

et, de même,

$$v \sim h \frac{\partial \psi_1(x, y, t)}{\partial t} + h^2 \left[\frac{\partial \psi_2(x, y, t)}{\partial t} - \varphi_1(x, y, t) \frac{\partial^2 \psi_1(x, y, t)}{\partial t \partial x} - \psi_1(x, y, t) \frac{\partial^2 \psi_1(x, y, t)}{\partial t \partial y} \right].$$

Si l'on se restreint au premier ordre, il n'y a aucun calcul à faire; il suffira, si l'on a obtenu la solution du problème cherché dans le système de variables de Lagrange, de remplacer, dans les formules donnant les vitesses, les coordonnées de repos par les coordonnées actuelles, pour obtenir la solution dans le système de variables d'Euler.

PREMIÈRE PARTIE.

MOUVEMENTS ONDULATOIRES PÉRIODIQUES ET CYLINDRIQUES EN PROFONDEUR CONSTANTE.

I. — Forme générale des solutions périodiques rotationnelles des deux premiers ordres d'approximation exprimées au moyen des variables de Lagrange et d'Euler.

1° ÉQUATIONS DE L'HYDRODYNAMIQUE DANS LE SYSTÈME DE LAGRANGE

Elles s'écrivent :

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial a} + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \frac{\partial x}{\partial a} + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - g \right) \frac{\partial y}{\partial a} = 0, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial b} + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \frac{\partial x}{\partial b} + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - g \right) \frac{\partial y}{\partial b} = 0 \end{cases}$$

et l'équation de continuité, pour un fluide incompressible :

$$(11) \quad \frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial y}{\partial b} - \frac{\partial x}{\partial b} \frac{\partial y}{\partial a} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(a, b)} = 1.$$

La troisième coordonnée, choisie perpendiculaire au plan du mouvement, n'apparaît pas dans les formules.

Les fonctions

$$x = x(a, b, t)$$

$$y = y(a, b, t)$$

coordonnées actuelles des particules, dépendent du temps t et des coordonnées a et b à l'instant initial. $p(a, b, t)$ est l'excès de pression par rapport à la pression atmosphérique au point de coordonnées x et y .

On peut prendre comme variables indépendantes, au lieu de a et b , d'autres quantités x_0 et y_0 , fonction des premières, mais non du temps.

Les deux premières équations (11) restent valables en remplaçant a et b par x_0 et y_0 , tandis que l'équation de continuité devient, compte tenu des propriétés des déterminants fonctionnels :

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(a, b)} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(x_0, y_0)} \times \frac{\partial(x_0, y_0)}{\partial(a, b)} = 1.$$

Si l'on peut passer des coordonnées a, b aux coordonnées x_0, y_0 par une déformation continue respectant les volumes, c'est-à-dire telle que

$$(12) \quad \frac{\partial(x_0, y_0)}{\partial(a, b)} = 1,$$

l'équation de continuité ne changera pas de forme. Ce sera le cas ci-après où l'on prendra pour x_0 et y_0 les coordonnées des particules au repos. On pourra donc, indifféremment, dans toutes les équations (11), remplacer a et b par x_0 et y_0 (1).

Pour fixer les idées, on adoptera dans ce qui suit l'axe des y_0 vertical dirigé vers le bas, celui des x_0 horizontal dirigé de gauche à droite, l'origine étant prise sur la surface de l'eau au repos (2). On considérera la houle comme se propageant dans la direction des x_0 croissants; il existe une solution symétrique se propageant dans la direction opposée. Elle sera toujours sous-entendue ci-après, en particulier, dans l'énoncé des théorèmes d'existence.

2° ROTATION MOYENNE DES PARTICULES.

On peut éliminer la pression dans les équations (11), exprimées en fonction des coordonnées de repos, en dérivant la seconde par rapport à x_0 , la première par rapport à y_0 et soustrayant; il vient, après suppression des termes qui se détruisent deux à deux

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \frac{\partial x}{\partial y_0} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \frac{\partial y}{\partial y_0} \right) - \frac{\partial}{\partial y_0} \left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \frac{\partial x}{\partial x_0} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \frac{\partial y}{\partial x_0} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t \partial x_0} \times \frac{\partial x}{\partial y_0} + \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x_0} \frac{\partial y}{\partial y_0} \right) - \left(\frac{\partial^2 x}{\partial t \partial y_0} \frac{\partial x}{\partial x_0} + \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial y_0} \frac{\partial y}{\partial x_0} \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

d'où, en intégrant par rapport au temps

$$(13) \quad 2\zeta = \left(\frac{\partial^2 x}{\partial t \partial x_0} \frac{\partial x}{\partial y_0} - \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial y_0} \frac{\partial x}{\partial x_0} \right) + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x_0} \frac{\partial y}{\partial y_0} - \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial y_0} \frac{\partial y}{\partial x_0} \right) = \frac{\partial(x_t, x)}{\partial(x_0, y_0)} + \frac{\partial(y_t, y)}{\partial(x_0, y_0)}.$$

On a posé, pour simplifier,

$$x_t = \frac{dx}{dt}, \quad y_t = \frac{dy}{dt}.$$

ζ , fonction de x_0 et y_0 mais non de t , n'est autre que la rotation moyenne, dite encore tourbillon ou rotationnel au point x, y .

Pour s'en rendre compte, il suffit de partir de sa définition dans le système d'Euler, formule (5) et d'exprimer sa valeur en fonction des coordonnées de repos. Par la même occasion, on aura démontré le théorème fondamental de la théorie des tourbillons dans le cas des mouvements cylindriques :

Le rotationnel attaché à une particule déterminée, identifiée par ses coordonnées x_0, y_0 , reste constant au cours du mouvement lors du déplacement de la particule. C'est un élément cinématique indestructible pour un fluide parfait.

(1) Les coordonnées de repos ne sont pas les seules laissant invariantes les équations (11). Il y en a une infinité, c'est-à-dire toutes celles satisfaisant à l'équation différentielle (12).

(2) On a désigné l'axe vertical par y_0 et non par z_0 , réservant la lettre z , selon l'usage, pour les variables imaginaires utilisées occasionnellement.

3° RECHERCHE DE SOLUTIONS D'UN ORDRE QUELCONQUE D'APPROXIMATION.

En partant des formules (8), les composantes de la vitesse et le rotationnel, limités, par exemple, au deuxième ordre, s'obtiennent, les premières par les formules (9), le second au moyen de la formule (13) :

$$(14) \quad 2\zeta = h \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_0} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_0} \right) + h^2 \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_0} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_0} \right) + \frac{\partial(\varphi_{1t}, \varphi_1)}{\partial(x_0, y_0)} + \frac{\partial(\psi_{1t}, \psi_1)}{\partial(x_0, y_0)} \right].$$

En introduisant les valeurs (8) dans les équations générales (11) et en égalant à zéro les coefficients des diverses puissances de h , on obtient successivement

a. Termes indépendants de h : nuls identiquement.

b. Termes en h :

$$(15) \quad \begin{cases} \frac{\partial \chi_1}{\partial x_0} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} - g \frac{\partial \psi_1}{\partial x_0} = 0, \\ \frac{\partial \chi_1}{\partial y_0} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} - g \frac{\partial \psi_1}{\partial y_0} = 0, \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y_0} = 0. \end{cases}$$

c. Termes en h^2 :

$$(16) \quad \begin{cases} \frac{\partial \chi_2}{\partial x_0} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} - g \frac{\partial \psi_2}{\partial x_0} = -\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0} - \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_0}, \\ \frac{\partial \chi_2}{\partial y_0} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} - g \frac{\partial \psi_2}{\partial y_0} = -\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_0} - \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_0}, \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_0} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y_0} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0} \frac{\partial \psi_1}{\partial y_0} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_0} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_0} \end{cases}$$

et des expressions analogues pour les termes d'ordres supérieurs, les membres de gauche — linéaires et de forme identique — contenant les fonctions de l'ordre supérieur considéré, les membres de droite — quadratiques — celles d'ordres inférieurs. Ces groupes d'équations différentielles permettent de calculer successivement les fonctions inconnues des divers ordres. Nous allons déterminer l'intégrale générale de ces équations pour les deux premiers ordres.

4° SOLUTIONS DU PREMIER ORDRE.

Pour les obtenir, il suffit, d'après les formules (8), de déterminer les trois fonctions φ_1 , ψ_1 , et χ_1 .

On peut éliminer χ_1 dans le groupe (15) en dérivant la première équation par rapport à y_0 , la seconde par rapport à x_0 et en soustrayant. En dérivant, en outre, la dernière deux fois par rapport à t , il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_0} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_0} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x_0} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial y_0} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned}$$

C'est dire que les secondes dérivées prises par rapport à t de φ_1 et ψ_1 sont

des fonctions conjuguées et harmoniques de x_0 et y_0 . On peut donc poser, en introduisant une fonction résolvante G ,

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_0} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial y_0} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}$$

avec

$$(17) \quad \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_0^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = \Delta \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = 0,$$

d'où, après deux intégrations effectuées par rapport à la variable t et compte tenu de la dernière équation (15) :

$$(18) \quad \begin{cases} \varphi_1 = \frac{\partial G(x_0, y_0, t)}{\partial x_0} + \frac{\partial k(x_0, y_0)}{\partial y_0} t + \frac{\partial k'(x_0, y_0)}{\partial y_0}, \\ \psi_1 = \frac{\partial G(x_0, y_0, t)}{\partial y_0} - \frac{\partial k(x_0, y_0)}{\partial x_0} t - \frac{\partial k'(x_0, y_0)}{\partial x_0}. \end{cases}$$

k et k' sont deux fonctions quelconques de x_0 et y_0 , mais, la seconde, correspond à d'autres paires de variables indépendantes que les coordonnées de repos et peut-être éliminée aisément par un changement de variables (1). Quant aux termes dépendant de k et linéaires en t , ils représentent, étant donné la signification de φ_1 et ψ_1 , des courants indépendants du temps. Il y a une infinité de tels mouvements compatibles avec les conditions aux limites et pouvant se superposer au mouvement ondulatoire pour donner un mouvement résultant, en général, rotationnel. C'est le cas, par exemple, des ondes produites dans une rivière. Pour les ondes de pleine eau, par contre, les courants d'entraînement sont notoirement plus faibles que ceux afférents aux perturbations périodiques. L'examen des solutions rigoureuses irrotationnelles corrobore ce fait, puisque, les courants ne sont que du second ordre en h .

Nous annulerons donc la fonction du premier ordre k . La troisième équation du groupe (15) montre alors que G est elle-même harmonique de x_0 et y_0 , tandis que les deux premières, après remplacement de $\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}$ et $\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2}$ en fonction de G , se présentent comme les deux dérivées partielles par rapport à x_0 et y_0 de la fonction χ_1 .

On connaît donc cette dernière à une fonction de t près.

En résumé, la solution du premier ordre des phénomènes ondulatoires périodiques s'exprime, dans le système des variables de Lagrange, au moyen des formules (8) limitées aux termes en h , les trois fonctions inconnues dérivant comme suit de la fonction résolvante $G(x_0, y_0, t)$ qui joue le rôle d'un potentiel des déplacements :

$$(19) \quad \begin{cases} \varphi_1 = \frac{\partial G}{\partial x_0}, \\ \psi_1 = \frac{\partial G}{\partial y_0}, \\ \chi_1 = g\psi_1 - \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + f_1(t). \end{cases}$$

(1) Il suffit, en effet, de choisir comme nouvelles variables indépendantes les quantités

$$x'_0 = x_0 + h \frac{\partial k'}{\partial y_0}, \quad y'_0 = y_0 - h \frac{\partial k'}{\partial x_0}.$$

G est une fonction périodique par rapport à t et harmonique de x_0 et y_0 ; sa détermination précise, ainsi que celle de la fonction accessoire $f_1(t)$, résulteront des conditions aux limites envisagées.

Les valeurs (19) de φ_1 et ψ_1 , introduites dans la formule (14), annulent la partie du premier ordre de ζ . Si donc les courants d'entraînement des particules sont du second ordre, les mouvements au premier ordre d'approximation sont irrationnels et les vitesses, qui dépendent d'un potentiel, s'expriment comme suit dans le système d'Euler :

$$u = h \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial G}{\partial t} \right) = \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$v = h \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial G}{\partial t} \right) = \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

d'où, en supprimant une fonction additive de t sans importance, la relation suivante entre le potentiel des vitesses φ et la résolvante G :

$$(20) \quad \varphi = h \frac{\partial G(x, y, t)}{\partial t},$$

tandis que la fonction de courant ψ , conjuguée de φ , s'obtient par les relations (3). Si on appelle K une fonction harmonique conjuguée de G, on peut aussi poser

$$(21) \quad \psi = h \frac{\partial K(x, y, t)}{\partial t}.$$

5° SOLUTIONS DU DEUXIÈME ORDRE.

Les mouvements du 1^{er} ordre étant connus, il faut, pour obtenir ceux du second, déterminer les trois fonctions φ_2 , ψ_2 , χ_2 par intégration des équations (16).

Pour les fonctions simplement périodiques du temps, de période $2T$, que nous aurons à considérer, pour G, par exemple :

$$(22) \quad \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = - \left(\frac{\pi}{T} \right)^2 G.$$

Le second membre de la première équation (16) s'écrit donc, compte tenu de (19) :

$$\left(\frac{\pi}{T} \right)^2 \left(\varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0} + \psi_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_0} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{T} \right)^2 \frac{\partial}{\partial x_0} \left[\left(\frac{\partial G}{\partial x_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y_0} \right)^2 \right].$$

Tous les termes de la première équation, sauf $\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2}$, représentent alors la dérivée par rapport à x_0 et, semblablement, ceux de la deuxième, à part $\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2}$, la dérivée par rapport à y_0 de la même fonction. On peut, par conséquent, intégrer ces équations, comme pour le 1^{er} ordre, sous la forme

$$\chi_2 = g \psi_2 - \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{T} \right)^2 \left[\left(\frac{\partial G}{\partial x_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y_0} \right)^2 \right] + f_2(t)$$

en posant

$$(23) \quad \varphi_2 = \frac{\partial F}{\partial x_0} + v(y_0) \times t$$

et

$$\psi_2 = \frac{\partial F}{\partial y_0}.$$

Nous avons donc particularisé comme suit les fonctions k et k' du 2^e ordre, analogues à celles de la formule (18), en anticipant sur le fait que nous appliquerons ces considérations au cas d'une profondeur constante ; $k' = 0$, ce qui est toujours permis ; $\frac{\partial k}{\partial x_0} = 0$ (courants ascendants nuls). En effet, ces derniers n'ont guère été observés ou sont absolument négligeables, d'autant qu'ils doivent s'annuler en surface et sur le fond. Il s'en suit $\frac{\partial k}{\partial y_0} = v$ = fonction de la seule variable y_0 . v représente une vitesse horizontale d'entraînement des particules, variable avec la profondeur et du 2^e ordre en h .

