

MÉMOIRE

Département de Maths de l'ENS

Laboratoire d'Océanographie Spatiale de l'IFREMER

Modulation des vagues générées par le vent

Elève :
Sophie Marbach

Supervision :
David Lannes à l'ENS
Fabrice Ardhuin, Bertrand Chapron
et Louis Marie à l'IFREMER



Les Tonnerres de Brest - Juillet 2012

Juin-Juillet 2012

Table des matières

Introduction	1
I Etude expérimentale des vagues générées par le vent dans la rade de Brest	3
I Radar récepteur et émetteur	4
I.1 Principe de l'acquisition par radar	4
I.2 Premières expérimentations	5
I.3 Premières Acquisitions en mer	19
II Capteur de pression	20
II.1 Présentation du capteur de pression	20
II.2 Théorie des ondes de gravité monodirectionnelles	21
II.3 Séries temporelles de vitesses	23
II.4 Séries temporelles de pressions	25
III Autres amuseries sur les vagues	26
III.1 Influence du vent sur le kurtosis de la répartition spectrale des vagues .	26
III.2 Y a-t-il plus vaguelettes dans les creux ou dans les crêtes ?	27
IV Caméras de Stéréo-Vidéo	30
IV.1 Présentation du système	30
IV.2 Surfaces marines	30
II Etude mathématique des ondes de surface et de la propagation des paquets d'onde	31
I Equation de propagation des ondes de surface : Formulation de Dirichlet-Neumann	32
I.1 Présentation du problème	32
I.2 Opérateur de Dirichlet-Neumann	32
I.3 Formulation hamiltonienne	33
I.4 Théorie Linéaire	33
I.5 Equations de modulation	35
II Equations de modulation en profondeur finie	37
II.1 Adimensionnement des équations	37
II.2 Problème de la modulation à un ordre supérieur en eaux de profondeur finie	37
II.3 Le modèle de "dispersion complet" de Benney-Roskes	38
II.4 Modèle de Benney-Roskes simplifié	38
II.5 Modèle de Davey-Stewartson en dimension 1	39
II.6 Equation non linéaire de Schrödinger	39
II.7 Instabilité de Benjamin-Feir	40
III Extension à un problème plus général	41
III.1 Présentation du problème	41
III.2 Approximation non-linéaire de Schrödinger	42
III.3 Approximation des courtes impulsions	44
III.4 Modèle de dispersion complet	44

Introduction

Les vagues générées par le vent sont des objets très jolis à la fois d'un point de vue physique et d'un point de vue mathématique. La difficulté actuelle des ingénieurs à créer par exemple des bouées qui récupèrent l'énergie des vagues de façon efficace peut être vu comme un aperçu des obstacles que l'on rencontre à modéliser la surface de l'océan, et à prévoir son comportement.

L'objet de mon stage était notamment de tenter d'étudier la modulation des grandes vagues par les petites. On peut comprendre cela de deux façons : on peut essayer de voir dans quelle mesure des petites vagues se forment sur des grosses ; et l'on peut voir le comportement des vagues en terme de paquet d'onde au cours du temps (les vagues n'ont en effet pas une extension infinie). Le stage se déroulait en deux parties. L'une, plus physique, consistait à passer du temps à l'IFREMER de Brest, dans l'objectif de réaliser des mesures expérimentales sur les vagues dans la rade de Brest, et d'essayer de traiter les signaux obtenus et de voir leur corrélation avec des lois physiques. L'autre, plus mathématique, consistait à étudier des articles mathématiques afin de comprendre l'évolution des paquets d'onde à la surface de l'océan.

Je tiens à remercier tous mes encadrants : David Lannes à l'ENS ; Fabrice Ardhuin, Bertrand Chapron et Louis Marie à l'IFREMER, pour m'avoir sagement guidée et pour avoir répondu à toutes mes questions.

Chapitre I

Etude expérimentale des vagues générées par le vent dans la rade de Brest

Pour explorer la partie physique de la modulation des vagues, je suis allée à l'Ifremer de Brest. L'objectif, en trois semaines, était de récolter des données expérimentales à l'aide de trois instruments différents : un radar qui ferait à la fois émetteur et récepteur, un capteur de pression et des caméras de stéréovidéos. Il fallait donc d'abord prendre en main les différents appareils, voir comment on pouvait extraire des données pertinentes de chacun, mener les expériences sur la tour de marnage du môle Sainte-Anne, au pied de l'Ifremer, et enfin traiter les données et tenter d'extraire des informations pertinentes sur la modulation des vagues.

I Radar récepteur et émetteur

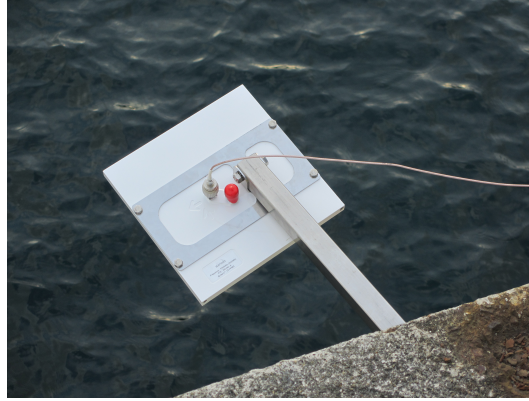


FIGURE I.1 – Photographie vue de haut du radar observant les vagues en incidence normale

I.1 Principe de l'acquisition par radar

I.1.1 Fonctionnement de l'antenne

Le dispositif complet de l'antenne a été fourni suite à une demande spécifique de l'IFREMER qui voulait pouvoir émettre et recevoir des signaux simultanément avec la même antenne. L'antenne est faite pour émettre à des fréquences élevées comprises entre 4 et 7 GHz. Dans toute la suite on travaillera à la fréquence symbolique de 5,3 GHz, ce qui correspond à des longueurs d'onde centimétriques (5,7 cm).

