi^{1/4}} \sqrt{\frac{g}{2}} h H^{-3/4} L^{1/4} \simeq \frac{5}{3} h H^{-3/4} L^{1/4}. \quad (1)$$

Il est indiqué de comparer cette vitesse à la *plus grande vitesse se produisant au large* (en surface) soit :

$$(202) \quad U = hb = h \sqrt{\frac{\pi g}{L}} = 5,55 h L^{-1/2}.$$

Ainsi, en eau *peu profonde*, le maximum de vitesse  $u_{max}$  obéit aux lois suivantes :

1. Il est constant de la surface au fond (en fait, un peu plus faible sur le fond).
2. Il est proportionnel à l'amplitude du large  $2h$ .
3. Il croît légèrement avec la longueur d'onde du large  $2L$  et très nettement lorsque les fonds  $H$  diminuent.

Le rapport

$$(203) \quad u_{max} : U \simeq 0,30 \left(\frac{H}{L}\right)^{-3/4}.$$

Par conséquent, la valeur relative de  $u_{max}$

1° est indépendante de l'angle ou de la configuration du fond, pourvu qu'il se déforme de façon continue et reste peu incliné;

2° varie uniquement en fonction de la profondeur relative  $\frac{H}{L}$  et comme la puissance  $3/4$  de sa raison inverse.

(1) Dans les formules où l'accélération  $g$  n'est pas explicitée, les unités choisies sont le mètre et la seconde.

A la limite de l'eau peu profonde vers la rive, c'est-à-dire, pour un fond incliné en moyenne d'un angle  $\alpha$ , à la profondeur

$$(125) \quad H_\alpha = \frac{\pi \alpha^2}{4} L$$

qui correspond à l'abscisse moyenne de la dernière demi-ondulation vers la rive (1), le maximum de vitesse a crû jusqu'à la valeur

$$(204) \quad u_\alpha = \frac{2\sqrt{g}}{\pi} hL^{-1/2} \alpha^{-3/2} \simeq 2hL^{-1/2} \alpha^{-3/2}.$$

Plus près du rivage, en eau très peu profonde, la méthode énergétique utilisée telle quelle ne conviendrait plus; nous verrons, ci-dessous, un moyen plausible de tourner cette difficulté et d'analyser le phénomène jusqu'à la rive.

La croissance de  $u_\alpha$  est d'autant plus marquée que l'angle du fond est plus faible, ainsi qu'il ressort des chiffres ci-dessous (voir aussi fig. 23).

$\alpha$	$u_\alpha : U = 0,36 \alpha^{-3/2}$	$\lambda_\alpha = \frac{4}{\alpha}$
20°.....	1,75	11,5
15°.....	2,68	15,2
10°.....	4,94	23
5°.....	13,7	46

Cependant, on ne saurait expliquer de cette façon sommaire les grandes vitesses observées habituellement. En effet, pour  $\alpha \leq 10^\circ$ , les valeurs de  $\lambda$ , à la limite de l'eau très peu profonde, soit  $\lambda_\alpha$ , correspondent à des ondes beaucoup trop plates (trop longues) pour être d'un intérêt pratique et le déferlement intervient plus au large.

2° HOULES DÉFERLANT EN EAU PEU PROFONDE.

C'est le cas courant; jusqu'au point initial de déferlement, la méthode énergétique convient en opérant comme précédemment (tableau VII) ou, plus simplement, comme ci-dessous, en utilisant les approximations du paragraphe 1°.

a. Caractéristiques au point de déferlement D.

En ce point, la cambrure limite est déterminée par :

$$\gamma_d = \frac{2h'}{2L'} = \frac{h'\lambda_d^{3/2} L'}{4\pi^{3/2}} = 0,140 \frac{2\pi}{\lambda_d}$$

d'après la relation (55), d'où

$$\lambda_d^{5/2} = (2\pi)^{5/2} \sqrt{2} \times 0,140 \frac{L}{h} = 19,77\gamma^{-1}.$$

11 Voir remarque (1) au bas de la page 287.

(205) Il s'ensuit une *longueur relative*  
 $\lambda_d = 3,29\gamma^{-2/5} = 3,29h^{-2/5}L^{2/5},$   
 une *cambrure limite*  
 $\gamma_d = 0,267\gamma^{2/5} = 0,267h^{2/5}L^{-2/5}$   
 et un *maximum de vitesse*  
 $u_d = U \frac{\lambda_d^{3/2}}{4\pi^{3/2}} = 0,268 U\gamma^{-3/5} = 1,50 h^{2/5}L^{1/10}$   
 à la *profondeur de déferlement* (formule 200)  
 $H_d = \frac{4\pi L}{\lambda_d^2} = 1,17 L\gamma^{4/5} = 1,17 h^{4/5}L^{1/5},$   
 tandis que la *demi-amplitude limite* vaut  
 $h_d = \frac{H_d}{2,28} = 0,513 h\gamma^{-1/5} = 0,513 h^{4/5}L^{1/5}.$