La troisième équation (16) fournit alors la relation suivante pour le potentiel des déplacements du 2^e ordre F :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2} = \Delta F = -\frac{\partial^2 G}{\partial x_0^2} \frac{\partial^2 G}{\partial y_0^2} + \left(\frac{\partial^2 G}{\partial x_0 \partial y_0} \right)^2$$

d'où

$$(24) \quad F = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\partial G}{\partial x_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y_0} \right)^2 \right] + G_2,$$

G_2 étant une fonction harmonique de x_0 et y_0 et, de plus, dans le cas présent, périodique par rapport au temps. Sa détermination précise, de même que celle de la fonction $f_2(t)$ dépendront des conditions aux limites envisagées.

La fonction χ_2 peut se mettre sous une autre forme, en introduisant la valeur de F , celle de sa seconde dérivée par rapport à t et en tenant compte des formules (19) et (22) :

$$(25) \quad \chi_2 = g\psi_2 - \frac{\partial^2 G_2}{\partial t^2} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial t} \right)^2 \right] + \left(\frac{\pi}{T} \right)^2 [\varphi_1^2 + \psi_1^2] + f_2(t).$$

Le rotationnel, au 3^e ordre près, vaut selon l'expression (14)

$$(26) \quad 2\zeta = h^2 \left[-\frac{\partial v}{\partial y_0} + 2 \frac{\partial(\varphi_{1t}, \varphi_1)}{\partial(x_0, y_0)} \right],$$

car les deux déterminants fonctionnels portant sur les fonctions φ_1 et ψ_1 sont égaux, eu égard aux relations (19) ; ils sont, en réalité, indépendants du temps, puisque v et ζ doivent l'être. Le rotationnel sera, en général, différent de zéro.

Remarque. — Les propositions générales énoncées dans ce qui suit supposent implicitement les restrictions faites sur les courants d'entraînement et dictées par l'observation des mouvements ondulatoires de la mer. Nous les résumons : *a.* les courants d'entraînement du premier ordre sont nuls ; *b.* les courants d'entraînement du second ordre, s'ils existent, sont essentiellement horizontaux.

Théorème. — La solution générale, du 2^e ordre d'approximation, pour les mouvements périodiques comporte un rotationnel dépendant d'une fonction arbitraire de la profondeur. Néanmoins, pour des amplitudes modérées, ce rotationnel, du 2^e ordre en h , est relativement petit par rapport aux éléments du 1^{er} ordre des mouvements, soit les déplacements et les vitesses.

Dans le cas d'une onde progressive simple, c'est-à-dire dont toutes les ondulations se propagent uniformément sans modification, il existe une solution irrotationnelle. En effet, les variables t et x_0 sont obligatoirement liées dans les formules par une relation linéaire et le déterminant fonctionnel contenu dans (26) étant indépendant de t l'est aussi de x_0 et devient fonction de la seule variable y_0 . On

peut donc rendre nulle l'expression de ζ ou, plus généralement, lui imposer une valeur arbitraire $\zeta(y_0)$ en disposant convenablement de $v(y_0)$.

La solution générale du 2^e ordre d'approximation des ondes progressives simples (houles), comporte soit un rotationnel, soit un courant horizontal d'entraînement des particules, dont l'intensité est fonction arbitraire de la seule profondeur.

Pour obtenir la solution générale du second ordre dans le système d'Euler, on utilisera la méthode exposée plus haut. Les vitesses données par les formules (10) détermineront une solution dérivée de la précédente, mais, au plus, par des termes du 3^e ordre.

On peut naturellement exprimer ces vitesses au moyen de la fonction résolvante $G(x, y, t)$ et des fonctions $G_2(x, y, t)$ et $v(y)$; néanmoins, il n'est plus possible d'introduire uniquement le potentiel habituel ϕ ou ses dérivées, comme on l'a fait pour la solution du 1^{er} ordre. La fonction primitive du potentiel par rapport au temps, soit hG , doit également figurer dans les formules.

Par contre, on peut exprimer, en fonction du seul potentiel ϕ , la formule donnant la valeur de la pression au 2^e ordre.

On obtient successivement, d'après les formules (8), (19) et (25) :

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho} &= g\left(y_0 + \frac{h}{g}\chi_1\right) + h^2\chi_2 = g\left[y_0 + h\psi_1 - \frac{h}{g}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + \frac{h}{g}f_1(t)\right] + h^2\chi_2 \\ &= gy - h\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - h^2\frac{\partial^2 G_2}{\partial t^2} - \frac{h^2}{2}\left[\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial t}\right)^2\right] + h^2\left(\frac{\pi}{T}\right)^2[\phi_1^2 + \psi_1^2] + hf_1(t) + h^2f_2(t). \end{aligned}$$

Pour passer entièrement aux variables d'Euler, il faut remplacer les coordonnées de repos par les coordonnées actuelles; c'est immédiat pour les termes du 2^e ordre; pour celui du 1^{er} ordre $\frac{h\partial^2 G(x_0, y_0, t)}{\partial t^2}$, on est conduit à l'écrire, eu égard aux expressions (19) et (22)

$$h\left(\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - h\phi_1\frac{\partial^2 G}{\partial t^2\partial x} - h\psi_1\frac{\partial^2 G}{\partial t^2\partial y}\right) = h\frac{\partial^2 G(x, y, t)}{\partial t^2} + h^2\left(\frac{\pi}{T}\right)^2[\phi_1^2 + \psi_1^2].$$

Tous comptes faits, il vient, en introduisant le potentiel ϕ et en groupant sous le nom de $f(t)$ des fonctions arbitraires de t :

$$\begin{aligned} (27) \quad \frac{p}{\rho} &= gy - h\frac{\partial^2 G(x, y, t)}{\partial t^2} - h^2\frac{\partial^2 G_2}{\partial t^2} - \frac{h^2}{2}\left[\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial t}\right)^2\right] + hf_1(t) + h^2f_2(t) \\ &= gy - \frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\right] + f(t) - h^2\frac{\partial^2 G_2}{\partial t^2}, \end{aligned}$$

la première expression faisant ressortir les quotes-parts des 1^{er} et 2^e ordre en h . Cette formule (27) est équivalente à la formule classique de Bernouilli (7), à l'exception du terme $-h^2\frac{\partial^2 G_2(x, y, t)}{\partial t^2}$.

Si l'on voulait obtenir une forme rigoureusement identique, au 3^e ordre près, il suffirait, ce qui est légitime, de grouper sous le nom de potentiel ϕ — complété au 2^e ordre — l'expression $h\frac{\partial G}{\partial t} + h^2\frac{\partial G_2}{\partial t}$.

Quoique les solutions des mouvements ondulatoires périodiques du 2^e ordre soient ordinairement rotationnelles, la formule habituelle de la pression, exprimée en fonction du potentiel, reste valable et est indépendante de la valeur du tourbillon.

Quant à ce dernier, grandeur du 2^e ordre, il s'exprime avec les variables

d'Euler directement sous la forme (26), en remplaçant les coordonnées de repos par les coordonnées actuelles.

Si l'on introduit les valeurs des vitesses (10) dans l'équation de continuité d'Euler (2), on voit qu'elle est vérifiée rigoureusement ; il ne saurait en être autrement puisque cette équation *linéaire* ne comporte que des termes des 1^{er} et 2^e ordres dont on savait d'avance qu'ils seraient nuls.

Ainsi la solution générale du 2^e ordre des phénomènes périodiques, exprimée avec les variables d'Euler, satisfait rigoureusement à l'équation de continuité. Elle n'en reste pas moins, au même titre que celle exprimée sous forme de Lagrange, une solution approchée, en particulier pour la vérification de la condition pression = const. en surface.

II. — Calcul des houles progressives rotationnelles, au deuxième ordre d'approximation, en profondeur finie, constante.

1^o PREMIER ORDRE D'APPROXIMATION.

L'expression classique du potentiel vaut dans ce cas :

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi &= -\frac{L}{T} \frac{h}{\text{Sh } \pi \frac{H}{L}} \text{Ch } \frac{\pi}{L} (H - y) \text{Sin } \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{L} \right) \\ &= -\frac{bh}{a \text{Sh } aH} \text{Ch } a (H - y) \text{Sin } (bt - ax), \end{aligned} \right.$$

d'où, en intégrant par rapport au temps selon la formule (20) et en introduisant les variables de Lagrange, l'expression de la fonction résolvante :

$$(29) \quad G = \frac{\text{Ch } a (H - y_0)}{a \text{Sh } aH} \text{Cos } (bt - ax_0).$$

H est la *profondeur de la masse liquide au repos*, $2L$ la *longueur d'onde*, $2h$ l'*amplitude* ou *hauteur* de l'ondulation. Au lieu de ces trois paramètres qui déterminent les *caractéristiques* du phénomène, il est plus simple d'en définir deux de dimension nulle ;

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} &\text{la cambrure } \gamma = \frac{h}{L}, \text{ rapport de l'amplitude à la longueur d'onde,} \\ &\text{et la longueur relative } \lambda = \frac{2L}{H}, \text{ c'est-à-dire la longueur d'onde rapportée à la profondeur, qui déterminent également le mouvement à un facteur d'homothétie près.} \\ &2T \text{ est la période.} \end{aligned} \right.$$

On a posé pour simplifier

$$(31) \quad \left\{ \begin{aligned} &a = \frac{\pi}{L}, \quad b = \frac{\pi}{T}, \\ &\text{d'où les relations} \\ &\frac{\pi H}{L} = aH = \frac{2\pi}{\lambda}. \end{aligned} \right.$$

D'après les formules (8) et (19), les équations de la houle s'écrivent alors

$$(32) \quad \begin{cases} x = x_0 + h \frac{\text{Ch } a(H - y_0)}{\text{Sh } aH} \sin(bt - ax_0) \\ y = y_0 - h \frac{\text{Sh } a(H - y_0)}{\text{Sh } aH} \cos(bt - ax_0) \\ \frac{p}{\rho g} = y_0 - \frac{h}{\text{Sh } aH} \left[\text{Sh } a(H - y_0) - \frac{b^2}{ag} \text{Ch } a(H - y_0) \right] \cos(bt - ax_0) + \frac{f_1(t)}{g} \end{cases}$$

La pression devant être constante en surface ($y_0 = 0$), il faut $f_1(t) = 0$ et g

$$\text{Sh } aH - \frac{b^2}{ag} \text{Ch } aH = 0$$

d'où

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} b = \sqrt{ag} \text{Th } aH, \\ \text{c'est-à-dire} \\ \frac{\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{L}} \text{Th } \pi \frac{H}{L} \end{array} \right.$$

et la vitesse de propagation :

$$(34) \quad V_1 = \frac{b}{a} = \frac{L}{T} = \sqrt{\frac{gL}{\pi}} \text{Th } \pi \frac{H}{L}.$$

On trouve ainsi l'expression définitive de la pression

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{p}{\rho g} = y_0 + h \cos(bt - ax_0) \left[\frac{\text{Ch } a(H - y_0)}{\text{Ch } aH} - \frac{\text{Sh } a(H - y_0)}{\text{Sh } aH} \right] \\ = y_0 + h \frac{\text{Sh } ay_0 \cos(bt - ax_0)}{\text{Sh } aH \text{Ch } aH}, \end{array} \right.$$

tandis que les vitesses, d'après les formules (9), valent

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = bh \frac{\text{Ch } a(H - y_0)}{\text{Sh } aH} \cos(bt - ax_0), \\ v = bh \frac{\text{Sh } a(H - y_0)}{\text{Sh } aH} \sin(bt - ax_0). \end{array} \right.$$

Ces dernières formules, en remplaçant les variables de Lagrange x_0, y_0 par celle d'Euler x, y , donnent également la solution du problème dans ce dernier système des variables. Les solutions dans les deux systèmes ne sont naturellement pas identiques mais ne peuvent différer, au plus, que de quantités du 2^e ordre en h .

Le mouvement répond aux six conditions requises :

1° Il satisfait aux équations de l'hydrodynamique et à l'équation de continuité, car G et φ sont harmoniques.

2° Il est périodique par rapport à x_0 — longueur d'onde $2L$.

3° Il s'effectue parallèlement au fond, car les déplacements verticaux sont nuls pour $y_0 = H$.

4° La pression est constante sur la surface libre.

5° L'amplitude verticale en surface vaut $2h$.

6° Il se propage sans déformation à vitesse constante V_1 . Il est donc périodique par rapport au temps — période $2T$.

Les trajectoires des particules primitivement au repos à la profondeur y_0 ,

données sous forme paramétrique par les deux premières équations (32), s'obtiennent en éliminant le temps t , entre ces deux équations; ce sont des *ellipses à grand axe horizontal*.

$$(37) \quad 2r = 2h \frac{\text{Ch } a(\Pi - \gamma_0)}{\text{Sh } aH}$$

et petit axe vertical

$$(37) \quad 2r' = 2h \frac{\text{Sh } a(\Pi - \gamma_0)}{\text{Sh } aH}$$

dont le centre est au point x_0, γ_0 .

Les particules situées au repos à une profondeur déterminée γ_0 se trouvent durant le mouvement sur des *trochoïdes elliptiques*.

La solution trouvée, répondant aux six conditions précédentes, est unique si, du moins, pour les raisons exposées, on ne considère pas, en première approximation, un courant d'ensemble des particules et, par conséquent, des solutions rotationnelles.

En effet, considérons la fonction analytique $f(z_0)$ de la variable $z_0 = \gamma_0 + ix_0$ dont G , fonction harmonique, est la partie réelle. La substitution $Z = e^{\frac{\pi z_0}{L}}$ fait correspondre au rectangle $0 \leq x_0 \leq 2L$, $0 \leq \gamma_0 \leq H$ une couronne dans laquelle $g(Z) \equiv f(z_0)$ est uniforme et régulière, puisque $f(z_0)$ comporte la période $2iL$. La fonction $g(Z)$ y est donc développable en série de Laurent. En en prenant la partie réelle, revenant à la variable z_0 et considérant la condition limite sur le fond, on trouve ainsi

$$(38) \quad G(x_0, \gamma_0, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \text{Ch } a_n(H - \gamma_0) \text{Cos}(-a_n x_0 + \beta_n)$$

où $a_n = na = n \frac{\pi}{L}$ et B_n, β_n sont des fonctions de t . La houle se propageant sans déformation, t et x_0 doivent apparaître en combinaison linéaire, donc B_n est indépendant de t et $\beta_n = b_n t + c_n$, tandis que la condition en surface donne, comme précédemment,

$$(39) \quad b_n = \sqrt{na g \text{Th } na H}.$$

Ces b_n étant *incommensurables* entre eux, la fonction (38) ne sera pas périodique par rapport au temps, à moins qu'elle ne comprenne qu'un seul terme, le premier, puisque la longueur d'onde est $2L$.

Enfin, la constante B_1 est fixée par l'amplitude $2h$ et c_1 peut être rendu nul en choisissant convenablement l'origine des temps. On retrouve ainsi obligatoirement l'expression (29) pour G .

Remarque. — On pourrait disposer de l'infinité des constantes B_n et c_n contenues dans (38) pour imposer, au moment initial, un profil périodique *arbitraire* de la surface libre, dont néanmoins l'ordonnée moyenne se situe au niveau de repos, mais, par la suite, ce profil, tout en restant périodique par rapport à x_0 , ne se retrouverait jamais identique à lui-même, car les divers trains d'ondes composants se propagent à des vitesses différentes, incommensurables entre elles.

2° DEUXIÈME ORDRE D'APPROXIMATION.

a. *Calcul de la solution.* — Les formules (23) à (25) donnent l'expression générale des termes du 2° ordre en h .