Le choix d'une fréquence relativement élevée est pratique pour permettre l'étude des toutes petites vagues.

L'antenne se présente sous la forme d'un écran carré qui envoie des ondes en polarisation H ou V de façon très directionnelle (5° de perte nominale sur les côtés). En incidence normale, à une distance d'environ 2m de la surface de l'océan, l'antenne éclaire typiquement un carré de 50 cm de côté. On peut régler l'orientation de l'antenne à souhait.

Elle est alimentée par un générateur très hautes fréquences par l'intermédiaire d'un rack astucieux (entrée RF sur la figure I.2).

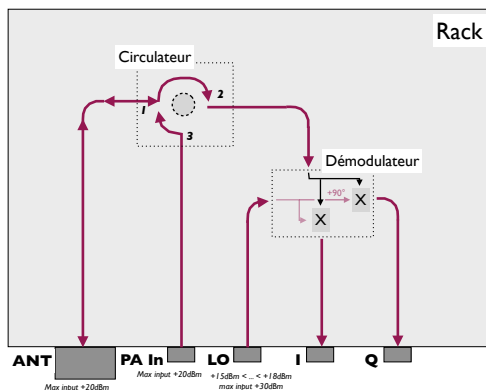


FIGURE I.2 – Schéma du Rack de l'antenne

Les générateurs utilisés sont les suivants :

- le "petit générateur" est un Rhode et Schwarz référence SMB 100 A.
- le "gros générateur" (puissance de sortie plus importante) est un Rhode et Schwarz référence SMF 100 A.

Le signal renvoyé par l'antenne est démodulé avec un oscillateur local (entrée LO) qui est souvent le même que le signal RF. Le démodulateur renvoie ainsi le signal démodulé à basse fréquence (sortie I) et le même en quadrature retard (sortie Q).

Les signaux peuvent ensuite être analysés par plusieurs instruments :

- Analyseur de spectre Rhode et Schwarz FSH8
- Oscilloscopes divers
- Enregistrements à fréquence variable sur une carte d'acquisition reliée à l'ordinateur : NI9233

I.1.2 Réflexion et rétrodiffusion des vagues

Il existe deux techniques d'observation des vagues. La plus simple à envisager est un mécanisme de réflexion directe des ondes envoyées. Comme les vagues bougent, la fréquence reçue est décalée par effet Doppler. On peut ainsi effectuer un montage en incidence normale pour émettre et recevoir les ondes réfléchies ; et on devrait pouvoir récupérer de nombreuses informations sur les vagues observées.

Un seconde méthode plus complexe s'exécute en incidence rasante. Les sommets des vagues se comportent alors comme les noeuds d'un réseau de Bragg, et renvoient des ondes qui interfèrent constructivement si l'angle est le bon. Sur le spectre en fréquence on observe alors des pics correspondant aux fréquences constructives pour l'angle pris. Dans la suite, nous ne parviendront pas à observer de tels pics, et par manque de temps, on se concentrera principalement sur le mécanisme de réflexion par effet Doppler.

I.2 Premières expérimentations

I.2.1 Niveau de réception des signaux attendus

On veut une idée du niveau de réception que l'on peut attendre en terme de modulation du signal par les vagues, avant de distinguer l'impact des vagues du bruit.

Etude de l'atténuation des câbles On dispose de plusieurs types de câbles qui vont intervenir sur le circuit ; on va faire des mesures d'atténuation du signal dans ces câbles avec l'analyseur de spectre en mode transmission.

▷ câbles noirs LMR-600 finis par des types N

Nous possédons deux câbles de 10 m (numérotés 1 et 2), et de deux câbles de 20 m (numérotés 3 et 4). Pour chaque câble, une des principales difficultés est de dérouler le câble afin de ne pas avoir de perte de bobinage. Chacune des mesures restera toutefois très sensible aux vibrations extérieures, quelles qu'elles soient, appliquées au câble, ou au repliement du câble sur lui-même (Figure I.3).