En fait, au point D, la vitesse réelle en surface des particules de la crête limite,  $u_s \equiv V_a$  est très supérieure à la vitesse théorique  $u_d$ , elle-même très supérieure à celle  $u_f = (V_a - V_r)$  existant sur le fond, au droit de la crête, ainsi qu'il ressort des calculs faits dans la troisième partie (tableau IX) et ces inégalités, valables pour une houle irrotationnelle, seront encore accentuées près du rivage lorsqu'il existe un rotationnel de même sens que la propagation.

Les vitesses  $V_a$  et  $u_f$  sont, d'après la terminologie de Cornaglia, des « flots directs », c'est-à-dire des vitesses agissant dans le sens de la propagation, les « flots inverses » — au droit du creux, en surface et au fond —, atteignant, à peu près, l'ordre de grandeur de  $u_d$  (voir fig. 20).

On a, approximativement, en vertu des calculs numériques effectués (tableau IX) :

(206)  $V_a = 4,26 \lambda_d^{1/8} \sqrt{h_d} = 0,632 U\gamma^{-13/20} = 3,50 h^{7/20}L^{3/20}.$

Le tableau X ci-après indique, en fonction de la cambrure du large  $\gamma$ , les diverses valeurs (205) et (206), lorsque le déferlement se produit à la limite de l'eau assez profonde ( $\tau = 1$ ), au point isométrique ( $\tau = 1/2$ ) et pour  $\lambda_d = 20$  qui peut être considéré comme la limite supérieure des longueurs couramment observées avant déferlement.

CAMBRURE du LARGE $\gamma$ .	VALEURS AU POINT D (1).						
	$\tau$	$\lambda_d = \frac{2\pi}{\tau}$	$\gamma_d$	$H_d : L$	$h_d : h$	$u_d : U$	$V_a : U$
1 : 5 (1 : 9,35)	1	6,28	1 : 7,1 (1 : 9,20)	0,318	0,707 (0,913)	0,707 (0,78)	1,80
1 : 28,5 (1 : 22,5)	0,500	12,56	1 : 14,1	0,080	1,00 (1,08)	1,96 (2,08)	5,53
1 : 91 (1 : 100)	0,314	20,00	1 : 22,8	0,033	1,27 (1,29)	4,00 (4,04)	11,8

(1) Les valeurs entre parenthèses sont celles données par les équations exactes de la théorie énergétique. Elles montrent la façon dont l'approximation utilisée croît lorsque le point de déferlement s'approche de la rive. Pour  $\tau = 1$ , l'approximation est grossière et conduirait à une valeur inadmissible pour  $\gamma$ , car si  $\gamma > 1 : 7,15$ , la houle déferle au large. Comme la cambrure effective du large ne dépasse guère 1 : 10, cette valeur  $\tau = 1$  représente, en fait, une extrapolation théorique.

TABLEAU X. — Caractéristiques au point de déferlement.

Les développements précédents montrent que, au point de déferlement D :

1° les maxima de vitesse théorique et effectif  $u_d$  et  $V_a$  ne croissent pour ainsi dire pas avec la longueur, mais nettement avec l'amplitude du large ;

2° les vitesses maxima effectives en surface  $V_a$  sont de 2,5 à 3,0 fois supérieures aux vitesses maxima théoriques  $u_d$  et ce rapport croîtrait encore pour des houles rotationnelles ;

3° plus la houle du large est longue, plus l'accroissement des maxima de vitesses est marqué, le déferlement se produisant par des fonds de plus en plus faibles.

À titre d'exemple des calculs précédents, considérons des houles de tempête en Méditerranée  $2L=60$ ,  $2h=4,20$  et  $2L=150$ ,  $2h=6$  m. ; on aura en surface :

$$\text{Vitesses de déferlement } U_a = 7,52 \text{ et } 9,80 \text{ m./sec.},$$

$$\text{Vitesses maxima au large } U = 2,12 \text{ et } 1,92 \text{ m./sec.},$$

tandis que pour les grandes houles de l'Océan  $2L=500$ ,  $2h=6$  ou 10 m.,

$$V_a = 11,70 \text{ et } 13,95 \text{ m./sec.},$$

$$U = 1,05 \text{ et } 1,75 \text{ m./sec.}$$

b. *Vitesses maxima dans la zone déferlante et sur la rive.*

Les vitesses au point initial de déferlement D étant connues, comment en déduire celles de rive ou de la zone déferlante ?