La fonction F s'écrit tout d'abord, compte tenu de la valeur (29) de G

$$(40) \quad \begin{cases} F = \frac{1}{4 \operatorname{Sh}^2 a H} [\operatorname{Sh}^2 a (H - y_0) + \operatorname{Sin}^2 (bt - ax_0)] + G_2 \\ = \frac{1}{8 \operatorname{Sh}^2 a H} [\operatorname{Ch} 2 a (H - y_0) - \operatorname{Cos} 2 (bt - ax_0)] + G_2 \end{cases}$$

et le terme du 2^e ordre de la pression

$$\chi_2 = g \frac{\partial G_2}{\partial y_0} - \frac{\partial^2 G_2}{\partial t^2} + f_2(t) + \frac{b^2}{4 \operatorname{Sh}^2 a H} [\operatorname{Ch} 2 a (H - y_0) - 3 \operatorname{Cos} 2 (bt - ax_0) - \operatorname{Cth} a H \times \operatorname{Sh} 2 a (H - y_0)].$$

Il faut maintenant déterminer la fonction G_2 harmonique de x_0 et y_0 et de période $2T$ et la fonction $f_2(t)$ de telle façon que

- 1^o χ_2 soit nul en surface,
- 2^o le terme du 2^e ordre du déplacement vertical soit nul sur le fond, c'est-à-dire

$$\psi_2 = \frac{\partial F}{\partial y_0} = 0$$

pour $y_0 = H$, ou, ce qui revient au même, $\frac{\partial G_2}{\partial y_0} = 0$, car l'autre terme de $\frac{\partial F}{\partial y_0}$ s'annule sur le fond.

On trouve ainsi

$$(41) \quad \begin{aligned} G_2 &= \frac{3}{16} \frac{\operatorname{Ch} 2 a (H - y_0)}{\operatorname{Sh}^4 a H} \operatorname{Cos} 2 (bt - ax_0), \\ f_2(t) &= \frac{ag}{4 \operatorname{Sh} a H \operatorname{Ch} a H}. \end{aligned}$$

Les équations de la houle sous leur forme définitive s'écrivent alors, compte tenu des termes du 1^{er} ordre :

$$(42) \quad \begin{cases} x = x_0 + \frac{h \operatorname{Ch} a (H - y_0) \operatorname{Sin} (bt - ax_0)}{\operatorname{Sh} a H} - \frac{h^2 a \operatorname{Sin} 2 (bt - ax_0)}{4 \operatorname{Sh}^2 a H} \left[1 - \frac{3 \operatorname{Ch} 2 a (H - y_0)}{2 \operatorname{Sh}^2 a H} \right] \\ \quad + h^2 v(y_0) \times t, \\ y = y_0 - \frac{h \operatorname{Sh} a (H - y_0) \operatorname{Cos} (bt - ax_0)}{\operatorname{Sh} a H} - \frac{h^2 a \operatorname{Sh} 2 a (H - y_0)}{4 \operatorname{Sh}^2 a H} \left[1 + \frac{3 \operatorname{Cos} 2 (bt - ax_0)}{2 \operatorname{Sh}^2 a H} \right], \\ \frac{p}{\rho g} = y_0 + \frac{h \operatorname{Sh} a y_0 \operatorname{Cos} (bt - ax_0)}{\operatorname{Sh} a H \operatorname{Ch} a H} + \frac{h^2 a \operatorname{Sh} a y_0}{4 \operatorname{Sh}^2 a H} \left\{ 3 \operatorname{Cos} 2 (bt - ax_0) \left[\frac{\operatorname{Ch} a y_0}{\operatorname{Sh}^2 a H} \right. \right. \\ \quad \left. \left. - \frac{2 \operatorname{Ch} a (H - y_0)}{\operatorname{Ch} a H} \right] + \frac{2 \operatorname{Ch} a (H - y_0)}{\operatorname{Ch} a H} \right\} \end{cases}$$

ou, en introduisant les valeurs (37) de r et r' :

$$(43) \quad \begin{cases} x = x_0 + r \operatorname{Sin} (bt - ax_0) - \frac{a}{4} (r^2 - r'^2) \operatorname{Sin} 2 (bt - ax_0) \left[1 - \frac{3 \operatorname{Ch} 2 a (H - y_0)}{2 \operatorname{Sh}^2 a H} \right] \\ \quad + h^2 v t, \\ y = y_0 - r' \operatorname{Cos} (bt - ax_0) - \frac{a r r'}{2} \left[1 + \frac{3 \operatorname{Cos} 2 (bt - ax_0)}{2 \operatorname{Sh}^2 a H} \right]. \end{cases}$$

Ces équations définissent la houle périodique la plus générale du 2^e ordre, c'est-à-dire satisfaisant strictement, à cet ordre d'approximation, à toutes les équations de

l'hydrodynamique et aux conditions aux limites. Le mouvement dépend d'un courant horizontal d'entraînement des particules, du 2^e ordre en h , dont la loi de répartition suivant la profondeur ou celle du rotationnel correspondant peut-être fixée arbitrairement.

Inversement, le mouvement ainsi défini est unique car, dans ces conditions, les fonctions G_2 et f_2 se ramènent aux valeurs (41) déjà trouvées. Soit $G_2 + G'_2$ et $f_2 + f'_2$ les solutions les plus générales satisfaisant aux conditions de définition toutes linéaires de G_2 et f_2 , ces dernières fonctions ayant les valeurs (41). Sans nuire à la généralité, on peut poser $G'_2 = f'_2 = 0$.

En effet, ces deux dernières fonctions satisfont aux mêmes conditions que celles déterminant G et f_1 . On a donc bien $f'_2 = 0$; quant à G'_2 , il ne peut être que nul ou proportionnel à une solution G et, dans ce dernier cas, peut lui être incorporé, ce qui revient à choisir convenablement l'origine des temps et à modifier l'expression du paramètre h définissant l'amplitude. On voit aisément que la nouvelle solution trouvée, à part un changement sans importance de la désignation de l'amplitude, ne diffère, au plus, de la précédente que par des quantités du 3^e ordre; elle lui est donc équivalente.

Il suit de cette condition d'unicité que la valeur des expressions (42), pour $H = \infty$ et $v = 0$, doit correspondre à la solution de Gerstner limitée au 2^e ordre d'approximation. On le vérifierait aisément.

b. *Rotationnel.* — Il vaut selon la formule (26) :

$$(44) \quad 2\zeta = h^2 \left[-\frac{\partial v}{\partial y_0} + 2 \frac{\partial(\varphi_{11}, \varphi_1)}{\partial(x_0, y_0)} \right] = -h^2 \left[\frac{\partial v}{\partial y_0} + \frac{a^2 b \operatorname{Sh} 2a(H - y_0)}{\operatorname{Sh}^2 a H} \right].$$

$v(y_0)$ étant arbitraire, ζ l'est aussi. Si ce dernier est donné, on obtiendra le courant d'entraînement v par une intégration le fixant, à un courant uniforme près, sans influence au point de vue dynamique.

c. *Houle irrotationnelle (type Stokes).* — Si l'on admet une application stricte du théorème de Lagrange, l'intensité tourbillonnaire doit être nulle dans toute la masse. L'équation (44) pour $\zeta = 0$, donne, après intégration

$$(45) \quad h^2 v(y_0) = \frac{h^2 ab}{2 \operatorname{Sh}^2 a H} \left[\operatorname{Ch} 2a(H - y_0) - \frac{\operatorname{Sh} 2aH}{2aH} \right],$$

en disposant de la constante d'intégration afin que

$$(46) \quad \int_0^H v(y_0) dy_0 = 0,$$

c'est-à-dire, de façon que le transport moyen de masse au travers d'un plan vertical soit nul, cette condition devant être approximativement réalisée près d'un rivage. La fonction positive $\operatorname{Ch} 2a(H - y_0)$ décroît constamment lorsque y_0 varie de 0 à H . La surface incluse entre la courbe $v(y_0)$ et l'axe y_0 étant nulle d'après (46), il suit que le courant d'entraînement des particules, d'abord positif dans les zones superficielles, s'annule et devient négatif dans les zones profondes (fig. 5).

Une houle irrotationnelle est obligatoirement accompagnée d'un courant horizontal d'entraînement des particules dirigé, dans les parties superficielles, dans le sens de la propagation et en sens inverse dans les parties profondes. Il n'existe en 2^e approximation qu'une houle de cette nature de caractéristiques données.

Si la profondeur devient infinie, le courant subsiste, mais s'annule à grande

profondeur. En effet, en ne retenant que les parties principales des fonctions hyperboliques et passant à la limite, on trouve d'après la formule (45) :

$$(47) \quad h^2 v(y_0) = h^2 a b e^{-2ay_0}, \text{ pour } H = \infty.$$

Le courant d'entraînement, très petit pour des houles de faible cambrure, devient sensible pour des houles de tempête. En surface, dans le cas d'une profondeur illimitée, son intensité vaut $\pi^2 \gamma^2 V_1$ d'après les formules (30), (34) et (47). Pour une cambrure $\gamma = 1/10^\circ$, par exemple, il est sensiblement égal à 10 pour cent de la vitesse de propagation, soit 1,25 m/sec. pour une houle longue de 100 mètres.

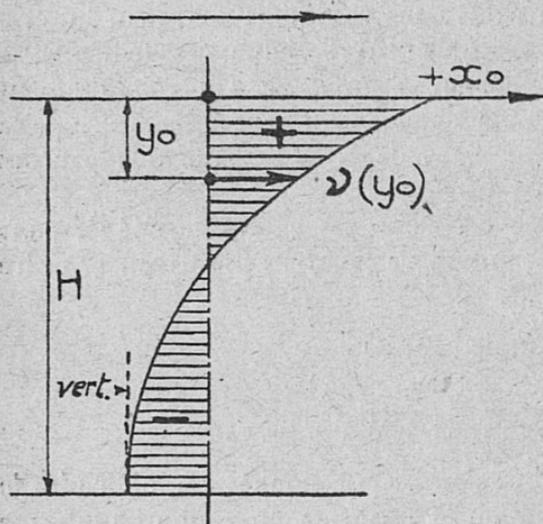


Fig. 5. — Courant d'entraînement, variable avec la profondeur, d'une houle irrotationnelle du 2^e ordre d'approximation.

dit, selon les conventions faites, le rotationnel est de sens opposé à la propagation. Il diminue régulièrement, en valeur absolue, de la surface jusqu'au fond où il s'annule. Dans le cas d'une profondeur illimitée, on aurait

$$\zeta(y_0) = -h^2 a^2 b e^{-2ay_0}, \quad \text{pour } H = \infty.$$

e. Houles rotationnelles normales. — On peut appeler de ce nom une simple infinité de houles comprenant comme cas particuliers les types Stokes et Boussinesq. On les définira par

$$(48) \quad \zeta(y_0) = \mu \frac{h^2 a^2 b}{2 \operatorname{Sh}^2 a H} \operatorname{Sh} 2 a (H - y_0),$$

μ étant un coefficient quelconque. Ce rotationnel décroît rapidement, en valeur absolue, au fur et à mesure qu'on s'approche du fond, où il s'annule. C'est la répartition de la rotation des particules à laquelle on peut s'attendre, par suite de l'action du vent, les efforts tangentiels produits par ce dernier devant se transmettre par frottement, mais de plus en plus affaiblis, aux couches profondes.

d. Houle à courant d'entraînement nul (type Boussinesq). Elle répond à $v(y_0) = 0$ et se trouve également, au 2^e ordre d'approximation, la seule houle de cette nature de caractéristiques données. La rotation moyenne des particules,

$$\zeta(y_0) = -\frac{h^2 a^2 b}{2 \operatorname{Sh}^2 a H} \operatorname{Sh} 2 a (H - y_0),$$

découlant de la formule (44), est négative dans toute la masse liquide, c'est-à-dire correspond à une rotation amenant l'axe y_0 sur l'axe x_0 , soit, dans notre cas, en sens inverse des aiguilles d'une montre. Cette rotation est de sens contraire à celle des particules sur leur orbite. Autrement

Par intégration, on en déduit, dans le cas d'un transport moyen de masse nul, la valeur suivante du courant d'entraînement :

$$(49) \quad h^2 v(y_0) = (\mu + 1) \frac{h^2 a b}{2 \text{Sh}^2 a H} \left[\text{Ch} 2 a (H - y_0) - \frac{\text{Sh} 2 a H}{2 a H} \right].$$

1° Si μ est positif, la rotation moyenne se fait dans le sens de celle des particules sur leur orbite. Le courant d'entraînement correspondant est semblable à celui de la fig. 5, mais d'intensité plus grande, car $(\mu + 1) > 1$. C'est à quoi on peut s'attendre par vent violent soufflant dans le sens de la propagation.

2° Si $\mu = 0$, on obtient la solution irrotationnelle de Stokes (fig. 5) qui doit se produire au début de la perturbation, quand les actions tangentielles du vent n'ont pas encore eu le temps de mettre en rotation sensible les particules liquides.

3° Si $-1 < \mu < 0$, on obtient des solutions à rotationnel négatif, mais, néanmoins, à courant d'entraînement dirigé comme celui de la fig. 5 et d'intensité moindre.

4° Si $\mu = -1$ (solution du type Boussinesq), le rotationnel est négatif et le courant d'entraînement nul.

5° Enfin, pour $\mu < -1$, le rotationnel et le courant d'entraînement en surface sont tous deux négatifs, c'est-à-dire de sens opposé à la propagation. Ce type de houle, assez exceptionnel, ne devait guère pouvoir se produire qu'en admettant l'action assez prolongée d'un vent soufflant en sens inverse de la propagation sur une houle déjà établie.

L'observation des courants d'entraînement, au moyen de flotteurs de surface ou maintenus immergés à diverses profondeurs, devrait permettre la détermination des natures de houle se produisant ordinairement (1). Les types 3 et 4 devraient être les plus fréquents hors de la zone d'action du vent, car les courants d'entraînement sont alors notoirement faibles, mais la présence d'un rotationnel de sens opposé à la propagation est assez paradoxale. Nous suggérons, comme explication possible, que le mécanisme progressif de transmission de la houle, pour la fluide imparfait qu'est l'eau, introduit, afin que puisse se maintenir sensiblement nul le courant d'entraînement, des actions tangentielles de sens tel qu'elles mettent les particules en rotation négative.

f. *Trajectoires du mouvement.* — x_0 et y_0 ayant des valeurs données, les deux premières équations (42) représentent les trajectoires sous forme paramétrique en fonction du temps. En supposant d'abord $v(y_0) = 0$ et en éliminant t , on obtient pour les trajectoires, non des ellipses, comme au premier ordre, mais des courbes de degré supérieur dont il est inutile d'écrire l'équation. Elles possèdent un seul axe de symétrie vertical, mais différent néanmoins peu d'une ellipse pour les cambrures courantes de la houle. Si v est différent de zéro, les trajectoires ne sont plus fermées, mais se déplacent à la vitesse $h^2 v$ dans la direction x_0 (fig. 6). Lorsque y_0 croît, ces orbites s'aplatissent pour se réduire, sur le fond, à un simple mouvement de va et vient.