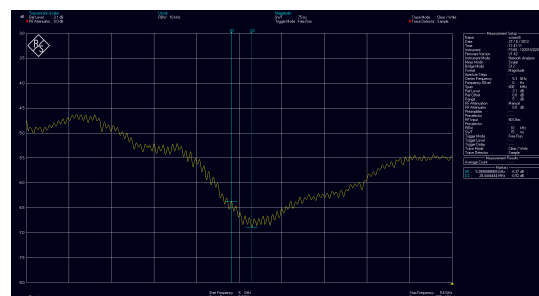
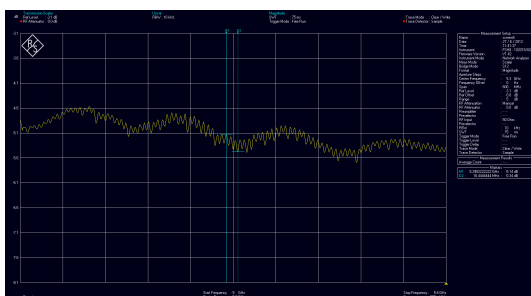


FIGURE I.3 – Transmission d'un même câble LMR-600 de 20m en dBm autour de 5,3GHz avec un span de 600MHz en bougeant le câble (positions extrêmes recherchées)

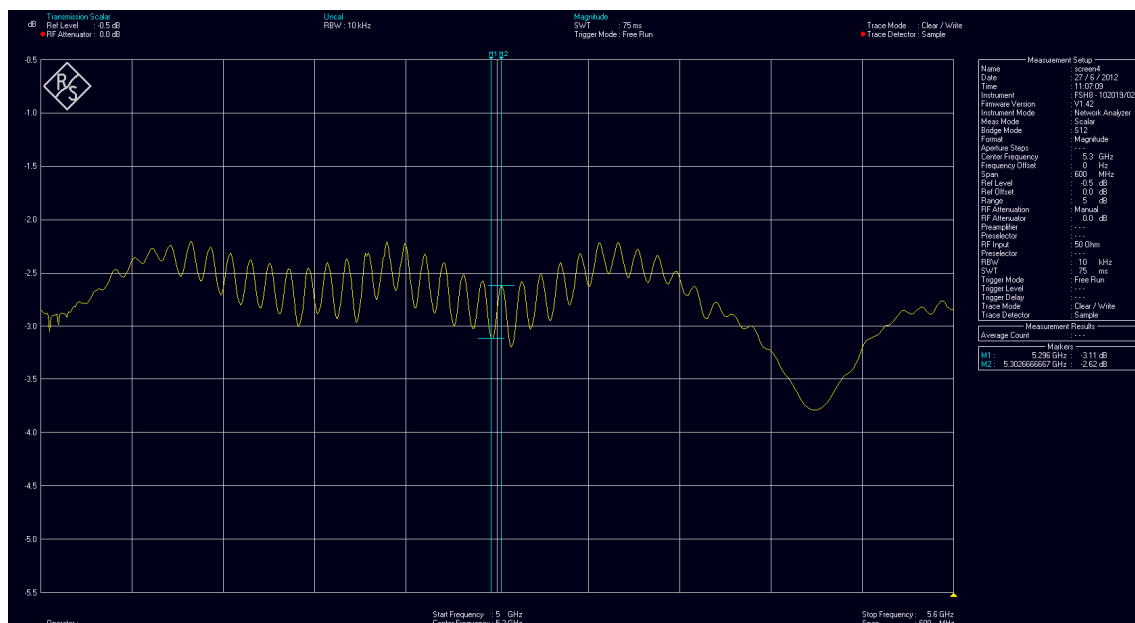


FIGURE I.4 – Transmission d’un câble LMR-600 de 10m en dBm autour de 5,3GHz avec un span de 600MHz

Traitement de la figure I.4 :

Il est important d’observer les oscillations du signal qui correspondent aux interférences de l’onde transmise directement et de l’onde qui se réfléchit aux deux extrémités avant de revenir au port de mesure. On vérifie cela facilement en ordre de grandeurs. On peut observer que deux maxima d’intensité sont séparés d’environ 13 MHz, ce qui donne une longueur d’onde de 20m (en corrigeant la vitesse de la lumière dans le câble d’un facteur 0.87 [2]) ce qui correspond bien à un aller-retour dans le câble. Une oscillation supplémentaire correspond à un aller-retour de plus dans le câble.

Ensuite on peut donner un ordre de grandeur de l’atténuation dans le câble juste autour de 5,3 GHz, et après agitations multiples des câbles pour obtenir une fourchette bien représentative on obtient les atténuations suivantes pour chaque câble :

câble	Atténuation mini	Atténuation maxi
1	-2dBm	-3,5dBm
2	-2dBm	-3,5dBm
3	-5dBm	-7dBm
4	-4,5dBm	-9dBm

En ordre de grandeur, on vérifie bien que les câbles de 20m atténuent à peu près deux fois plus que les câbles de 10m ; et que les câbles de même longueur ont à peu près les mêmes comportements.

Pour la suite on utilisera principalement le câble 1.

▷ câbles roses RG-316 finis par des types SMA

Nous possédons une dizaine de ces câbles, qui mesurent tous 1m. Le même traitement que précédemment conduit à des résultats semblables pour tous les câbles, et on attendra une atténuation d’environ $-2dBm$ par câble rose.

Atténuation en incidence normale En plaçant le radar en incidence normale, le phénomène qui éclaire le radar en retour est un phénomène de réflexion sur la surface éclairée, qui suit les lois de Descartes.