La réponse théorique à ces questions paraît lointaine et la documentation expérimentale encore insuffisante pour fournir des valeurs numériques applicables à chaque cas.

Au point de vue qui nous occupe particulièrement : détermination des vitesses et efforts dynamiques sur les ouvrages riverains, on peut tout d'abord éliminer le cas des plages très plates où la houle s'amortit peu à peu sans produire d'effet notable sur la rive.

Pour les pentes moyennes courantes, la zone de déferlement est assez courte et l'on n'observe généralement qu'un ou un très petit nombre de rouleaux dont le dernier s'étale sur la rive. On peut, dans ces conditions, essayer d'encadrer la réalité en se basant sur quelques faits élémentaires comme les suivants :

a. La diminution progressive des longueurs d'onde dans la zone des rouleaux paraît régie par la loi générale (154).

b. L'amplitude de la houle croît légèrement jusqu'au point de déferlement, mais la hauteur des rouleaux s'approchant de la rive reste ensuite sensiblement stationnaire.

c. La vitesse de la dernière lame de rive, lorsqu'elle s'étale sur la grève sans se trouver freinée par le ressac de la lame précédente, est supérieure à celle des rouleaux.

L'énoncé a. fournit l'expression  $L' = \sqrt{\pi H L}$  (voir formule 200), qui, introduite dans la relation de périodicité (199), donne la valeur approchée bien connue  $V'' = \sqrt{gH}$  pour la vitesse des crêtes en eau peu profonde. Cette vitesse décroissant avec H, tandis que la vitesse limite  $V_a$ . (206) tend, par inertie, à conserver sa valeur, il s'ensuit un déversement côté rive de la partie déferlante de la crête et la formation du rouleau (1).

(1) Si l'on admet, au moins à titre comparatif, dans la zone déferlante, la valeur classique (156) de l'énergie totale, on trouve, avec les hypothèses faites, qu'elle se dissipe proportionnellement à  $H^{3/2}$  si la hauteur  $2h'$  de la lame reste constante, plus rapidement si cette hauteur diminue vers la rive.

En négligeant l'interaction des particules, le théorème de l'énergie (de Bernoulli)

$$(161) \quad \rho \frac{W^2}{2} - \rho gy = \text{Const.},$$

fournit, dans le système de référence se déplaçant à la vitesse instantanée  $V''$ , la vitesse sensiblement horizontale  $V_0$  atteinte sur la rive par les particules de la crête s'écroulant, en moyenne, de la demi-hauteur  $h'$  de l'onde en glissant sur le support mobile représenté par le corps de la lame, soit, en revenant au système de coordonnées fixes :

$$(207) \quad V_0 = V'' + \sqrt{(V_a - V'')^2 + 2gh'}.$$

La profondeur au droit de laquelle la lame déferlante s'écroule définitivement et la vitesse correspondante  $V''$  sont inconnues et nécessiteraient des recherches expérimentales, mais il suffit, pour notre but, de remarquer que  $V_0$  est *maximum* pour  $V'' = V_a$ ; il s'agit, dans ce cas, d'une plage assez fortement inclinée pour laquelle la crête limite, à peine formée, s'étale sur la rive. Il s'ensuit :

$$(208) \quad V_{0\max} = V_a + \sqrt{2gh}, \text{ car } h' \simeq h,$$

tandis que la limite inférieure, non atteinte, s'obtiendra en négligeant  $V''$  par rapport à  $V_a$ .

$$(209) \quad V_{0\min} = \sqrt{V_a^2 + 2gh}.$$

Avant l'entrée en jeu des résistances passives freinant définitivement la lame sur la grève,  $V_0$  est donc effectivement supérieur à  $V_a$  (énoncé *c*).

Quant à la valeur  $u_r$  du flot de fond direct dans la zone déferlante, elle doit, par continuité et selon toute probabilité, rester nettement inférieure à  $V_a$  et même à  $u_r$  pour acquérir, assez brutalement, la valeur  $V_0 > V_a$  sur la rive, lieu de rencontre du fond et de la surface. Néanmoins, l'agitation tourbillonnaire intense de toute cette zone devra favoriser une certaine émulsion superficielle des fonds.