(1) Bertin et de Caligny ont trouvé que dans une mer peu profonde il existe près du fond un courant de même sens qu'à la surface; le contre-courant se produit à mi-profondeur avec maximum aux $2/5$ de la profondeur à partir du fond. Voir H. Bouasse. *Houle...*, etc., p. 55. On comprendrait que la rugosité du fond puisse arrêter le contre-courant sur le fond, mais non pas qu'il modifie son signe. Cet exemple incite, jusqu'à plus ample informé, à ne pas attribuer une valeur trop générale à la loi de distribution simple donnée par (49).

g. *Surface libre* $y_0 = 0$ et *surfaces* $y_0 = \text{constante}$. — Les particules d'ordonnée de repos y_0 se disposent, pendant le mouvement, sur une surface courbe dont le profil, à un moment donné, est représenté par les deux premières équations (42), le paramètre variable étant x_0 .

1° Ces profils se reproduisent à chaque longueur d'onde $2L$ ou période de temps $2T$.

2° Leurs points hauts et bas sont donnés par l'équation

$$(50) \quad \frac{\partial y}{\partial x_0} = -ar' \sin(bt - ax_0) - \frac{3a^2 r r'}{2} \frac{\sin 2(bt - ax_0)}{\text{Sh}^2 aH} = 0$$

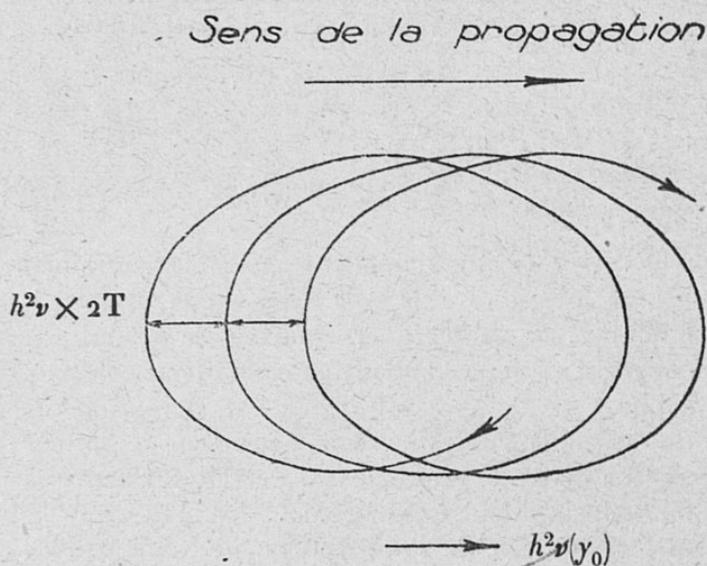


Fig. 6. — Trajectoires des particules d'une houle à courant d'entraînement dirigé dans le sens de la propagation.

dont une solution est

$$\sin(bt - ax_0) = 0,$$

d'où

$$(51) \quad x_0 = \frac{bt}{a} + K \frac{\pi}{a} = \frac{bt}{a} + KL,$$

K entier quelconque.

Ces points se déplacent uniformément à la vitesse de propagation $V_1 = \frac{b}{a}$; ils se trouvent sur une série de verticales distantes de L et leur valeur, introduite dans la première équation (42), fournit la relation

$$(52) \quad x = x_0 + h^2 vt.$$

Par conséquent, abstraction faite du courant d'entraînement, les particules situées aux points hauts et bas des profils se trouvent sur la verticale de leur position de repos. En ces points, la composante verticale de la vitesse est également nulle, car l'équation (50) est proportionnelle à $\frac{dy}{dt}$; donc, ces points correspondent aussi aux points hauts et bas des trajectoires.

Les valeurs paires de K se rapportent aux points hauts, les valeurs impaires aux points bas.

3° D'après leur expression, les profils $y_0 = \text{const.}$ sont, à tout instant, symétriques par rapport à une verticale passant, soit par un point haut, soit par un point bas. Ils diffèrent peu de trochoïdes elliptiques.

4° Les valeurs (51), introduites dans la deuxième équation (42), donnent comme ordonnées des points hauts et bas :

$$y = y_0 - \frac{arr'}{2} \left[1 + \frac{3}{2 \text{Sh}^2 a H} \right] \mp r'.$$

Le niveau moyen de la surface $y_0 = \text{const.}$ est donc à une hauteur égale à $\frac{arr'}{2} \left[1 + \frac{3}{2 \text{Sh}^2 a H} \right]$ au-dessus du niveau de repos, tandis que les points hauts et bas ont une cote différant de $2r'$.

Sur la surface libre, les points hauts — crêtes — et les points bas — creux — diffèrent d'une cote $2h$ — l'amplitude de la houle —, tandis que la surélévation du niveau moyen de l'eau au-dessus du plan de repos vaut :

$$(53) \quad \frac{\pi h^2}{2L} \text{Cth} \pi \frac{H}{L} \left[1 + \frac{3}{2 \text{Sh}^2 a H} \right] = \frac{\pi h^2}{2L} \text{Cth} \pi \frac{H}{L} \times \alpha.$$

Cette valeur diffère de celle qu'on est convenu d'attribuer habituellement à la surélévation, soit

$$(54) \quad \frac{\pi h^2}{2L} \text{Cth} \pi \frac{H}{L},$$

par la présence d'un facteur α plus grand que l'unité et dû à la fonction G_2 . L'excédent $(\alpha - 1)$, négligeable si la profondeur est grande, ne l'est plus si celle-ci diminue; il peut même devenir prépondérant. En admettant, par exemple, une longueur relative $\lambda = \frac{2L}{H} = 8$, nullement excessive, il vaut déjà 1,98, d'où $\alpha = 2,98$ et l'expression classique de la surélévation du niveau moyen est sensiblement triplée.

La fonction harmonique G_2 a été introduite afin que le terme du 2° ordre de la pression soit nul en surface. Si on néglige cette condition, on peut attribuer à G_2 des valeurs fort diverses, le faire nul par exemple.

On obtient ainsi des solutions partielles du 2° ordre. Pour $G_2 = 0$, par exemple, α se réduit à l'unité. C'est une solution de cette nature qui résulte du Mémoire de Barré de Saint Venant et Flamant (1) qu'a rappelé Sainflou dans son « Essai sur les Dignes maritimes verticales » (2). On voit qu'elle peut différer passablement de celle répondant strictement au 2° ordre d'approximation (3).

(1) *Annales des Ponts et Chaussées*, 1888.

(2) *Annales des Ponts et Chaussées*, 1928, IV. Les formules p. 12 de ce Mémoire sont identiques aux deux premières formules (42), si, dans celles-ci, on néglige, dans les termes du 2° ordre en h , 1° les seconds termes des parenthèses provenant de la fonction G_3 , 2° le courant d'entraînement $h^2 \rho t$ et 3° la quantité ordinairement assez petite $a(r^2 - r'^2)$.

(3) On pourrait être tenté de considérer la plus ou moins parfaite réalisation de la condition de pression constante en surface comme une condition moins importante que d'autres, celles de l'équilibre dynamique, de l'incompressibilité de l'eau etc... Quoique cette condition soit approximativement satisfaite dans la pratique, il n'en est rien, puisque l'allure du mouvement en dépend nettement. C'est elle d'ailleurs qui, au premier ordre d'approximation, détermine une caractéristique essentielle du mouvement, la vitesse de propagation.

Par ailleurs, l'examen de la houle limite sur le point de déferler, montrera plus loin que la valeur (53), trouvée pour la surélévation, paraît mieux cadrer avec l'expérience que la formule habituelle (54).

h. *Limites d'application des formules.* — Les expressions (42) sont donc susceptibles de donner des résultats plus conformes à l'expérience que des formules plus sommaires. Par contre, elles ne peuvent le faire que dans certaines limites et possèdent un *domaine de validité* bien caractérisé.

Ce n'est pas une imperfection des formes plus complètes; au contraire, ces restrictions apprennent à se montrer prudent dans l'emploi de formules simples, dont le domaine de validité est, *a priori*, encore plus limité et, en général, indéterminé.

Le critère fixant la limite d'application des formules (42) est celui résultant de l'équation (50) donnant les crêtes et les creux de la surface libre. A part les solutions déjà signalées de cette équation, il peut y en avoir d'autres dues au

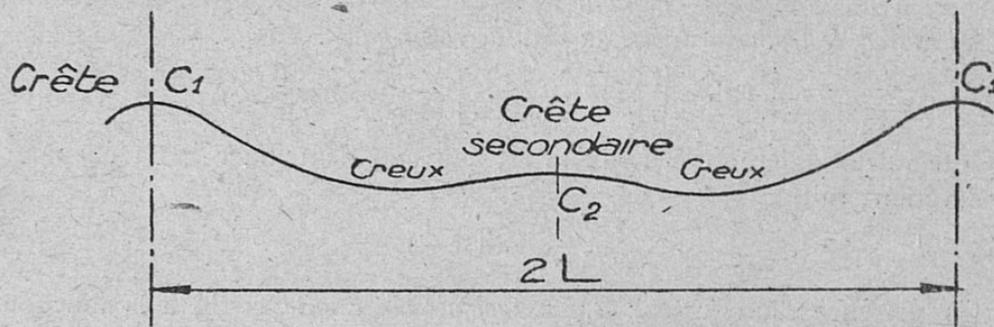


Fig. 7. — Forme de la surface libre d'une houle avec crête secondaire.

terme du 2^e ordre provenant de G_2 . La surface libre présentant alors la forme de la fig. 7, avec crête secondaire en C_2 , non conforme à l'expérience, est à rejeter; la valeur extrême acceptable pour la cambrure est celle pour laquelle la courbure de la surface libre en C_2 devient nulle, c'est-à-dire pour

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_0^2} = a^2 r' \cos(bt - ax_0) + 3 \frac{a^3 r r'}{\text{Sh}^2 a H} \cos 2(bt - ax_0) = 0$$

au point $y_0 = 0$ et $x_0 = \frac{bt}{a} - L$,

d'où

$$\gamma_1 = \frac{h}{L} = \frac{\text{Sh}^2 a H}{3\pi} \text{Th} a H.$$

On verra plus loin que la houle ne peut, sans déferler, posséder une cambrure supérieure à

$$(55) \quad \gamma_d = \frac{h}{L} = 0,140 \text{Th} a H.$$

Cette seconde limite est plus petite que la précédente pour toutes les valeurs de

$$\lambda = \frac{2L}{H} < 6,5.$$

Par conséquent, sauf pour des longueurs relatives supérieures à 6,5, correspondant à des *mers peu profondes*, les formules (42) sont applicables, sans restriction,

à toutes les houles physiquement réalisables. Pour des valeurs de λ comprises entre 6,5 et 10 elles le resteront avec une approximation tolérable. Elles ne le seraient plus si $\lambda > 10$, c'est-à-dire pour des mers encore moins profondes, qui offrent d'ailleurs peu d'intérêt au point de vue des applications.

i. *Houle du deuxième ordre dans le système d'Euler.* — Les vitesses des particules ressortent dans le système de Lagrange des formules (9), dans le système d'Euler, des formules (10) pour les vitesses et (27) pour la pression. — Nous n'écrivons pas cette dernière, car la propriété essentielle $p = 0$ en surface n'apparaît pas immédiatement, comme c'est le cas dans le système de Lagrange (3^e formule 42).

Variables de Lagrange :

$$(56) \left\{ \begin{aligned} u &= \frac{dx}{dt} = hb \frac{\text{Ch } a(H-y_0) \text{Cos}(bt-ax_0)}{\text{Sh } aH} \\ &\quad - \frac{h^2 ab}{2 \text{Sh}^2 aH} \text{Cos } 2(bt-ax_0) \left[1 - \frac{3}{2} \frac{\text{Ch } 2a(H-y_0)}{\text{Sh}^2 aH} \right] + h^2 v(y_0), \\ v &= \frac{dy}{dt} = hb \frac{\text{Sh } a(H-y_0) \text{Sin}(bt-ax_0)}{\text{Sh } aH} + \frac{h^2 ab}{2 \text{Sh}^2 aH} \text{Sin } 2(bt-ax_0) \frac{3}{2} \frac{\text{Sh } 2a(H-y_0)}{\text{Sh}^2 aH}. \end{aligned} \right.$$

Variables d'Euler :

$$(57) \left\{ \begin{aligned} u &= hb \frac{\text{Ch } a(H-y) \text{Cos}(bt-ax)}{\text{Sh } aH} \\ &\quad - \frac{h^2 ab}{2 \text{Sh}^2 aH} \text{Ch } 2a(H-y) \left[1 - \frac{3}{2} \frac{\text{Cos } 2(bt-ax)}{\text{Sh}^2 aH} \right] + h^2 v(y), \\ v &= hb \frac{\text{Sh } a(H-y) \text{Sin}(bt-ax)}{\text{Sh } aH} + \frac{h^2 ab}{2 \text{Sh}^2 aH} \text{Sh } 2a(H-y) \frac{3}{2} \frac{\text{Sin } 2(bt-ax)}{\text{Sh}^2 aH}. \end{aligned} \right.$$

Ces deux mouvements diffèrent, au plus, de termes du 3^e ordre.

Les formules (57) représentent, dans le système d'Euler, la seule solution possible de houle périodique en profondeur constante avec courant d'entraînement $h^2 v(y)$ donné, satisfaisant strictement, au 3^e ordre près, à toutes les conditions du problème. A noter que, sous cette forme, le courant d'entraînement n'apparaît pas clairement; rien ne permet de distinguer, *a priori*, dans les termes du 2^e ordre de u , le courant d'entraînement $h^2 v(y)$ de la quantité non périodique $-\frac{h^2 ab}{2 \text{Sh}^2 aH} \text{Ch } 2a(H-y)$ qui ne représente cependant aucun courant de cette nature.

Pour les houles rotationnelles normales de coefficient μ , on trouve pour v la valeur (57) et pour u , à un courant uniforme près :

$$u = hb \frac{\text{Ch } a(H-y) \text{Cos}(bt-ax)}{\text{Sh } aH} + \frac{h^2 ab \text{Ch } 2a(H-y)}{2 \text{Sh}^2 aH} \left[\mu + \frac{3}{2} \frac{\text{Cos } 2(bt-ax)}{\text{Sh}^2 aH} \right].$$

j. *Équation explicite de la surface libre.* — Pour l'obtenir au moyen des coordonnées rectangulaires x et y , on doit remplacer x_0 par x dans la 2^e formule (42) en arrêtant les développements aux termes en h^2 .

Il vient ainsi pour la surface $y_0 = \text{const}$:

$$(58) \left\{ \begin{aligned} y &= y_0 + h\psi_1(x, y_0, t) + h^2\psi_2(x, y_0, t) = y_0 + h\psi_1(x, y_0, t) \\ &\quad + h^2 \left[\psi_2(x, y_0, t) - \varphi_1(x, y_0, t) \frac{\partial \psi_1(x, y_0, t)}{\partial x} \right] \end{aligned} \right.$$

et, pour la surface libre, tous calculs faits :

$$(59) \quad y = -h \cos(bt - ax) - \frac{h^2 a}{2} \operatorname{Cth} aH \cos 2(bt - ax) \left[1 + \frac{3}{2 \operatorname{Sh}^2 aH} \right].$$

Le courant d'entraînement v n'apparaîtrait dans cette formule que dans les termes du 3^e ordre. Cette dernière expression met en évidence la forme (53) de la surélévation.

k. *Vitesses de propagation apparente et effectives.* — L'expérience fait présumer et les solutions rigoureuses connues confirment que la houle se propage à une vitesse déterminée, *constante dans toute la masse liquide*. Autrement dit, les points hauts et bas des profils $y_0 = \text{const.}$ restent alignés pendant le mouvement sur une série de plans verticaux parallèles passant par les crêtes et les creux de la surface libre. Nous appellerons *célérité ou vitesse de propagation apparente* V_a la *vitesse de déplacement de ces plans verticaux*. C'est une constante parfaitement déterminée si l'on admet, comme on le fera dans la suite, que le transport moyen de masse au travers d'un plan vertical fixe est nul.