On rappelle les expressions des coefficients de réflexion (en amplitude) pour des polarisations parallèle et normale au plan d'incidence :

$$r_{\perp} = \frac{n_1 \cos(\theta_i) - n_2 \cos(\theta_t)}{n_1 \cos(\theta_i) + n_2 \cos(\theta_t)} \quad r_{\parallel} = \frac{n_2 \cos(\theta_i) - n_1 \cos(\theta_t)}{n_2 \cos(\theta_i) + n_1 \cos(\theta_t)}$$

Le milieu 1 représente l'air ($n_1 = 1$), et le milieu 2 l'eau ($n_2 = 2$) ; i symbolise incidence et t transmission. On représente ensuite les coefficients de réflexion (en puissance) correspondant (figure I.5).

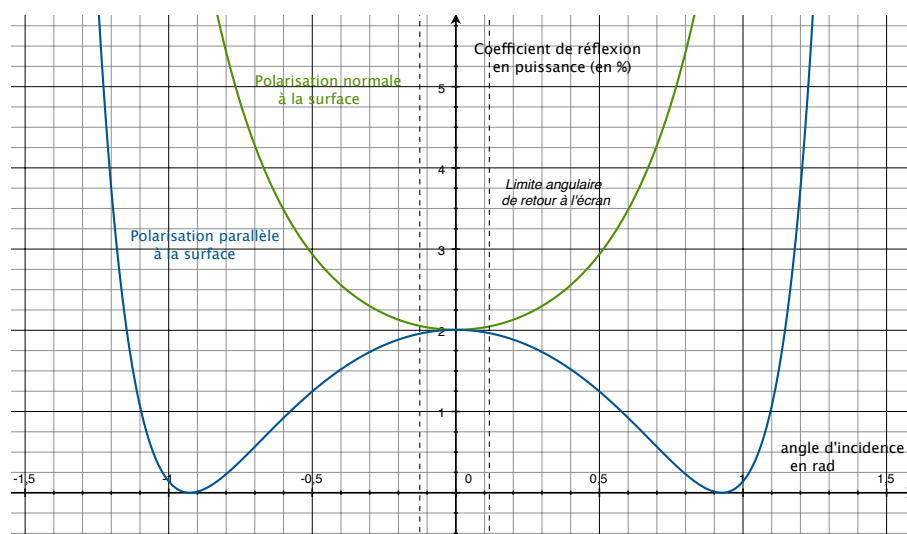


FIGURE I.5 – Coefficient de réflexion en puissance d'une onde électromagnétique à l'interface air/eau pour différents cas de polarisation

On voit aussi de façon très géométrique, qu'il existe un angle maximal d'incidence pour les rayons qui peuvent espérer revenir au détecteur ; car au minimum la distance du Radar à la surface moyenne de la mer est de 1m. Cet angle peut être majoré largement par 0,1 rad.¹

Les angles à considérer sont donc ceux compris entre les barres verticales en pointillés. Ceux ci sont atténués, quelle que soit la polarisation, d'environ 2%, ce qui correspond à moins d'1dBm d'atténuation.

De plus, seuls les points de la surface correspondants donc à une inclinaison locale de moins de 0,1rad sont pertinents. Quand bien même les creux des vagues sont "plus importants que les crêtes", on peut considérer sans peine qu'au moins 80% de la puissance du signal est perdue en directionnalité, ce qui supprime 7dBm.

Finalement, en comptabilisant l'atténuation dans les fils : (un aller-retour dans un LMR-600 de 10 m et 2m en tout dans les RG-316) on supprime encore 10dBm.

Il faudra encore enlever 8dBm dans le démodulateur.

Tout compris on ne devrait pas obtenir un signal de puissance très éloignée de $-30dBm$ environs par rapport à la puissance initiale envoyée.

1. Il suffit de faire un petit calcul en utilisant les lois de réflexion de Descartes

Fonctionnement du démodulateur Les instructions constructeurs nous disent que pour un fonctionnement de l'oscillateur local entre $15dBm$ et $18dBm$, autour d'une fréquence de $5,3GHz$, le signal à démoduler perd entre $7,5dBm$ et $10,5dBm$ de puissance.

On cherche à vérifier cette affirmation.

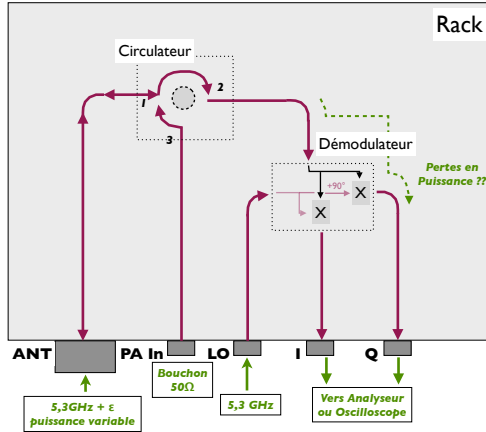


FIGURE I.6 – Schéma du montage pour l'étude de la perte en puissance du démodulateur

Pour cela on va utiliser le montage à l'envers (cf figure I.6) :

- on envoie un signal direct dans la prise ANT, signal dont on connaît bien le niveau et la fréquence, par le générateur SMF.
- on place un bouchon de 50Ω sur PA In, qui de toute façon recevra peu de puissance, qu'on peut considérer comme absorbée.
- on fixe la puissance du LO (et ce sera celle qu'on utilisera pour les acquisitions réelles ultérieures), soit à $20dBm$ à l'entrée du LO.
- on synchronise les deux générateurs et on opère un léger décalage de fréquence sur ANT, mais tout de même suffisant pour être détecté par l'Analyseur de spectre, qui coupe à $100kHz$. Sur l'analyseur de spectre, il suffit alors de mesurer la puissance correspondant à la fréquence de décalage ε .