En reprenant les premier et dernier exemples numériques cités plus haut, on trouve :

$$\begin{aligned} V_{0\max} &= 7,52 + 6,42 = 13,94 \text{ m./sec.}, & V_{0\min} &= 9,89 \text{ m./sec.} \\ V_{0\max} &= 13,95 + 9,90 = 23,85 \text{ m./sec.}, & V_{0\min} &= 17,12 \text{ m./sec.} \end{aligned}$$

*c. Comparaison avec l'expérience.*

Si l'on suppose, en utilisant à nouveau la terminologie de Cornaglia, que le « jet de rive », résultat de l'étalement du dernier rouleau sur la rive, s'infléchit sur un obstacle, il atteindra, d'après le théorème de l'énergie, une hauteur

$$(210) \quad \eta = \frac{W^2}{2g},$$

où  $W$  est la vitesse du jet, soit, pour les deux exemples ci-dessus (1) :

$$\begin{aligned} \eta_{\max} &= 9,90 \text{ m.}, & \eta_{\min} &= 5,0 \text{ m.}, \\ \eta_{\max} &= 29,0 \text{ m.}, & \eta_{\min} &= 14,9 \text{ m.} \end{aligned}$$

Il est difficile de préciser davantage sans essais expérimentaux ; néanmoins, la

(1) Il s'agit des projections d'eau cohérentes, à l'exclusion des embruns qui semblent produits par l'expansion de l'air comprimé dans les rouleaux et dont les vitesses initiales sont beaucoup plus considérables — jusqu'à 75 m/sec. — Voir l'article « Études sur les effets dus aux lames » déjà cité.

réalité doit se trouver plus proche des valeurs supérieures si elle ne les dépasse pas.

En effet, nous le verrons ci-dessous, la prise en compte de l'interaction des particules (pression), négligée dans le calcul précédent, peut impliquer une majoration importante des hauteurs atteintes ; la concentration des jets, normalement au plan de figure, par suite d'irrégularités locales, concourt évidemment au même résultat et les deux effets combinés permettent vraisemblablement de rendre compte des hauteurs extrêmes observées — le double environ des valeurs maxima calculées ci-dessus.

### 3° VARIATION DES VITESSES POUR LES CLAPOTIS.

Les clapotis résultent de la juxtaposition de deux trains opposés d'ondes progressives. Ce fait, corroboré par l'identité déjà notée des variations des longueurs et amplitudes des ondes progressives et stationnaires, autorise l'application, à ces dernières, de la méthode énergétique.

Si  $4h$  est l'amplitude et  $2L$  la longueur du clapotis théorique au large, les caractéristiques  $4h'$  et  $2L'$  à la profondeur  $H$  se calculeront par les formules (154) et (155), tandis que les valeurs extrêmes  $u_{max}$  de la composante horizontale de la vitesse, égales et de signe contraire et localisées aux nœuds du mouvement, — elles sont nulles au droit des crêtes et des creux —, seront doubles de celles données très sensiblement par l'équation (198) ou, approximativement, par (201).

$U$  étant également doublé, le rapport  $u_{max} : U$  ne change pas et, en eau peu profonde, a la valeur (203). De plus, dans le cas du clapotis, on sait calculer ce rapport également en eau *très peu profonde*, où il varie de

$$\frac{2}{\pi^{3/2}} \alpha^{-3/2} = 0,36 \alpha^{-3/2}$$

à la limite de l'eau peu profonde (selon la formule 204), jusqu'à

$$\frac{u_{max}}{U} \simeq \frac{W_{max}}{U} \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \alpha^{-3/2} = 1,25 \alpha^{-3/2}$$

sur la rive, selon la théorie développée dans la seconde partie de cette étude (page 146).

$u_{max}$  croît donc très vite, dans le rapport  $\frac{1,25}{0,36} = 3,5$  lorsque le point de comparaison parcourt le dernier quart de la longueur d'onde de rive. D'ailleurs, cette vitesse de rive sera souvent fictive, car la brisure du clapotis interviendra, à moins que la houle génératrice, très plate, ne réponde à la condition (117).

Ainsi, sur un fond incliné à  $15^\circ$ , si la houle de tempête déjà envisagée  $2h = 4,20$ ,  $2L = 60$  pouvait se réfléchir régulièrement, on obtiendrait sur la rive  $u_{max} = 40$  m./sec. Or, d'après le tableau III, la houle doit être 8 fois moins cambrée pour réaliser cette condition et la vitesse de rive atteindra seulement  $\frac{40}{8} = 5$  m./sec.