Les vitesses de propagation effectives V_e s'obtiendront en soustrayant de la vitesse apparente les vitesses d'entraînement :

$$(60) \quad V_e = V_a - h^2 v(y_0).$$

Dans le cas des houles de types Boussinesq ou Gerstner, les vitesses apparente et effectives de propagation sont naturellement confondues et constantes. A ces exceptions près, les vitesses effectives de propagation varient avec $v(y_0)$ et la profondeur. Pour la houle irrotationnelle de Stokes et les houles normales avec $\mu > -1$, ces vitesses effectives croissent régulièrement avec la profondeur.

Si l'on suit dans son déplacement une crête déterminée, on doit avoir, par exemple, $bt - ax_0 = 0$, d'où $x_0 = \frac{bt}{a}$.

Or, on a vu — (formule 52) — que les points hauts des surfaces $y_0 = \text{const.}$ ont comme abscisse

$$x = x_0 + h^2 vt = t \left(\frac{b + h^2 av}{a} \right) = t V_a.$$

V_a étant indépendant de y_0 , il doit en être de même de $b + h^2 av = b_0$.

Donc, la fréquence du mouvement ondulatoire

$$(61) \quad \frac{1}{2T} = \frac{b}{2\pi} = \frac{b_0}{2\pi} \left[1 - \frac{h^2 av(y_0)}{b_0} \right]$$

n'est pas constante en réalité, mais dépend d'une quantité variable du 2^e ordre, fonction de y_0 . Pour la houle de Stokes, par exemple, elle croît un peu avec la profondeur. C'est de cette variation de la fréquence combinée avec celle du courant d'entraînement que résulte une vitesse de propagation apparente constante dans toute la masse liquide. La modification de structure des équations de base due à la relation (61) importe peu pour nous, car elle n'apporte que des termes nouveaux du 3^e ordre.

D'ailleurs, la vitesse apparente de propagation V_a n'est pas strictement égale à l'expression (34), mais en diffère de quantités — constantes — du 2^e ordre en h . Sa détermination précise nécessitant la recherche de termes de la houle d'ordre supérieur au 2^e ordre sort du cadre de cette étude. A titre d'exemple des considérations précédentes, nous envisagerons néanmoins le cas d'une houle irrotation-

nelle en profondeur illimitée, pour laquelle on connaît la *vitesse* (apparente) de propagation, déjà indiquée par Stokes au 2^e ordre :

$$V_a = \sqrt{\frac{gL}{\pi}} \left(1 + \frac{a^2 h^2}{2} \right) = \sqrt{\frac{gL}{\pi}} \left[1 + \left(\frac{\pi h}{L} \right)^2 \times \frac{1}{2} \right].$$

Elle est supérieure à la valeur $\sqrt{\frac{gL}{\pi}}$ de la vitesse de la houle de Gerstner et croît avec l'amplitude. En vertu de l'équation (47), les vitesses effectives de propagation s'écrivent

$$V_e = V_a - h^2 \nu = \sqrt{\frac{gL}{\pi}} \left[1 + \left(\frac{\pi h}{L} \right)^2 \left(\frac{1}{2} - e^{-\frac{2\pi\gamma_0}{L}} \right) \right].$$

À grande profondeur, ces vitesses tendent vers V_a ; elles décroissent constamment au fur et à mesure qu'on se rapproche de la surface où V_e prend sa valeur minimum

$$V_{e \min} = \sqrt{\frac{gL}{\pi}} \left[1 - \left(\frac{\pi h}{L} \right)^2 \times \frac{1}{2} \right].$$

Cette vitesse est inférieure à celle de la houle de Gerstner et décroît si l'amplitude augmente.

Pour une valeur de la cambrure $\gamma = \frac{h}{L} = 0,14$ correspondant aux houles les plus creuses physiquement réalisables, V_a et $V_{e \min}$ diffèrent de la vitesse classique de Gerstner de

$$\pm (0,14 \pi)^2 \times \frac{1}{2} = \pm 9,7 \%.$$

Les variations seraient bien plus faibles pour les cambrures courantes.

III. — Calcul des clapotis, au deuxième ordre d'approximation, en profondeur finie, constante.

1^o PREMIER ORDRE D'APPROXIMATION.

Le clapotis étant produit par l'interférence de deux trains d'ondes opposés de mêmes caractéristiques, son potentiel s'écrit d'après l'équation (28)

$$\varphi = \frac{-bh}{a} \frac{\text{Ch } a(H-\gamma)}{\text{Sh } aH} [\text{Sin}(bt - ax) - \text{Sin}(bt + ax)] = \frac{2hb}{a} \frac{\text{Ch } a(H-\gamma)}{\text{Sh } aH} \text{Sin } ax \text{ Cos } bt.$$

On en déduit, dans le système de Lagrange

$$(62) \quad \left\{ \begin{array}{l} G = \frac{2 \text{Ch } a(H-\gamma_0)}{a \text{Sh } aH} \text{Sin } ax_0 \text{ Sin } bt, \\ \varphi_1 = \frac{2 \text{Ch } a(H-\gamma_0)}{\text{Sh } aH} \text{Cos } ax_0 \text{ Sin } bt, \\ \psi_1 = -2 \frac{\text{Sh } a(H-\gamma_0)}{\text{Sh } aH} \text{Sin } ax_0 \text{ Sin } bt. \end{array} \right.$$

et des valeurs de x , y et p que nous écrirons ultérieurement en les complétant des des termes du 2° ordre.

Le mouvement ainsi défini satisfait aux sept conditions suivantes qui précisent de façon unique les propriétés et caractéristiques du clapotis.

- 1° Les équations générales de l'hydrodynamique et l'équation de continuité sont vérifiées, car G et φ sont harmoniques.
- 2° Le phénomène est périodique par rapport à x_0 — longueur d'onde $2L$.
- 3° Le mouvement s'effectue parallèlement au fond.
- 4° La pression est constante sur la surface libre.
- 5° L'amplitude du mouvement en surface est $4h$.
- 6° Le mouvement est périodique par rapport au temps — période $2T$.
- 7° Le mouvement s'effectue verticalement le long de plans équidistants d'une demi-longueur d'onde, en l'espèce d'abscisses $x_{0K} = \frac{L}{2} + KL$, K entier quelconque.

Les propriétés 1°, 2°, 3°, 4° et 6°, identiques à celles définissant la houle, sont vérifiées, puisque c'est le cas pour chacun des deux trains d'ondes composants. Les propriétés 5° et 7° résultent des valeurs extrêmes ± 2 atteintes par ψ_1 en surface et de la relation $\varphi_1 = 0$ pour les abscisses x_{0K} .

Un des plans le long desquels le mouvement s'effectue verticalement peut être matérialisé par une paroi verticale qui provoquera le clapotis par réflexion de la houle incidente.

Quant à la condition *d'unicité*, elle ressort des considérations suivantes :

La fonction G devra être de la forme (38) pour satisfaire aux trois premières conditions ci-dessus. De plus, $\frac{\partial G}{\partial x_0} = \varphi_1$ devant être identiquement nul pour x_{0K} , il s'en suit $\beta_n = n \frac{\pi}{2}$. La condition de pression constante en surface donne, d'autre part, d'après les équations (19) et quel que soit x_0

$$g \frac{\partial G}{\partial y_0} - \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + f_1(t) = 0,$$

d'où $f_1(t) = 0$ et l'infinité de relations $-ga_n B_n \operatorname{Sh} a_n H - \frac{d^2 B_n}{dt^2} \operatorname{Ch} a_n H = 0$, c'est-à-dire : $B_n = N_n \operatorname{Sin}(b_n t + c_n)$, N_n et c_n étant des constantes quelconques, tandis que les b_n ont les valeurs (39). La recherche d'une solution strictement périodique amène, comme précédemment, à poser $N_n = 0$ pour $n > 1$, enfin, en disposant convenablement de l'origine des temps, on peut faire $c_1 = 0$. Quant à N_1 , il est fixé par l'amplitude $4h$. On retrouve ainsi, obligatoirement, la valeur (62) de la fonction G .

Remarque. — On pourrait disposer de l'infinité des constantes N_n et c_n pour imposer, au moment initial, sur la longueur d'onde $2L$, une répartition arbitraire de la dénivellation et de la variation de dénivellation en surface, pourvu qu'elles soient symétriques par rapport aux plans verticaux définis plus haut, mais, par la suite, ces mêmes configurations, tout en restant périodiques par rapport à x_0 et symétriques par rapport aux plans précités, ne se reproduiraient plus, car les b_n sont incommensurables entre eux.

2° DEUXIÈME ORDRE D'APPROXIMATION.

a. *Calcul de la solution.* — On connaît les expressions données pour le clapôtis par Sainflou dans son « Essai sur les Dignes maritimes verticales » :

$$(63) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= x_0 + 2r \cos ax_0 \sin bt, \\ y &= y_0 - 2r' \sin ax_0 \sin bt - 2arr' \sin^2 bt, \\ \frac{p}{\rho g} &= y_0 + 2h \sin ax_0 \sin bt \left[\frac{\text{Ch } a(H-y_0)}{\text{Ch } aH} - \frac{\text{Sh } a(H-y_0)}{\text{Sh } aH} \right] \\ &= y_0 + \frac{2h \text{Sh } ay_0 \sin ax_0 \sin bt}{\text{Sh } aH \text{Ch } aH}. \end{aligned} \right.$$

Les notations sont celles utilisées précédemment pour la houle, formules (31), (33) et (37).

On va comparer ces valeurs à celles que donne la théorie générale exposée ci-avant, formules (23) à (25).

Il vient tout d'abord :

$$(64) \quad F = \frac{\sin^2 bt}{2 \text{Sh}^2 aH} [\text{Ch } 2a(H-y_0) + \cos 2ax_0] + G_2$$

d'où, en admettant provisoirement $G_2 = 0$, ce qui donne la solution de la forme la plus simple :

$$(65) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= x_0 + 2r \cos ax_0 \sin bt - a(r^2 - r'^2) \sin 2ax_0 \sin^2 bt \\ &= x_0 + 2h \frac{\text{Ch } a(H-y_0)}{\text{Sh } aH} \cos ax_0 \sin bt - \frac{h^2 a}{\text{Sh}^2 aH} \sin 2ax_0 \sin^2 bt, \\ y &= y_0 - 2r' \sin ax_0 \sin bt - 2arr' \sin^2 bt \\ &= y_0 - 2h \frac{\text{Sh } a(H-y_0)}{\text{Sh } aH} \sin ax_0 \sin bt - \frac{h^2 a}{\text{Sh}^2 aH} \text{Sh } 2a(H-y_0) \sin^2 bt. \\ \frac{p}{\rho g} &= y_0 + \frac{2h \text{Sh } ay_0 \sin ax_0 \sin bt}{\text{Sh } aH \text{Ch } aH} + \frac{h^2 a}{\text{Sh}^2 aH} \left\{ 2 \text{Sh } ay_0 \text{Ch } a(2H-y_0) \sin^2 bt \right. \\ &\quad \left. + \text{Th } aH [2 \text{Sh } ay_0 \text{Sh } a(2H-y_0) - \cos 2ax_0] [1 - 3 \sin^2 bt] \right\}. \end{aligned} \right.$$

Ces expressions diffèrent de la solution Sainflou par la présence :

1° du terme du 2° ordre de la pression, non considéré d'habitude et par cet auteur en particulier,

2° d'un terme supplémentaire du 2° ordre dans l'expression de x et contenant $a(r^2 - r'^2)$ en facteur, quantité explicitement négligée comme assez petite dans le Mémoire en question. On verra néanmoins, plus loin, que sa présence améliore très nettement l'approximation de la solution (65). On dénommera, pour simplifier, *solution Sainflou complète, cette solution partielle du 2° ordre*, pour laquelle la propriété $p = \text{const.}$ n'est vérifiée, en surface, qu'au 1^{er} ordre seulement. On s'est toutefois arrangé, dans les formules (65), à déterminer la fonction arbitraire $f_2(t)$ de façon que la valeur moyenne du terme du 2° ordre de la pression soit nulle sur la ligne d'eau.

Pour obtenir la solution homogène unique du 2° ordre du clapôtis vérifiant de

façon complète, au 3^e ordre près, les sept conditions du problème, il faut fixer la valeur de la fonction harmonique G_2 comme suit :

$$(66) \quad G_2 = \frac{\text{Ch } 2a(H - \gamma_0) \text{ Cos } 2ax_0}{8 \text{ Sh}^4 aH} (3 \text{ Cos } 2bt + \text{Th}^2 aH),$$

ce qui donne pour les expressions du mouvement et de la pression

$$(67) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= x_0 + \frac{2h \text{ Ch } a(H - \gamma_0) \text{ Cos } ax_0 \text{ Sin } bt}{\text{Sh } aH} \\ &\quad - \frac{h^2 a \text{ Sin } 2ax_0}{\text{Sh}^2 aH} \left[\text{Sin}^2 bt + \frac{\text{Ch } 2a(H - \gamma_0)}{4 \text{ Sh}^2 aH} (3 \text{ Cos } 2bt + \text{Th}^2 aH) \right], \\ y &= \gamma_0 - \frac{2h \text{ Sh } a(H - \gamma_0) \text{ Sin } ax_0 \text{ Sin } bt}{\text{Sh } aH} \\ &\quad - \frac{h^2 a}{\text{Sh}^2 aH} \text{ Sh } 2a(H - \gamma_0) \left[\text{Sin}^2 bt + \frac{\text{Cos } 2ax_0}{4 \text{ Sh}^2 aH} (3 \text{ Cos } 2bt + \text{Th}^2 aH) \right], \\ \frac{p}{\rho g} &= \gamma_0 + \frac{2h \text{ Sh } a\gamma_0 \text{ Sin } ax_0 \text{ Sin } bt}{\text{Sh } aH \text{ Ch } aH} + \frac{h^2 a \text{ Sh } a\gamma_0}{2 \text{ Sh}^2 aH} \left\{ \text{Ch } a(2H - \gamma_0) \left[\frac{\text{Cos } 2ax_0}{\text{Ch}^2 aH} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 4 \text{ Sin}^2 bt \right] + 4 \text{ Th } aH \text{ Sh } a(2H - \gamma_0) [1 - 3 \text{ Sin}^2 bt] \right. \\ &\quad \left. + 3 \text{ Cos } 2ax_0 \text{ Cos } 2bt \left[\frac{\text{Ch } a\gamma_0}{\text{Sh}^2 aH} - \frac{2 \text{ Ch } a(H - \gamma_0)}{\text{Ch } aH} \right] \right\}. \end{aligned} \right.$$

Nous n'avons pas introduit de courant horizontal d'entraînement $h^2\nu(\gamma_0)$, car c'est l'allure du mouvement devant un ouvrage vertical qui nous intéresse, près duquel ce courant est obligatoirement nul.