Les mesures se sont révélées très semblables entre les sorties I et Q, ainsi pour gagner du temps et pour plus de lisibilité, on n'a rapporté que les mesures sur Q, qui sont répertoriées sur la figure I.7. On représente une grandeur appelée Atténuation, qui correspond à la différence entre la puissance mesurée sur l'analyseur de spectre, et la puissance mesurée sur le générateur SMF.

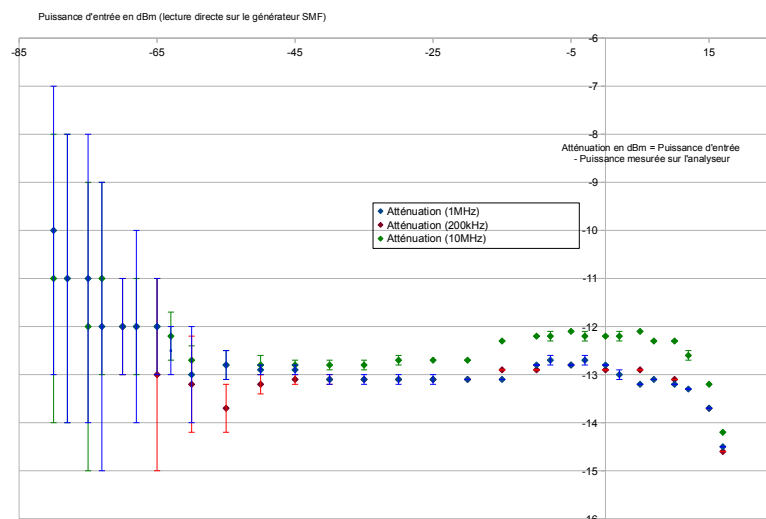


FIGURE I.7 – Atténuation du circuit comprenant le démodulateur pour différentes valeurs de ε , écart en fréquence

Les fréquences choisies sont limitées par le domaine pertinent d'étude à posteriori, et l'instrument de mesure. Il aurait été pertinent par exemple d'utiliser un oscilloscope (qui fournit toutefois des mesures moins précises) pour des fréquences très basses (de quelques Hz) qui auraient mieux caractérisé les vagues. Mais le démodulateur n'étant à priori pas doté d'un filtre passe haut, on n'a pas de raison de considérer que nos résultats ne sont pas pertinents pour de plus faibles fréquences.

L'atténuation obtenue sur tout le circuit est donc d'environ $13dBm$ en ordre de grandeurs. Pour avoir l'atténuation correspondant juste au démodulateur il faut enlever :

- $2dBm$ pour le câble reliant le SMF à l'antenne.
- $1dBm$ environs pour les câbles à l'intérieur du rack.
- $2dBm$ pour le câble reliant la sortie à l'analyseur.

Ce qui fait environ $8dBm$ de pertes par le démodulateur. Nous sommes donc d'accord avec les instructions constructeur en ordre de grandeur.

Fuites On veut étudier les fuites dues au circulateur, qui laissent passer du signal direct vers le démodulateur. Sur les informations constructeur, il est prévu des fuites à $-20dBm$. On voit que clairement ces fuites seront gênantes pour la suite.

Pour cela on fait entrer un signal à la fréquence voulue de $5,3\text{ GHz}$ dans l'entrée principale ; on place un bouchon de $50\ \Omega$ sur l'antenne, qui absorbe une puissance suffisante pour ne pas induire de réflexion trop parasite dans le circuit. La démodulation se fait donc directement sur la fuite $3 \rightarrow 2$ du circulateur. (voir figure I.8)

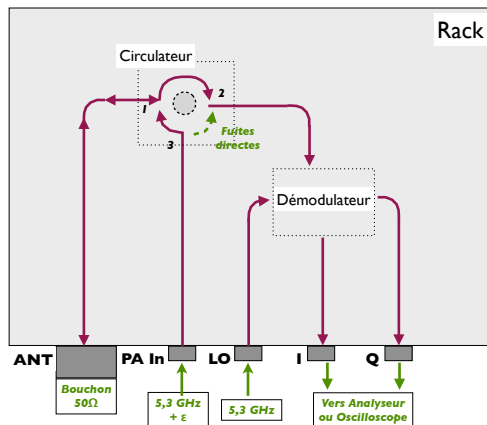


FIGURE I.8 – Schéma du montage pour l'étude des fuites directes par le circulateur

En Pa In : $5,3GHz + 200kHz$ à $20dBm$.

En LO : $5,3GHz$ à $16dBm$; ce qui devrait résulter à une atténuation d'environ $8dBm$ dans le démodulateur.

On obtient sur les deux sorties (à $0,5dBm$ près), avec des mesures concordantes entre l'oscilloscope (attention au facteur de conversion pour le calcul des dBm : il faut insérer une résistance de 50Ω sur la prise d'entrée) et l'analyseur de spectre, un signal à $-13dBm$ environs.