La fig. 23 indique pour un clapotis, jusqu'à la zone très peu profonde incluse,

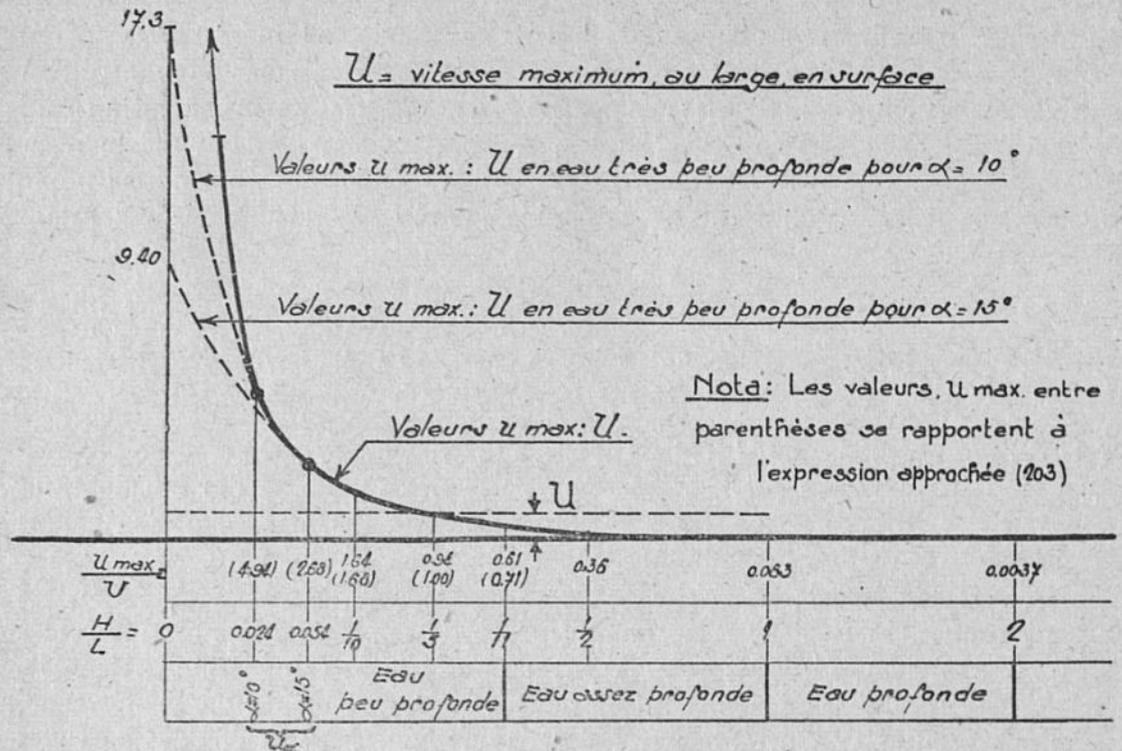


Fig. 23. — Croissance des vitesses maxima sur le fond aux abords de la rive.

la courbe enveloppe de la composante horizontale maximum de la vitesse sur le fond lorsque la profondeur relative  $\frac{H}{L}$  diminue et quelle que soit la configuration du fond. (Pour la clarté du dessin, on a adopté un fond de forme parabolique, de façon à distendre suffisamment la zone côtière). Le diagramme vaut identiquement pour la houle, zone très peu profonde exclue, étant entendu, néanmoins, que la vitesse « directe » effective sur le fond est notablement inférieure à  $u_{max}$ .

L'extension de la zone très peu profonde et la façon dont les vitesses du clapotis s'y répartissent dépendent de l'angle moyen du fond  $\alpha$ . La fig. 23 indique la croissance de  $u_{max}$  dans les deux hypothèses  $\alpha = 15^\circ$  et  $10^\circ$ . Plus l'angle  $\alpha$  diminue, plus  $u_{max}$  augmente, du moins tant que la brisure ne se produit pas.

#### 4° COMPARAISON ENTRE LES VITESSES CALCULÉES, CELLES OBSERVÉES ET CELLES DÉDUITES DE LA THÉORIE DU FLOT DE FOND.

La théorie dite du flot de fond de Cornaglia (1), applicable aux ondes progressives et basée sur des considérations de quantités de mouvement, comprend tout un corps de doctrines. On peut souscrire immédiatement à une partie d'entre elles, par exemple :

1° Le flot de fond (la vitesse sur le fond) est alternatif, les changements de direction étant liés aux phases de l'onde en surface.

2° L'intensité du flot augmente au fur et à mesure qu'on s'approche de la rive par des fonds de plus en plus faibles.

(1) Annales 1881, 1<sup>er</sup> semestre.

3° Sur fond ascendant, le maximum du flot précède la verticale qui passe par le sommet de l'onde et il la suit sur le fond plongeant. L'écart diminue au fur et à mesure qu'on s'approche de la rive. Un énoncé analogue convient pour le minimum du flot, le creux remplaçant la crête de l'onde.