Au large, rien ne s'oppose, *a priori*, à la présence de mouvements stationnaires plus généraux ne satisfaisant plus à la condition 7^e et comportant un courant variable pouvant être fixé arbitrairement et rendant, en général, le phénomène asymétrique et rotationnel.

Quant à l'unicité de la solution, elle ressort de considérations identiques à celles développées pour la houle p. 53.

b. *Clapotis du deuxième ordre dans le système d'Euler.* — Les vitesses des particules sont données par les formules (9) et (10). On obtient ainsi

Solution Sainflou complète :

Variables de Lagrange :

$$(68) \quad \left\{ \begin{aligned} u &= \frac{dx}{dt} = 2rb \text{ Cos } ax_0 \text{ Cos } bt - ab(r^2 - r'^2) \text{ Sin } 2ax_0 \text{ Sin } 2bt, \\ v &= \frac{dy}{dt} = -2r'b \text{ Sin } ax_0 \text{ Cos } bt - 2abrr' \text{ Sin } 2bt. \end{aligned} \right.$$

Variables d'Euler :

$$(69) \quad \left\{ \begin{aligned} u &= 2hb \frac{\text{Ch } a(H - \gamma)}{\text{Sh } aH} \text{ Cos } ax \text{ Cos } bt, \\ v &= -2hb \frac{\text{Sh } a(H - \gamma)}{\text{Sh } aH} \text{ Sin } ax \text{ Sin } bt. \end{aligned} \right.$$

Dans le système d'Euler, les termes du 2^e ordre en h disparaissent complètement.

Solution homogène du 2^e ordre :

Variables de Lagrange :

$$(70) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = 2hb \frac{\text{Ch } a(H-y_0)}{\text{Sh } aH} \text{Cos } ax_0 \text{Cos } bt \\ \quad - \frac{h^2 ab}{\text{Sh}^2 aH} \text{Sin } 2ax_0 \text{Sin } 2bt \left[1 - \frac{3}{2} \frac{\text{Ch } 2a(H-y_0)}{\text{Sh}^2 aH} \right], \\ v = -2hb \frac{\text{Sh } a(H-y_0)}{\text{Sh } aH} \text{Sin } ax_0 \text{Cos } bt \\ \quad - \frac{h^2 ab}{\text{Sh}^2 aH} \text{Sh } 2a(H-y_0) \text{Sin } 2bt \left[1 - \frac{3}{2} \frac{\text{Cos } 2ax_0}{\text{Sh}^2 aH} \right]. \end{array} \right.$$

Variables d'Euler :

$$(71) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = 2hb \frac{\text{Ch } a(H-y)}{\text{Sh } aH} \text{Cos } ax \text{Cos } bt + \frac{3}{2} \frac{h^2 ab}{\text{Sh}^4 aH} \text{Ch } 2a(H-y) \text{Sin } 2ax \text{Sin } 2bt, \\ v = -2hb \frac{\text{Sh } a(H-y)}{\text{Sh } aH} \text{Sin } ax \text{Cos } bt + \frac{3}{2} \frac{h^2 ab}{\text{Sh}^4 aH} \text{Sh } 2a(H-y) \text{Cos } 2ax \text{Sin } 2bt. \end{array} \right.$$

Les mouvements exprimés dans les deux systèmes différent, au plus, de quantités du 3^e ordre en h . Les formules (71) représentent, dans le système d'Euler, la seule solution périodique de clapotis à courant d'entraînement nul et à caractéristiques — amplitude et longueur d'onde — données, satisfaisant rigoureusement, au 3^e ordre près, à toutes les conditions requises.

Les composantes des vitesses des deux solutions ci-dessus dérivent d'un potentiel

$$(72) \quad \varphi = \frac{2hb \text{Ch } a(H-y)}{a \text{Sh } aH} \text{Sin } ax \text{Cos } bt - \frac{3h^2 b \text{Ch } 2a(H-y)}{4 \text{Sh}^4 aH} \text{Cos } 2ax \text{Sin } 2bt,$$

le terme du 2^e ordre étant nul pour la solution Sainflou complète. D'autre part, l'équation de continuité étant strictement vérifiée dans le système d'Euler, il existe également une fonction de courant ψ conjuguée de la précédente et, comme elle, harmonique de x et y .

$$(73) \quad \psi = \frac{-2hb \text{Sh } a(H-y)}{a \text{Sh } aH} \text{Cos } ax \text{Cos } bt - \frac{3h^2 b \text{Sh } 2a(H-y)}{4 \text{Sh}^4 aH} \text{Sin } 2ax \text{Sin } 2bt,$$

le terme du 2^e ordre étant nul pour la solution Sainflou complète.

M. l'Ingénieur en Chef Gourret a fait remarquer l'intérêt des lignes de courant indépendantes du temps dont chacune peut constituer, dans le plan du mouvement, une nouvelle limite naturelle du phénomène ondulatoire envisagé. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que dans l'équation des lignes de courant $\psi = f(t)$, on puisse disposer de $f(t)$ afin d'éliminer le temps, autrement dit, ψ doit être de la forme $I(x, y) \times j(t) + k(t)$, d'où résulte, en posant $f(t) = k(t)$, l'équation $I(x, y) = 0$. C'est bien le cas pour (73), mais uniquement si on se limite au 1^{er} ordre d'approximation, ou si l'on considère la solution Sainflou complète.

La solution Sainflou complète comporte des lignes de courant indépendantes du temps, au 3^e ordre près. Par contre, pour la solution homogène du 2^e ordre, il n'est pas possible de trouver des lignes de courant fixes dans le temps.

Sauf mention contraire expresse, les énoncés ci-après valent indistinctement pour les trois types de clapotis définis ci-dessus : Solution Sainflou complète ou non et solution homogène du 2^e ordre.

c. Les clapotis du deuxième ordre sont irrotationnels. — Pour le prouver, il faut

vérifier, ν étant nul, que le déterminant fonctionnel (26) l'est également. Comme il a la même valeur, quel que soit le type de clapotis, le calcul est inutile, puisque la présence du potentiel des vitesses (72) implique *un mouvement irrotationnel, au 3^e ordre près*. Dans la forme d'Euler, les solutions sont rigoureusement irrotationnelles, par contre, des termes des 3^e et 4^e ordres en h apparaîtraient, en général, dans l'expression complète (13) du rotationnel exprimée sous forme de Lagrange.

d. *Surface libre $y_0 = 0$ et surfaces $y_0 = \text{const.}$* — Les particules situées au repos à une certaine profondeur se disposent, pendant le mouvement, sur une surface ondulée dont le profil est donné par les équations déterminant x et y , le paramètre variable étant x_0 .

1° Ces profils se reproduisent si x_0 augmente de $2L$ ou t de $2T$.

2° Lorsque $\text{Sin } bt = 0$, les coordonnées actuelles sont confondues avec les coordonnées de repos dans le cas des deux solutions Sainflou; autrement dit, la masse liquide repasse périodiquement par la position de repos. Ce n'est plus le cas pour le clapotis homogène du 2^e ordre et la surface libre ne se trouve, à aucun moment, rigoureusement plane.

3° Les points hauts et bas des profils sont donnés par l'équation : $\frac{\partial y}{\partial x_0} = 0$ ayant comme solution, pour les trois genres de clapotis envisagés, $\text{Cos } ax_0 = 0$, c'est-à-dire des *abscisses indépendantes du temps* : $x_{0k} = \frac{\pi}{2a} + \frac{K\pi}{a} = \frac{L}{2} + KL$, K entier quelconque. Les particules correspondant au repos à ces abscisses se meuvent verticalement durant le mouvement, l'un des plans ainsi définis correspondant à la paroi réfléchissant la houle génératrice.

Les ordonnées des points hauts et bas valent, pour les deux solutions Sainflou,

$$y = y_0 \mp 2r' \text{Sin } bt - 2arr' \text{Sin}^2 bt$$

et pour la solution homogène du 2^e ordre :

$$y = y_0 \mp 2r' \text{Sin } bt - 2arr' \left[\text{Sin}^2 bt - \frac{(3 \text{Cos } 2bt + \text{Th}^2 a H)}{4 \text{Sh}^2 a H} \right].$$

Pour les élongations extrêmes, $\text{Sin } bt = \pm 1$ et les ordonnées correspondantes sont égales à :

$$(74) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{respectivement à} \\ y = y_0 - 2arr' \mp 2r' \\ y = y_0 - 2arr' \left[1 + \frac{3}{4 \text{Sh}^2 a H} - \frac{1}{4 \text{Ch}^2 a H} \right] \mp 2r', \end{array} \right.$$

le signe moins donnant le point haut, le signe plus le point bas. Lorsque $\text{Sin } bt$ passe de $+1$ à -1 ou vice-versa, les points hauts et bas s'invertissent.

4° Les profils $y_0 = \text{const.}$ et de la surface libre restent constamment symétriques par rapport aux plans verticaux passant par les crêtes et les creux; ils diffèrent peu de trochoïdes elliptiques (ce sont des trochoïdes elliptiques pour la solution Sainflou).

5° Lorsque les surfaces $y_0 = \text{const.}$ présentent des ondulations d'amplitude maximum, la différence de cote entre leurs points hauts et bas est donnée par $4r'$. *En surface, en particulier, cette amplitude maximum vaut $4h$, soit le double de celle de la houle génératrice.*

Pour cette raison, nous désignerons dorénavant par $2\gamma = \frac{2h}{L}$ la *cambrure* des

clapotis, la cambrure de la houle génératrice restant, comme précédemment, égale à $\gamma = \frac{h}{L}$.

6° Au moment des élongations extrêmes, le niveau moyen de la surface $\gamma_0 = \text{const.}$ est, d'après la première équation (74), à une hauteur $2arr'$ au-dessus du niveau de repos des particules, pour les solutions Sainflou, complète ou non. En particulier, la surélévation du niveau moyen du clapotis au-dessus de la surface libre vaut

$$(75) \quad \Delta h_1 = \frac{2\pi h^2}{L} \text{Cth} \pi \frac{H}{L}$$

soit, comme l'a remarqué Sainflou, quatre fois la surélévation du niveau moyen de la houle génératrice, si l'on prend la valeur habituelle (54) comme terme comparatif.

Pour la solution homogène du 2° ordre, le niveau moyen de la surface $\gamma_0 = \text{const.}$ est à une hauteur

$$2arr' \left[1 + \frac{3}{4 \text{Sh}^2 aH} - \frac{1}{4 \text{Ch}^2 aH} \right] = 2arr' \times \beta$$

au-dessus du niveau de repos et, en surface, la surélévation (75) doit être également multipliée par le coefficient β .

$$(76) \quad \Delta h_2 = \beta \Delta h_1.$$

Comme $\text{Ch} aH > \text{Sh} aH$, β est toujours plus grand que un, sauf dans le cas limite $H = \infty$ et ceci est en accord avec les résultats expérimentaux les plus récents (1). Si H diminue, β croît constamment. Pour $\lambda = \frac{2L}{H} = 8$, exemple

(1) Les observations faites à Alger sur la jetée Mustapha semblent, de prime abord, confirmer la valeur de surélévation calculée selon Sainflou et correspondant à $\beta = 1$. Voir le mémoire cité de M. Renaud p. 765. Cependant, dans le cas qui nous occupe de boules de tempête très creuses, cette détermination, basée sur l'observation de l'épaisseur des nappes d'eau se déversant sur l'ouvrage, doit être approchée par défaut, car, d'une part, la nappe en s'infléchissant par dessus le mur de garde perd de la hauteur, d'autre part, l'eau ainsi soustraite au clapotis doit également provoquer une diminution de son amplitude.

Quoiqu'il en soit, les derniers essais de M. Stucky (*Science et Industrie*, éd., *Travaux*, janv. 1937) ont donné les résultats suivants :

OUVRAGE REPRODUIT par le modèle. (Digue verticale.)	PRO- FON- DEUR H	AMPLI- TUDE MESURÉE 4h	LON- GUEUR D'ONDE 2L	CAM- BRURE $2\gamma = \frac{2h}{L}$	LON- GUEUR RELATIVE $\lambda = \frac{2L}{H}$	SURÉLEVATION DU NIVEAU MOYEN.			MODE OPÉRATOIRE.
						Observée. Δh	Calculée.		
							Valeur du 1° ordre. Δh_2	Valeur Sainflou. Δh_1	
en mètres.						en mètres.			
Gênes (Principe Umberto)....	15	10	110	1/11	7,3	1,73	1,71	1,02	Clapotis.
Catane.....	18	10,50	155	1/9,4	8,6	4,75	4,40	2,18	Vague inter- ceptée.
Alger (Mustapha).....	21	21,50	185	1/8,6	8,8	4,25	6,47	3,15	"

Les profondeurs H sont celles en avant de la jetée et non celles de la riserme du soubasse-

déjà cité pour la houle, il vaudrait 1,85. Dans ce cas particulier, la surélévation du niveau moyen du clapotis comparée à celle de la houle génératrice, l'un et l'autre mouvements étant solutions homogènes du 2° ordre, n'est plus quatre fois plus forte, mais seulement, d'après les valeurs (53) et (76)

$$\frac{4\beta}{\alpha} = \frac{4 \times 1,85}{2,98} = 2,5 \text{ fois plus forte (voir tableau II).}$$

Il ressort de ces considérations, comme dans le cas de la houle, que la recherche des solutions homogènes du 2° ordre n'est pas superflue. La plus ou moins parfaite réalisation de la condition de pression constante en surface a une influence très sensible sur l'allure du mouvement, comme on le voit en comparant, pour les mêmes caractéristiques $\lambda = 8$ et $2\gamma = \frac{2h}{L} = \frac{1}{8}$, la ligne d'eau de la solution homogène du 2° ordre à celle des deux autres solutions (fig. 8).

Pourtant, la solution Sainflou complète comporte, en surface, une répartition de la pression peu différente d'une constante car, pour les données ci-dessus, l'écart maximum ne dépasserait pas 8,6 pour cent de la pression d'eau correspondant à l'amplitude.

e. *Forme du diagramme des pressions le long de la paroi réfléchissante.* — Dans la solution homogène du 2° ordre, p comprend un terme du premier ordre identique à celui donné par la théorie Sainflou et un terme du 2° ordre nouveau jouant le rôle d'un *terme correctif*. Pour se rendre compte sur un exemple numérique :

1° de la grandeur relative et du signe de cette correction,

2° de la plus ou moins bonne correspondance entre la formule trouvée et l'expérience, on a reproduit dans le tableau I, les valeurs de la pression selon la méthode Sainflou (traits pleins) et selon l'observation sur modèle réduit (lignes pointillées), telles qu'elles résultent de mesures fort précises faites par M. A. Stucky (1). Les diagrammes ou valeurs numériques qui correspondent, dans les deux cas de l'affleurement maximum et minimum de l'eau le long de la paroi, à la *surpression* et *dépression* par rapport à la pression statique au repos, c'est-à-dire à $\frac{p}{\rho g} - \gamma_0$, font apparaître une correction *négative*.