- Si on utilise un splitter pour envoyer le même signal à PA In et au LO, on n'obtient pas de résultat significatif car on ne dépasse pas le bruit.

- Si on utilise deux générateurs à $5,3GHz$ on récupère un signal oscillant d'une certaine amplitude qui correspond au décalage de phase entre les deux générateurs.

- On décide donc finalement de synchroniser les deux générateurs et d'opérer un léger décalage de fréquence sur Pa In, suffisant pour pouvoir analyser le tout sur l'analyseur de spectre.

Par manque de temps, nous n'avons fait qu'une mesure, mais heureusement elle correspond aux niveaux qu'on a envoyés à posteriori.

On a sur le chemin du signal, les atténuations suivantes :

- $2dBm$ pour le câble reliant le générateur à Pa In,
- $1dBm$ pour les câbles à l'intérieur du rack.
- $x dBm$ pour les fuites directes du circulateur.
- $8dBm$ pour les pertes liées au démodulateur.
- $2dBm$ pour relier la sortie à l'analyseur.

On obtient finalement $x = 20dBm$ d'atténuation sur les fuites directes. Nous sommes donc d'accord en ordre de grandeur avec les instructions constructeur.

Résumé des pertes

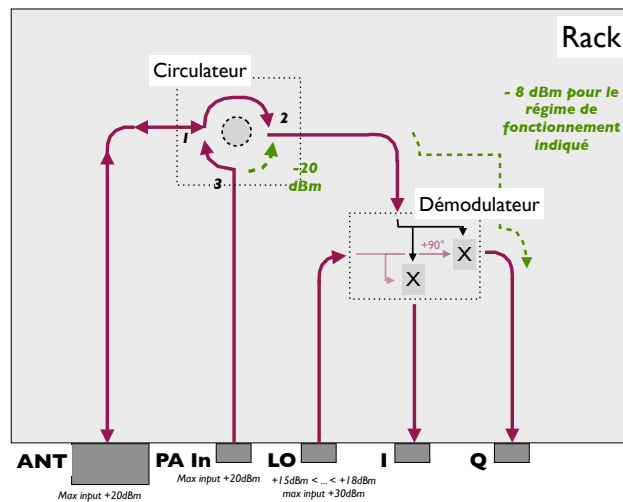


FIGURE I.9 – Schéma caractérisant les pertes et fuites principales à l'intérieur du rack

I.2.2 Prise en main du matériel

La tour de marnage Avant toute chose il me semble important pour la suite de situer l'emplacement où nous avons effectué nos mesures.

Nous nous sommes installés dans une tour de marnage appartenant à l'IFREMER, sur le côté d'une digue au bout de la baie de Sainte-Anne, face à l'embouchure appelée le goulet, en aval de la rade de Brest.



FIGURE I.10 – Photographie de la tour de marnage dans la baie de Sainte-Anne au pied de l'Ifremer

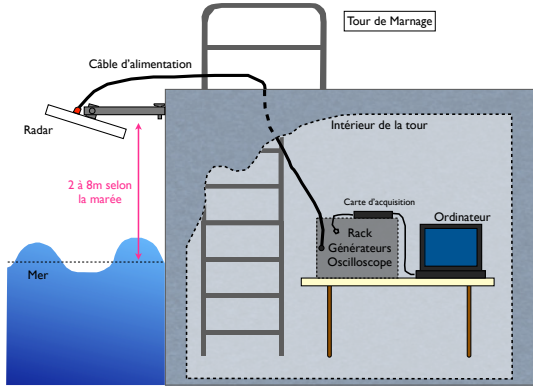


FIGURE I.11 – Représentation imagée du montage avec le radar sur la tour de marnage

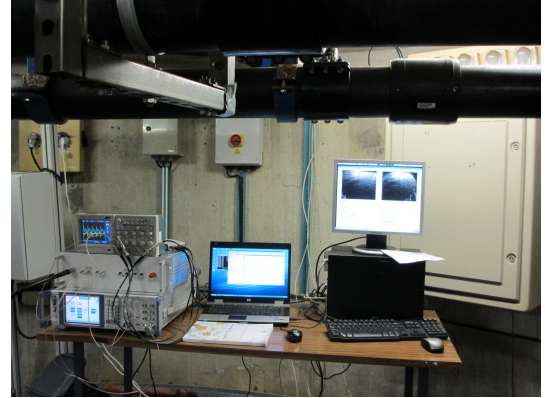


FIGURE I.12 – Photographie de l'installation à l'intérieur de la tour de marnage

Premières observations Nous avons effectué nos premières observations en envoyant le même signal à PA In et au LO grâce à un splitter (cf Figure I.9), avec une intensité suffisante pour que l'on soit dans la gamme de puissance demandée par le LO.

L'objectif de ces premières observations était d'abord de se familiariser davantage avec le fonctionnement des appareils, en situation. Ensuite d'étudier le retour des vagues, par rapport au niveau de bruit.