La théorie développée dans cette étude corrobore ce fait sur fonds régulièrement croissants ou décroissants et, par extension, sur fonds variables, puisque, tout au moins en eau peu profonde, les maxima et minima de vitesses sont situés sensiblement sur des arcs de cercle ayant l'origine comme centre et passant constamment par les crêtes et les creux de l'onde.

4° Il existe une *ligne neutre* départageant le fond en deux zones ; au large, le flot inverse prédomine et les matériaux en suspension dans les parties basses sont entraînés vers la haute mer ; à l'intérieur, l'inverse est vrai et les matériaux sont rejetés vers la rive. La ligne neutre est située par des fonds d'autant plus grands que l'agitation de la mer est plus violente.

L'observation confirme cette déduction et les théories exposées ci-dessus également. En effet, le jet de rive, projeté avec force puis freiné peu à peu sur la grève prédomine nettement sur le flot de retour descendant la pente par son propre poids. Un peu plus au large, par contre, le flot inverse prédomine, car, les houles irrotationnelles — et, *a fortiori* quand elles ne le sont pas, — comportent, en profondeur, un contre-courant corrélatif du courant direct de surface. Ce dernier, bien connu, fait dire aux marins que, près des côtes, la mer ensache (porte à la rive en surface).

Cependant, il ne paraît pas que la ligne ou, plus précisément, la *zone neutre* assez fluctuante et fonction de l'agitation du moment, dont on vient de confirmer l'existence, puisse se trouver si bas (8 à 10 mètres en Méditerranée) et être d'autant plus profonde que le fond est plus plat, comme l'envisage Cornaglia. Selon l'analyse ci-dessus, elle ne peut être située au large de la zone nettement déferlante, ce qui limite vraisemblablement à  $2h$  ou peut être à  $h$  sa profondeur. L'exemple, cité d'ailleurs par Cornaglia, de la plaine sous-marine en bordure de la Mer du Nord, de 20 km. de largeur et par des fonds croissants de 2 à 5 m. tend à le confirmer, puisque elle est, au moins en partie, constituée d'apports côtiers et se situerait donc au large de la zone neutre.

D'autres énoncés de Cornaglia appellent quelques réserves, par exemple :

5° Sur fond ascendant, descendant ou alterné, l'onde diminue constamment, quoique faiblement d'amplitude, indépendamment de l'influence des résistances passives. Nous avons constaté, par contre, sur fond régulièrement ascendant ou descendant, une décroissance, un minimum, puis, à nouveau, une croissance de l'onde.

Cependant, la partie la plus originale et sans doute la plus controversée du mémoire de Cornaglia est celle traitant des propriétés essentielles du flot de fond alternatif de la houle. Il serait le plus violent au ras du fond et diminuerait dès qu'on s'en éloigne selon une loi non explicitée. Son intensité serait encore notable, même à grande profondeur, et d'autant plus grande que la houle proviendrait de régions où l'eau est plus profonde. Il serait la cause directe du jet de rive.

Cornaglia trouverait la justification expérimentale de sa théorie dans les faits suivants :

a. observations qualitatives d'effets mécaniques notables sur des obstacles ou épaves situées en pleine mer à profondeur moyenne (10 à 25 m.) ;

b. brisants produits par les grandes houles du large sur des hauts-fonds ne dépassant pas l'eau profonde (l'exemple typique est celui du banc de Terre-Neuve par des fonds de 80 à 100 mètres);

c. confrontation satisfaisante faite par lui entre la hauteur des gerbes verticales (9,25 m.) observée à l'aplomb du môle du Port d'Oneille lors de la bourrasque du 23 février 1879 et les vitesses à la rive calculées selon sa méthode.

On peut observer, au sujet des deux premières constatations, qu'elles ne sont pas incompatibles avec la théorie courante des mouvements ondulatoires, si l'on veut bien tenir compte des observations récentes faites sur les dimensions des houles de tempête et qui conduisent à augmenter sensiblement les estimations antérieures. Pour des houles de 150 m., par exemple, les profondeurs moyennes envisagées correspondent à la zone peu profonde et les vitesses sur le fond sont encore considérables (supérieures à la moitié des vitesses en surface). De même, une houle de l'Atlantique de 500 m., lorsqu'elle arrive sur des hauts-fonds situés à 90 m. de profondeur, voit sa longueur diminuer brusquement de 13 % et, pour les particules situées à cette profondeur, les oscillations verticales, dont l'amplitude est encore égale au tiers des oscillations de surface, doivent se résorber brutalement et toutes les trajectoires entre la surface et le haut-fond se modifier en conséquence. On conçoit que cette perturbation généralisée puisse s'extérioriser par l'apparition de brisants, sans pour cela faire appel à un courant de fond violent qui devrait d'ailleurs se transmettre, sans amortissement total, au travers d'une épaisseur d'eau de 90 m.