Or, le terme correctif du 2° ordre donné par la formule (67) est également négatif et d'ailleurs identique dans le cas de l'affleurement maximum et minimum — voir formule (79) ci-après — Les valeurs correspondantes de la pression, portées dans le graphique en traits interrompus, font ressortir des valeurs en meilleur accord avec l'expérience que les valeurs du 1^{er} ordre de la solution Sainflou.

f. *Équation explicite de la surface libre.* — On l'obtient, à des termes du 3° ordre près et en fonction des coordonnées rectangulaires x et y , par l'équation

ment d'enrochements dont l'influence s'est révélée insignifiante sur les propriétés du clapotis.

Les valeurs Δh observées présentent des fluctuations marquées (la valeur pour Alger devrait être supérieure à celle pour Catane). Ces irrégularités, constatées par tous les expérimentateurs, sont dues à la difficulté d'éviter tout phénomène parasite.

Néanmoins, alors que les valeurs Δh_1 du clapotis Sainflou sont systématiquement trop faibles, celles Δh_2 du clapotis homogène du 2° ordre encadrent la réalité avec une tendance à l'excès pour des clapotis relativement longs et cambrés (cas d'Alger).

(1) *Bulletin technique de la Suisse romande* du 29 septembre 1934.

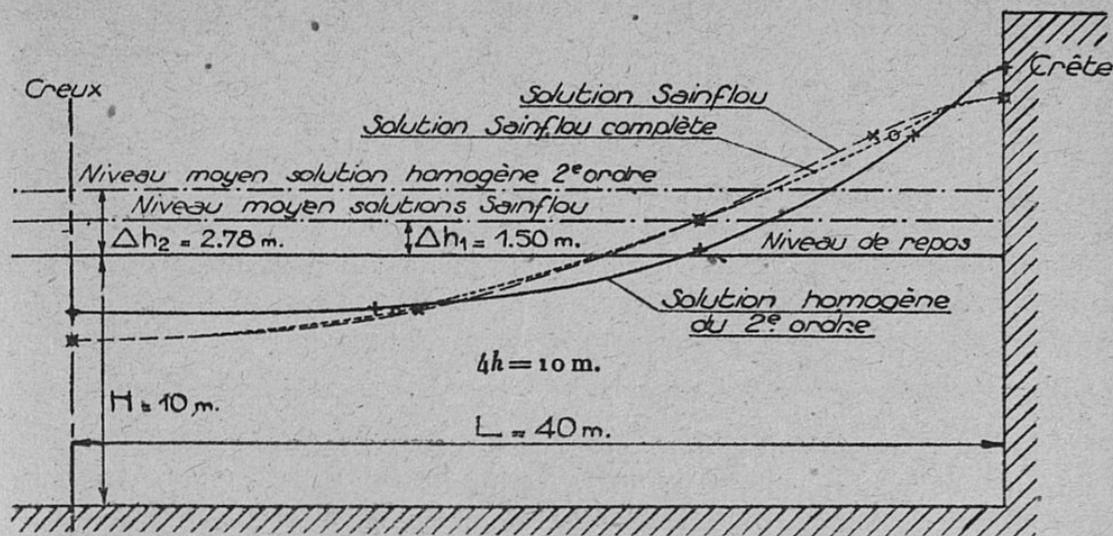


Fig. 8. — Surfaces libres du clapotis, pour les trois solutions envisagées, lors de l'affleurement supérieur le long de la paroi. Longueur relative : $\lambda = 8$; cambrure : $2\gamma = 1/8^\circ$.

TABLEAU I. — Diagrammes des pressions au droit d'une paroi verticale, lors des affleurements supérieur et inférieur du clapotis, donnant les valeurs comparées de la solution Saint-flou et de la solution homogène du second ordre par rapport aux résultats expérimentaux (essai sur modèle de M. Stucky).

Cotes correspondantes de repos et des mesures	2 L = 80 m, 4h = 6 m H = 19,50 m			$\lambda = 4,10$ $2\gamma = 1/13,3$	Cotes effectives	Pression sol. Saint-flou	Termes correctifs 2° ordre	Cotes corrigées et des mesures
	Termes correctifs 2° ordre	Pression sol. Saint-flou	Cotes effectives					
			Affleurement maximum		-3.40	0	0	0
			Niveau de repos		-0.83	2.08	-0.10	2.00
0	0	-2.60	Aff. min		2.36	2.35	-0.19	4.50
2.00	-0.10	-2.34			5.29	2.01	-0.25	7.00
4.50	-0.19	-1.98			11.08	1.49	-0.30	12.00
7.00	-0.25	-1.76			16.59	1.26	-0.32	17.00
12.00	-0.30	-1.39			19.50	1.24	-0.21	19.50
17.00	-0.32	-1.24						
19.50	-0.31	-1.24						

(58). Comme cette dernière ne dépend pas de φ_2 , il suit que les surfaces $\gamma_0 = \text{const.}$ des solutions Sainflou complète ou non sont données par la même équation. Pour la surface libre, en particulier, par

$$(77) \quad y = -2h \sin ax \sin bt + 2h^2 a \operatorname{Cth} aH \cos 2ax \sin^2 bt.$$

On s'explique ainsi les tracés si voisins des expressions paramétriques exactes de ces deux solutions (voir fig. 8), puisqu'ils ne diffèrent que par des termes du 3^e ordre.

Quant au profil de la surface libre de la solution homogène du 2^e ordre, il vaut

$$(78) \quad y = -2h \sin ax \sin bt + 2h^2 a \operatorname{Cth} aH \cos 2ax \left[\sin^2 bt - \frac{3 \cos 2bt + \operatorname{Th}^2 aH}{4 \operatorname{Sh}^2 aH} \right].$$

g. *Limites d'application des formules (67).* — La solution homogène du 2^e ordre est susceptible de donner des valeurs plus conformes à l'expérience que celles de solutions plus simples; on l'a vérifié dans le paragraphe *e* ci-dessus. Par contre, ce résultat, comme dans le cas de la houle, est atteint uniquement dans un domaine de validité bien déterminé que ne saurait préciser les formules simples usuelles.

Comme premier critère limite d'application des formules, on admettra une surpression maximum, au pied de la muraille verticale, au plus égale à la valeur donnée par la solution Sainflou. En effet, les nombreux essais sur digües existantes et modèles réduits ont très généralement révélé des surpressions inférieures.

Pour la paroi, $x_0 = \frac{L}{2}$ et la surpression vaut, d'après la formule (67)

$$(79) \quad \pm 2h \frac{\operatorname{Sh} ay_0}{\operatorname{Sh} aH \operatorname{Ch} aH} + \frac{h^2 a \operatorname{Sh} ay_0}{2 \operatorname{Sh}^2 aH} \left\{ \operatorname{Ch} a(2H - \gamma_0) \left(4 - \frac{1}{\operatorname{Ch}^2 aH} \right) - 8 \operatorname{Th} aH \operatorname{Sh} a(2H - \gamma_0) + 3 \left[\frac{\operatorname{Ch} ay_0}{\operatorname{Sh}^2 aH} - \frac{2 \operatorname{Ch} a(H - \gamma_0)}{\operatorname{Ch} aH} \right] \right\};$$

en pied, on obtient

$$(80) \quad \frac{2h}{\operatorname{Ch} aH} \left[\pm 1 - ah \left(\operatorname{Sh} aH - \frac{3}{4 \operatorname{Sh}^3 aH} \right) \right],$$

le signe supérieur valant pour l'affleurement supérieur, l'autre pour l'affleurement inférieur. Pour de grandes valeurs de la longueur relative λ , le terme du 2^e ordre de la surpression est positif en pied dans le cas de l'affleurement maximum, ce qui est contraire à l'observation. Il s'annule pour $aH = 0,83$ soit $\lambda = \frac{2L}{H} = 7,6$ et reste ensuite constamment négatif pour de plus petites valeurs de λ . Le domaine de validité des formules (67) comprend donc comme limites les valeurs zéro (profondeur infinie) et 7,6 de la longueur relative λ . Lorsque λ diminue à partir de 7,6, le terme correctif du 2^e ordre prend de plus en plus d'importance. C'est ce qui ressort aussi des expériences déjà citées de M. Stucky, où l'on observe des surpressions à peu près nulles en pied, donc un terme correctif de l'ordre de grandeur du terme principal, uniquement pour des valeurs assez faibles de λ (soit 3,1).

La surpression s'annule en pied, d'après la formule (80), lorsque la cambrure prend la valeur

$$(81) \quad 2\gamma_0 = \frac{2h}{L} = \frac{2}{\pi \left(\operatorname{Sh} aH - \frac{3}{4 \operatorname{Sh}^3 aH} \right)}.$$

Comme deuxième critère limite, on choisira, comme pour la houle, l'apparition d'une intumescence secondaire du clapotis se produisant en lieu et place du creux. Cette crête secondaire n'apparaîtrait pas pour les solutions Sainflou, complète ou non.

Cette condition limite correspondant à une courbure nulle au droit du creux donne, tous calculs faits, comme cambrure limite du clapotis homogène du 2^e ordre

$$(82) \quad 2\gamma_2 = \frac{2h}{L} = \frac{2}{\pi} \frac{\text{Sh}^3 aH}{\text{Ch} aH (3 - \text{Th}^2 aH)}.$$

Comme 3^e critère limite, on envisagera la cambrure amenant la brisure du clapotis, c'est-à-dire l'apparition à la crête du profil d'un point de rebroussement.

Ce dernier est déterminé par la condition $\frac{\partial x}{\partial x_0} = 0$ en crête, exprimant que la tangente y est verticale, c'est-à-dire, en introduisant directement les valeurs

$$\sin ax_0 = 1, \quad \gamma_0 = 0, \quad \sin bt = +1,$$

par

$$(83) \quad 1 - 2 (ah \text{Cth} aH) - 2 (ah \text{Cth} aH)^2 \left[\frac{\frac{3}{4} + \text{Sh}^2 aH}{\text{Sh}^2 aH \text{Ch}^4 aH} \right] = 0.$$

En supprimant le terme du 2^e ordre, on retrouve la valeur classique donnant le point de rebroussement de la cycloïde elliptique, soit

$$ah \text{Cth} aH = 1/2 \quad \text{ou} \quad 2\pi r = L,$$

ou encore, en introduisant la cambrure

$$(84) \quad 2\gamma_c = \frac{2h}{L} = \frac{\text{Th} aH}{\pi}.$$

Comme le terme du 2^e ordre est toujours négatif, il suit que la brisure du clapotis homogène du 2^e ordre se produit pour des cambrures $2\gamma_3$ un peu plus faibles que la valeur classique (84).

Le tableau II indique, pour quelques valeurs caractéristiques de la longueur relative, les valeurs correspondantes de $2\gamma_c$ et $2\gamma_3$. Dans ce tableau ont été portées aussi les valeurs $2\gamma_0$ et $2\gamma_2$. On en déduit que les formules du clapotis homogène du 2^e ordre peuvent s'appliquer dans le domaine $0 \leq \lambda \leq 7,6$ pour des cambrures moindres ou égales à celles dont la valeur est encadrée.

Les cambrures limites ainsi déterminées sont supérieures, pour $\lambda < 6,9$, à celles $2\gamma_a$ qu'on peut physiquement réaliser à partir d'une houle génératrice. En effet, la cambrure d'un clapotis ne peut dépasser le double de la valeur (55) correspondant à une houle de cambrure maximum sur le point de déferler. Par conséquent, pour des longueurs relatives inférieures à 6,9, le clapotis ne peut se briser s'il est produit par la réflexion d'une houle. Si $\lambda > 6,9$, cette circonstance est possible dans des limites assez étroites. En fait, elle paraît se réaliser surtout à titre sporadique (1).

En résumé, les formules (67) comportent pour λ , à partir de la valeur zéro, un champ de variation étendu qu'on peut extrapoler avec une approximation tolérable de $\lambda = 7,6$ à $\lambda = 10$ couvrant ainsi la quasi-totalité du domaine utile de cette variable pour le calcul des digues verticales.

(1) Voir EXPOSÉ PRÉLIMINAIRE. — Si l'on se borne au premier ordre d'approximation, $\gamma_a = 2 \times 0,14 \pi \gamma_c = 0,88 \gamma_c$ est inférieur à γ_c , quel que soit λ , et le clapotis ne briserait, théoriquement, jamais.

TABLEAU II. — Détermination du domaine de validité de la solution homogène du second ordre du clapotis.

	0 (H = ∞)	2	3	4.03	6.90	7.60	REMARQUES.
Longueur relative : $\lambda = \frac{2L}{H}$	∞	3.14	2.09	1.57	0.92	0.83	
$aH = \frac{\pi H}{L} = \frac{2\pi}{\lambda}$	∞	0.317	0.309	0.292	0.232	0.216	
Cambrures correspondant à :							Les valeurs encadrées correspondent aux cambrures maxima admissibles.
Brisure du clapotis Sainflou $2\gamma_2$	$\frac{1}{\pi} = 0.318$	—	—	1.43	0.203	0.148	
Courbure nulle au creux $2\gamma_3$	∞	—	—	—	→ 0.203	0.177	
Brisure du clapotis 2° ordre $2\gamma_3$	0.318	0.317	0.308	0.287	0.203	0.177	
Surpression nulle en pied à l'affleurement maximum $2\gamma_0$	0	0.055	0.158	0.287	1.52	∞	
Rapport γ_3/γ_c	1	1	0.998	0.986	0.87	0.82	
Cambrures maxima normalement réalisables $2\gamma_4$	0.280	0.278	0.272	0.257	0.203	0.189	La houle génératrice est sur le point de déferler.
Rapport $\frac{4\beta}{\infty}$	4	3.98	3.77	3.43	2.65	2.53	Rapport des surélévations des niveaux moyens du clapotis du 2° ordre et de la houle génératrice du même ordre.

Par application de la formule (81), il ressort du tableau II, pour $\lambda < 4,03$ et des clapotis assez creux, une pression moindre que la valeur statique au pied de la paroi verticale dans le cas de l'affleurement maximum.

h. *Trajectoires.* — On les obtient en éliminant le temps entre les deux équations donnant les coordonnées actuelles x et y . Ce sont des éléments de paraboles à axe généralement oblique. Néanmoins, cet axe est vertical pour les particules situées au repos aux nœuds, c'est-à-dire à mi-distance entre les verticales passant par les crêtes et les creux. Pour la solution Sainflou, tous les arceaux paraboliques sont d'axe vertical.

Pour les trois genres de clapotis, les trajectoires des particules situées sur les verticales des crêtes et des creux sont des éléments de droites verticales, celles des particules situées sur le fond, des segments rectilignes horizontaux qui, nuls au droit des crêtes et des creux, sont d'élongation sensiblement maximum aux nœuds. De même, les vitesses des particules sur le fond, nulles au droit des crêtes et des creux sont sensiblement maxima au droit des nœuds. En ces points, et pour les trois types de clapotis envisagés, l'excursion des particules vaut

$$2 \times \frac{2h}{Sh a H}$$

et la vitesse horizontale oscille entre les limites (1)

$$\pm \frac{2hb}{Sh a H}.$$

Ces valeurs dépendent uniquement des termes du 1^{er} ordre, ceux du 2^e ordre étant nuls.