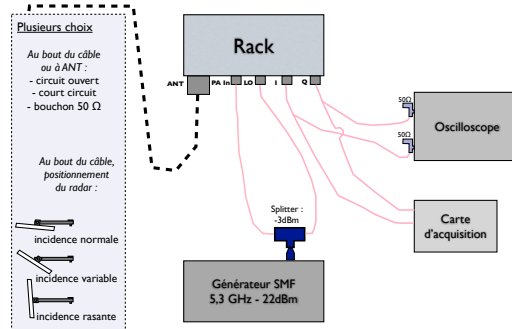


FIGURE I.13 – Schéma du montage fait et des différentes mesures possibles

Pour ce faire nous avons utilisé un appareil d'acquisition National Instrument NI9233 qui est une carte d'acquisition reliée à l'ordinateur. Après vérification de la compatibilité de l'appareil avec le circuit (on ne dépassait pas le courant maximal demandé), on a décidé d'une fréquence d'échantillonnage de 2kHz, pour des acquisitions de 15 s.

Une première mesure simple (avec des bouchons de 50Ω sur les deux entrées du NI9233 utilisées ultérieurement) donne un niveau de bruit à $-120dBm$:

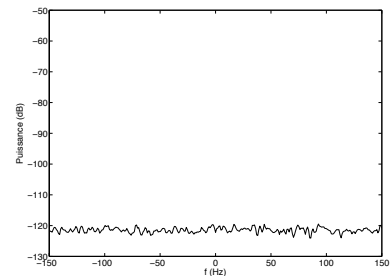


FIGURE I.14 – Bruit lié à l'instrument de mesure : bouchons 50Ω sur les deux entrées utilisées ensuite

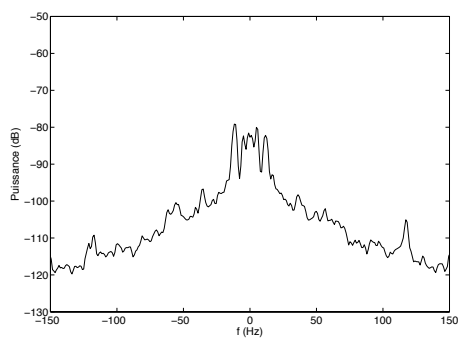


FIGURE I.15 – bouchon circuit ouvert sur ANT

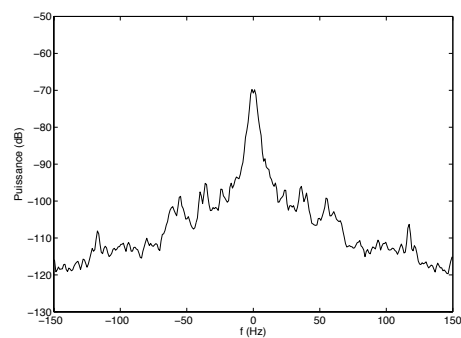


FIGURE I.16 – bouchon circuit ouvert au bout du câble noir

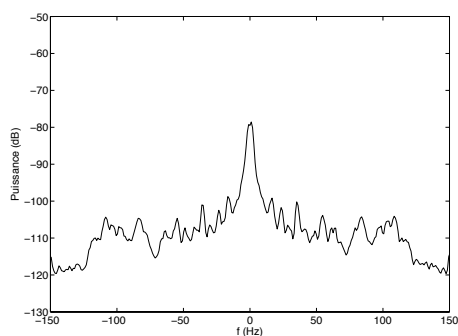


FIGURE I.17 – bouchon court circuit au bout du câble noir

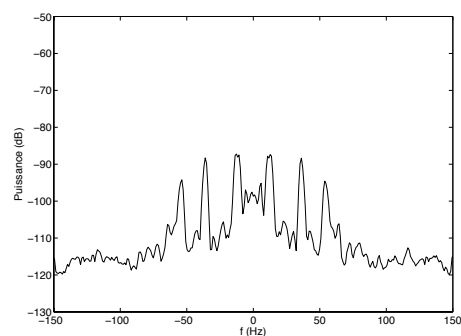


FIGURE I.18 – bouchon 50Ω au bout du câble noir

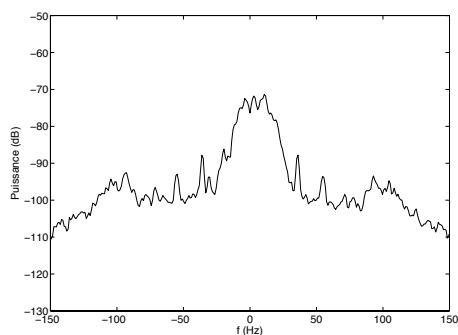


FIGURE I.19 – incidence quasi normale ($> 80^\circ$)

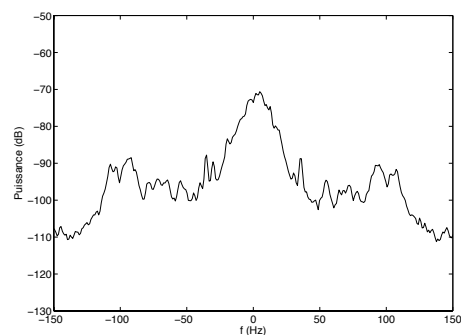


FIGURE I.20 – incidence quasi normale ($> 80^\circ$)