A Oneille, le môle comporte un talus incliné à environ  $45^\circ$  ( $49^\circ 32'$  au profil retenu) établi sur des fonds de 8,50 m. croissant insensiblement jusqu'à 2.650 m. à 180 km. au large.

La houle observée (caractéristiques  $2h = 4,20$ ,  $2L = 60$  m. comme dans le premier exemple numérique ci-dessus) engendre, selon la théorie du flot de fond et dans ce profil liquide, des vitesses sur le fond données par le tableau suivant (col. 2).

PROFONDEUR.	THÉORIE DE CORNAGLIA.		VITESSE	VITESSE	VITESSE
	FLOT DE FOND (parallèle au fond).	COMPOSANTE horizontale du flot de fond.	HORIZONTALE maximum. Houle déferlante.	HORIZONTALE maximum. Clapotis.	MAXIMUM parallèle au fond. Clapotis.
1	2	3	4	5	6
mètres.	m./sec.	m./sec.	m./sec.	m./sec.	m./sec.
230.....	6,52	6,52	$1,32 \times 10^{-10}$	$2,64 \times 10^{-10}$	$2,64 \times 10^{-10}$
43,2.....	9,15	9,15	0,046	0,092	0,092
Rive.....	17,74	11,51	9,89 à 13,94	6,03	8,52

TABLEAU XI. — Vitesses sur le fond et vitesses de rive.

Il y a incompatibilité manifeste entre les vitesses importantes du flot de fond à grande profondeur et celles, absolument négligeables, données par la théorie trochoïdale habituelle (col. 4). D'ailleurs, cette dernière théorie conduit à des vitesses décroissant régulièrement de la surface au fond (formule 198), à l'inverse

des propriétés présumées du flot de Cornaglia. Or, le théorème d'unicité exposé dans la première partie de cette étude ne permet guère d'envisager la possibilité d'un mouvement ondulatoire autre que celui donné par la formule (198) et compatible avec toutes les conditions du problème. Nous citerons, en outre, une conséquence de la théorie du flot de fond paraissant bien improbable : la mise en émulsion intense des fonds marins affouillables, pratiquement à toute profondeur.

Il reste à contrôler, si on doit écarter l'hypothèse de Cornaglia, que les théories courantes, convenablement développées s'il y a lieu, rendent compte des effets observés sur la rive, à Oneille en particulier.

Si l'on suppose d'abord une houle déferlante (col. 4), la vitesse de rive, calculée comme ci-avant (2°, b), comporte une composante horizontale de l'ordre de celle donnée par la théorie du flot de fond. La hauteur maximum susceptible d'être atteinte par le jet de rive, après déviation le long du môle, est

$\eta_{max} = 13,94^2 : 2g = 9,90$  m. supérieure à celle observée. Ce calcul est affecté d'une assez grande incertitude, car il néglige deux facteurs jouant, il est vrai, en sens inverse, mais dans une mesure difficile à préciser : la perte de force vive lors de l'inflexion du jet et l'action accélératrice de la pression (interaction des particules). On pourrait faire des remarques analogues sur les coïncidences numériques relevées par Cornaglia. Le calcul de clapotis qui suit n'a pas ces inconvénients, car il s'appuie sur une analyse mathématique plus précise.

Si, comme il est probable, eu égard à la profondeur d'eau au pied du môle d'Oneille, il n'y a pas eu déferlement mais clapotis le long du talus incliné à 45°, les développements effectués dans la seconde partie — valables, à strictement parler, pour un talus s'étendant indéfiniment vers le bas — indiquent, au premier ordre d'approximation, la hauteur suivante lors de l'affleurement supérieur :

$$\gamma_2 = 2h \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} = 5,94 \text{ m. (formule 116).}$$

Il y a lieu d'y adjoindre, comme terme du second ordre en  $h$ , la surélévation du niveau moyen qu'on calculera, de façon suffisamment approchée, par la formule (76), pour  $H = 8,50$  m.

$$\Delta h_2 = 2,10 \text{ m.}$$

Au total 8,04 m. pour la cote atteinte par la mer sur le talus à 45°.