Les essais sur modèle ont indiqué les 3/4 environ de ces valeurs (voir, en particulier, les articles cités de M. l'Ingénieur en Chef Renaud et de M. Stucky). Avant d'attribuer entièrement au frottement sur le fond l'origine de ces divergences, il serait utile de vérifier l'influence des termes du 3^e ordre, vraisemblablement maxima au droit des nœuds comme ceux du 1^{er} ordre. Il est, en outre, très probable que l'effet de paroi est moins marqué sur les phénomènes à l'échelle naturelle.

i. *Pulsations de pression.* — Le clapotis homogène du 2^e ordre présente la particularité suivante :

Si l'on calcule la valeur moyenne de la pression sur le fond pour une ondulation complète, on trouve, au 2^e ordre

$$(85) \quad \frac{p_m}{\rho g} = \frac{1}{2L} \int_0^{2L} \frac{p}{\rho g} dx = \frac{1}{2L} \int_0^{2L} \frac{p}{\rho g} \frac{\partial x}{\partial x_0} dx_0 = H + 2ah^2 Th aH \cos 2bt.$$

(1) Ces limites sont approchées pour le clapotis homogène du 2^e ordre. Selon la formule (71), le maximum maximum de la vitesse sur le fond — tout en restant sensiblement égal à la valeur ci-dessus — ne se produit plus au droit des nœuds quand $2\gamma = \frac{2h}{L} > \frac{2Sh^3 2\pi/\lambda}{3\pi}$, cette cambrure limite étant d'autant plus faible que le clapotis est plus long. $u_{\max. \max.}$ dont l'abscisse est donnée par $\cos 2ax = \frac{LSh^3 2\pi/\lambda}{3\pi h}$ s'approche de la muraille quand, la longueur relative λ restant fixe, la cambrure augmente. Ces résultats sont en accord avec les essais faits par MM. Larras et Malavard par une méthode d'analogie électrique (*Annales*, août 1936). Pour l'exemple numérique envisagé par ces auteurs, le calcul ci-dessus situe $u_{\max. \max.}$ 20 % plus près de la muraille que le quart d'onde théorique, tandis que pour l'exemple déjà cité $\lambda = 8$, $2\gamma = 1/8$, correspondant à un mouvement clapoteux moins long, $u_{\max. \max.}$ se produirait encore au nœud.

Lorsque le temps varie, la pression moyenne sur le fond subit des pulsations de fréquence double de celle du clapotis. Ces pulsations subsistent même à très grande profondeur, puisque, à la limite, pour $H = \infty$, $\text{Th } aH = 1$.

Autrement dit, à grande profondeur, la pression ne tend pas vers la pression statique — poids de la colonne d'eau surincombante — mais présente des oscillations périodiques de part et d'autre de cette valeur. Pour $H = \infty$, on a, en effet, d'après la formule (67) :

$$\frac{P}{\rho g} - \gamma_0 = 2ah^2(1 - e^{-2\alpha\gamma_0}) \text{Cos } 2bt.$$

et le membre de droite ne s'annule pas sur le fond (pour $\gamma_0 = \infty$).

Ces pulsations sont propres au *clapotis homogène du 2^e ordre* et n'existent pas pour la houle de même approximation. Il serait sans doute aisé de vérifier au laboratoire si l'expérience confirme cette déduction. La mise en émulsion des fonds et les affouillements paraissant dus plutôt aux variations de pression qu'aux vitesses, dont l'effet alternatif semble favoriser les apports, on peut aussi se demander si ces pulsations de pression, malgré leur faible intensité relative, n'exercent pas une action non négligeable sur la tenue des fonds soumis au clapotis.

j. *Réalisation imparfaite de l'équation de continuité.* — On a fait à la représentation approchée des mouvements ondulatoires dans le système de Lagrange l'objection fondée que la condition d'incompressibilité de l'eau est imparfaitement satisfaite. En effet, l'équation de continuité est alors quadratique et il s'introduit par multiplication, pour des solutions du 2^e ordre, des expressions en h^3 et h^4 , non nulles en général et qu'on néglige.

Par contre, il n'y a, objectivement, aucune raison d'attribuer à ce défaut particulier d'approximation une importance plus grande qu'à ceux communs aux solutions exprimées par les variables d'Euler et concernant les autres équations ou conditions aux limites.

On peut même utiliser ce défaut d'invariabilité de volume comme un critère simple servant à apprécier le degré général d'approximation réalisé.

M. l'Ingénieur en Chef Gourret, dans son article des *Annales* de 1935-III, a calculé la dilatation cubique résiduelle θ dans le cas de la *solution Sainflou*, quantité du 2^e ordre dont les valeurs extrêmes, le long de la paroi, sont égales à

$$-2a^2(r^2 - r'^2) \mp 4a^3r(r^2 + r'^2),$$

le signe supérieur valant pour l'affleurement maximum. Le calcul, pour un clapotis défini par $2h = 5$ m., $2L = 100$ m., $H = 12$ m., donne, par exemple :

en surface,

$$\theta = \frac{-7,2}{100} \mp \frac{8,5}{100} = \begin{cases} -15,7 \text{ pour cent} \\ + 1,3 \text{ —} \end{cases},$$

et au fond

$$\theta = \frac{-7,2}{100} \mp \frac{2,8}{100} = \begin{cases} -10 \text{ —} \\ - 4,4 \text{ —} \end{cases}.$$

Pour le même clapotis en profondeur infinie, $r = r'$, d'où, en surface $\theta = \mp 3,1$ pour cent, au fond $\theta = 0$ pour cent.

L'approximation, dans ce dernier cas, est bien meilleure, tandis que dans e

premier, la condition d'invariabilité de volume n'est vérifiée qu'à 16 pour cent près environ.

L'introduction du terme complémentaire pour la valeur de x dans la solution Sainflou complète (formule 65), malgré sa faible valeur numérique qui permet de le négliger la plupart du temps, améliore de plus du double l'approximation obtenue. Dans ce cas, l'expression de la dilatation cubique résiduelle ne comporte plus de terme en h^2 , puisque la solution complète a été, en particulier, déterminée par cette condition.

Le calcul donne :

$$\theta = \frac{\partial(x, y)}{\partial(x_0, y_0)} - 1 = - (2a)^3 r (r^2 \cos^2 ax_0 + r'^2 \sin^2 ax_0) \sin^3 bt \sin ax_0 \\ - \frac{(2a)^4}{4} (r^4 - r'^4) \sin^4 bt \cos 2ax_0,$$

c'est-à-dire, le long de la paroi, pour les affleurements extrêmes

$$\theta = \mp (2a)^3 r r'^2 + \frac{(2a)^4}{4} (r^4 - r'^4)$$

et pour le premier exemple numérique ci-dessus :

en surface,

$$\theta = \mp \frac{4,8}{100} + \frac{1,2}{100} = \begin{cases} -3,6 \text{ pour cent} \\ +6,0 \text{ —} \end{cases},$$

au fond,

$$\theta = \frac{0,5}{100} = +0,5 \text{ —} ,$$

A noter que les régions de la masse liquide ainsi soumises à vérification sont celles comportant les écarts maxima de la dilatation cubique ; en général, ils seraient beaucoup plus faibles.

k. *Améliorations réalisées par la théorie du clapotis homogène du 2^e ordre.* — Nous récapitulons ci-dessous les éléments caractéristiques de cette théorie en meilleur accord avec l'expérience ou les essais sur modèle que ceux de la théorie habituelle (solution Sainflou).

1° Plus λ et γ croissent, c'est-à-dire plus le clapotis est long et cambré, plus la surélévation du niveau moyen dépasse la valeur Sainflou et, comme corollaire, plus le profil libre a des crêtes pointues et des creux aplatis par rapport à ceux de la trochoïde elliptique de la théorie habituelle (voir figure 8).

2° Pour des clapotis suffisamment longs et cambrés, le maximum maximum de vitesse sur le fond ne se situe plus au quart d'onde théorique, mais se déplace vers la muraille et ceci d'autant plus que croissent λ et γ .

3° Les valeurs de la surpression le long de la paroi, au moment de l'affleurement maximum, sont inférieures à celles données par la théorie de Sainflou et les valeurs de la dépression, au moment de l'affleurement minimum, supérieures, l'écart relatif croissant proportionnellement à la cambrure des ondulations.

4° Pour des clapotis creux et assez courts, donc en eau relativement profonde, la valeur de surpression au pied de la muraille, lors de l'affleurement maximum, peut être très faible sinon inexistante, ou même négative ; par contre, pour des clapotis longs, la surpression ne décroît que peu vers le bas à partir du niveau de repos.

Il me semble subsister, comme divergences entre l'observation et la théorie, que les faits suivants, vraisemblablement liés, en partie, à l'action des résistances passives, négligée dans ce qui précède :

1° Le clapotis brise contre la muraille avant l'apparition du point de rebroussement théorique ; son amplitude paraît augmentée et il projette souvent des gerbes verticales.

2° La vitesse et l'excursion des particules observées sur le fond — sur modèles réduits où l'action de paroi est très accentuée — sont environ les $\frac{3}{4}$ des valeurs théoriques.

3° Le maximum des surpressions, lors de l'affleurement supérieur, se produirait un peu au-dessous de son emplacement théorique (le niveau de l'eau au repos). Les essais sur modèle les plus récents et les plus précis ont fortement restreint l'importance de ce phénomène dont l'existence objective peut même être discutée et dont l'incidence pratique, à leur lumière, apparaît comme négligeable.

IV. — Application au calcul des ouvrages maritimes de type vertical.

Les bases de la méthode moderne du calcul de ces ouvrages ont été exposées dans le mémoire déjà cité de Sainflou. À la suite de nombreuses mesures effectuées sur des ouvrages existants ou sur modèle, il a paru que cette méthode pouvait avantageusement être corrigée et simplifiée. M. l'Inspecteur général de Rouville, au XVI^e Congrès international de Navigation à Bruxelles (sept. 1935), en a précisé les normes actuellement admises. Nous en extrayons ce qui suit :

a. Lors de l'affleurement maximum, la pression au niveau de repos peut être prise égale à la pression hydrostatique correspondant aux creux de la plus forte lame du large, soit $2h$.

b. Cette pression décroît linéairement vers le haut et s'annule en un point situé au moins à une hauteur $2h$ au-dessus du niveau de repos mais qui, pour des houles plus creuses, peut atteindre jusqu'à $3h$.

c. Vers le bas, la surpression correspondant à $2h$ peut être admise constante jusqu'au pied de la muraille.

Les résultats obtenus plus haut pour la solution homogène du 2^e ordre du clapotis suggèrent, quant à ces normes, deux remarques d'importance inégale.

La première concerne la cote de l'affleurement supérieur, somme de l'amplitude de la houle génératrice $2h$ et de la surélévation du niveau moyen. La valeur admise habituellement pour cette surélévation, (formule 75), ordinairement faible eu égard aux résultats expérimentaux, peut avantageusement être remplacée par l'expression (76), calculée au 2^e ordre. Cependant, cette dernière doit être approchée légèrement par excès pour de grandes longueurs relatives λ . Considérons, en effet, le domaine des longueurs relatives et cambrures des houles de tempête susceptibles d'entrer en ligne de compte pour le calcul des digues verticales, c'est-à-dire environ,

$$6 \text{ à } 7 \leq \lambda \leq 9 \text{ à } 10 \quad \text{et} \quad \frac{1}{25} \leq \gamma \leq \frac{1}{20}$$

Les hauteurs des affleurements maxima au-dessus du niveau de repos, calculées au 2^e ordre, varient pour $\lambda = 7$ de $2,58h$ à $2,74h$, lorsque la cambrure de la

houle génératrice varie de $\frac{1}{25}$ à $\frac{1}{20}$ et, semblablement, pour $\lambda = 9$ de 2,90 h à 3,10 h.

Dans les mêmes conditions, la cote de l'affleurement supérieur, calculée par l'expression Sainflou, ne dépassait pas 2,5 h.

En conséquence, si on tient à discriminer, en fonction des caractéristiques admises pour la houle génératrice, la hauteur de l'affleurement maximum à adopter entre ses limites extrêmes 2 h et 3 h, la formule (76), déduite de la théorie du clapotis homogène du 2^e ordre, est susceptible d'être utilisée avantageusement, car elle fournit une bonne approximation légèrement par excès. Il est en effet indiqué de se prémunir par une certaine marge contre les fluctuations des phénomènes naturels.

La deuxième remarque, plus importante, concerne la sollicitation de l'ouvrage lors de l'affleurement minimum.

A cet instant, le terme correctif du 2^e ordre augmente la valeur absolue de la dépression devant l'ouvrage. Il ramène donc, plus qu'on pouvait l'escompter, la résultante des forces vers le parement extérieur de la digue en accroissant l'excentricité produite par la dépression du 1^{er} ordre et le mur de garde du côté du large. Le diagramme des dépressions devant l'ouvrage, calculé selon la méthode Sainflou, croît linéairement comme la pression hydrostatique à partir du niveau de repos jusqu'à la cote de l'affleurement minimum, pour diminuer ensuite quelque peu jusqu'au pied de la muraille. La présence du terme correctif négatif du 2^e ordre conduit tout d'abord à adopter une dépression de valeur constante au-dessous du point d'affleurement inférieur, et, pour la détermination de ce dernier, il paraît indiqué d'admettre une fluctuation des lames telle que la surélévation soit annulée. En résumé, les dépressions devant l'ouvrage, lors de l'affleurement minimum :

a. varieront linéairement entre le niveau de repos et un niveau situé à 2 h en contrebas, la pression étant nulle au niveau supérieur et prenant, au niveau inférieur, une valeur égale et de signe contraire à celle de la pression hydrostatique correspondant au creux de la plus forte lame du large (2 h) ;

b. resteront constantes et égales en valeur absolue à la valeur de la surpression maximum entre le niveau inférieur ci-dessus et le pied de la muraille.

Le diagramme des dépressions ainsi déterminé ne donnera, par lui-même, qu'une faible revanche de sécurité, alors que celui des surpressions est mieux partagé à ce point de vue, le terme correctif du 2^e ordre de la pression amenant une diminution nette des surpressions dans les parties basses de la muraille.

Plusieurs ouvrages importants s'étant écroulés ces dernières années, toujours vers la haute mer, il nous paraît qu'une vérification de la stabilité de l'ouvrage vers le large lors de l'affleurement minimum, faite d'après les normes ci-dessus et avec un coefficient de sécurité suffisant est aussi importante que celle de la stabilité du côté du bassin intérieur. D'ailleurs, les sollicitations sur les enrochements de soubassement devraient être maintenues à un taux nettement plus faible du côté du large que du côté intérieur, d'une part, à cause des efforts de succion vers le large produits lors de l'abaissement du clapotis le long de la muraille, d'autre part, pour tenir compte du coefficient de sécurité supérieur que comporte le diagramme des surpressions.

Ces accidents paraissent dus principalement à des affouillements du soubassement ou du sous-sol. Il est néanmoins difficile, *a posteriori*, de déceler si des

sollicitations un peu fortes de la fondation sous l'arête extérieure de la muraille n'y ont pas contribué, d'autant que le pilonnage alternatif produit par le clapotis accroît la tendance aux tassements.

En fin de la 3^e partie, nous déduisons, en outre, de la théorie des houles limites, une valeur en bon accord avec celle dictée par l'expérience pour la profondeur à adopter au pied de la digue afin d'éviter le risque d'un déferlement dangereux de la houle incidente.

(A suivre.)