Cette cote est susceptible de majoration pour plusieurs raisons ; d'une part, le redressement vertical du jet de rive le long du môle doit vraisemblablement accroître sa hauteur, d'autre part, pour des houles creuses, l'amplitude du clapotis est augmentée à la rive, selon les essais sur modèle réduit, enfin, la hauteur mesurée (9,25 m.) représente évidemment un maximum tenant compte d'une certaine concentration locale du jet. *En conclusion*, ce calcul de clapotis traduisant les faits expérimentaux à 13 p. 100 près par défaut doit être considéré comme satisfaisant.

Il démontre également que l'estimation, par la formule (210), de la cote atteinte par les projections d'eau peut conduire à des sous-évaluations importantes. En effet, la vitesse de rive du clapotis vaut, dans le cas présent, 8,52 m./sec. (col. 6), d'où  $\eta = 3,72$  m., alors qu'on vient de trouver 8,04 m. L'expression donnant  $\eta$ , du second ordre en  $h$ , néglige complètement le terme du premier ordre (116) traduisant l'influence de l'énergie latente de pression accumulée dans la masse liquide. D'ailleurs, il faut s'attendre, en règle générale, à ce que le terme du deuxième ordre soit le moins important. Ainsi, pour une houle ou un clapotis en

profondeur illimitée, la hauteur  $\eta$  correspondant à la vitesse maximum des particules se trouve être égale à la surélévation du niveau moyen et cette hauteur est négligeable, vis-à-vis de l'amplitude, terme du premier ordre, si la cambrure est faible. La production d'un jet très mince, sans interaction possible des particules, représente, par contre, le cas extrême opposé pour lequel la formule (210) jouera seule et donnera des résultats corrects, abstraction faite de la résistance de l'air.

L'exemple numérique précédent montre que *les gerbes d'eau, en bordure de mer, sont loin de correspondre à ce cas extrême et peuvent être engendrées par des vitesses nettement moindres que celles envisagées ou calculées habituellement.* Cette propriété fournit l'explication la plus plausible du phénomène connu sous le nom de *lame de fond*. Il faut y voir aussi la cause du fait suivant : les pressions moyennes réellement enregistrées sur des obstacles sont plus faibles que celles résultant, selon des formules connues, des vitesses déduites de la formule (210) en fonction des hauteurs observées des projections d'eau.

*Nous résumerons, comme suit, la discussion précédente sur la question du flot de fond.*

1° La théorie courante (trochoïdale) des mouvements ondulatoires fournit une explication suffisante du comportement des houles de tempête par moyens ou grands fonds, malgré la diminution rapide des vitesses avec la profondeur qui ressort de cette théorie basée, nous le rappelons, sur la prise en compte de toutes les équations de l'hydro-dynamique classique.

2° Le cas des plages très plates étant excepté, les vitesses maxima dans la masse liquide (fond et surface y compris) croissent régulièrement vers la rive où se produit le maximum absolu. L'intensité de la vitesse à la rive, telle qu'elle ressort d'observations, paraît rendue correctement par la théorie habituelle complétée comme nous l'avons fait.

3° En lieu et place du flot de fond, selon la définition de Cornaglia, et dont l'existence est, pour le moins, problématique, il paraîtrait plus indiqué de parler d'un flot de surface. En effet, sur une verticale déterminée, les vitesses de beaucoup les plus considérables se produisent en surface, dans le sens de la propagation, aussi bien avant qu'après déferlement de la houle. C'est uniquement le jet de rive, résultat de l'étalement du dernier rouleau sur la grève et se trouvant ainsi en contact localisé avec le fond qui pourrait mériter l'épithète de flot de fond avec le sens de courant violent attaché à ce terme, cependant que le flot de fond effectif décroît lui-même très vite vers le large et, avec lui, le danger d'affouillements. Dans la zone littorale restant sujette à remaniements, les lames déferlantes se déplacent périodiquement; elles agissent à la façon d'un râteau et tendent plutôt à égaliser les fonds.

4° Ces dernières conclusions, valables pour la houle déferlante, sont sensiblement modifiées s'il y a réflexion sur l'ouvrage et formation de clapotis, car les vitesses sur le fond sont doublées, les effets mécaniques quadruplés et l'action perturbatrice se fait sentir plus profondément, quoiqu'elle s'amortisse selon la même loi exponentielle que la houle. Ces faits ont suffi, à plusieurs reprises, pour provoquer des affouillements dangereux devant des digues verticales fondées insuffisamment bas sur des sous-sols meubles et ont amené quelquefois leur ruine. Les fosses produites dans ce cas occupent des emplacements fixes et tendent à s'approfondir avec le temps jusqu'à un état d'équilibre approximatif.