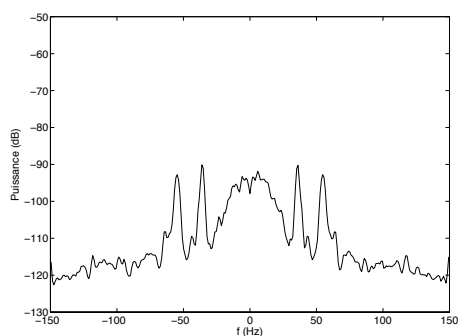


FIGURE I.21 – incidence quasi rasante, en direction de la falaise

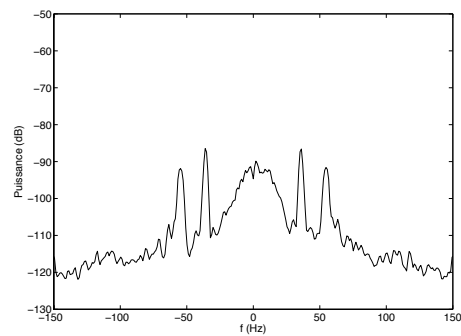


FIGURE I.22 – incidence quasi rasante, en direction du goulet

Il est à noter que nous avons mis tous les appareils en AC, et de même l'instrument d'acquisition qui nous permet d'enregistrer les données est couplé en AC avec une fréquence de coupure à 0,5Hz.

Traitement des acquisitions

Pour chaque acquisition, on effectue une transformée de fourier rapide (FFT) avec un detrend et une fenêtre de blackman-harris [4]. Dans toute la suite, les FFT seront accompagnées du même traitement, sauf précision contraire. Le signal sur lequel on fait la FFT est un signal complexe : $I(t) + i.Q(t)$.

Les figures ci-dessous montrent les différents spectres obtenus, où l'on représente à chaque fois la puissance en décibel en ordonnée en fonction de la fréquence. Les graphes ont été recentrés sur les zones d'importance.

Interprétations

- On a pour l'instant du mal à expliquer les pics de retour lorsqu'on met un bouchon de 50Ω au niveau de l'antenne. En effet, les fréquences sont trop faibles pour pouvoir associer ça à un aller retour dans le câble noir.

- Pour les observations en incidence normale, on voit bien un large spectre centré sur 0, peu symétrique, et qui dépasse largement le niveau de bruit des pics à 50Ω : en effet le pic principal atteint un maximum autour de $-70dBm$, tandis que le maximum de bruit pour 50Ω est sous $-80dBm$. On remarque au passage que l'intensité qu'on récupère est très inférieure à celle attendu par nos calculs d'ordre de grandeur (on ne devait avoir que $-30dBm$ d'atténuation ; là on a $-90dBm$). Nous avons donc négligé à tort un phénomène dans le circuit - probablement la perte en directionnalité du signal est sous-estimée.

- Pour les observations en incidence rasante, on n'observe d'abord pas de franche différence entre le signal qui est envoyé vers le goulet et celui qui est envoyé vers la falaise : ce qui prouve qu'on doit avoir en amont des pertes trop importantes. Ensuite les spectres sont situés sous le niveau de bruit d'un bouchon 50Ω , et ils reproduisent d'ailleurs les mêmes pics. Nous n'observons donc rien de pertinent en incidence rasante.

Découverte du problème majeur Après de nombreuses tentatives d'observations des ondes de rétrodiffusion de Bragg, complètement dominées par du bruit inexpliqué, nous avons décidé de trouver toutes les causes de bruit que nous n'avions pas envisagé précédemment. Bien sûr, nous avons un peu de signal à 50 Hz partout, mais la source de bruit principal était toute autre. C'est lorsque nous avons resserré le connecteur qui liait l'antenne au câble noir, qui provoqua une légère amélioration du signal, que nous avons découvert le problème.

En effet, la mauvaise connexion entre le câble et l'antenne provoquait une réflexion énorme du signal à cet endroit ! Même en resserrant la connexion au mieux, il était impossible de s'en affranchir.

Nous avons effectué deux expériences pour mettre en évidence ce phénomène.

Signal vers le ciel

La plus simple était de comparer le spectre récupéré en dirigeant l'antenne vers le ciel (pas de réflecteur a priori), au spectre récupéré en dirigeant l'antenne vers la mer. Cette expérience a été réalisée en branchant le SMB couplé à un amplificateur ($+33dBm$ exactement) sur PA In, et le SMF sur le LO, les deux étant synchronisés. Ceci permettait d'augmenter la puissance envoyée vers l'antenne, sans toutefois changer la gamme d'utilisation du LO.

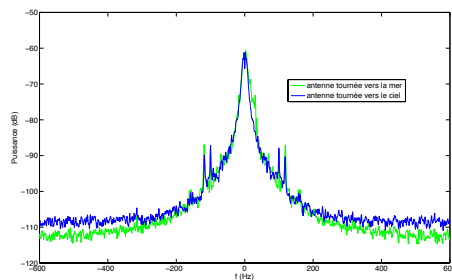


FIGURE I.23 – Comparaison du spectre des fréquences à 5,3GHz, pour une antenne tournée vers la mer, et pour une antenne vers le ciel

Remarque On pourrait nous objecter que le problème venait ici peut être du choix de la fréquence (5,3 GHz), mais nous avons effectué le même test pour différentes fréquences proches (de 5 GHz à 5,6GHz) et le problème était le même. Pour en avoir la certitude, nous avons toutefois effectué cette dernière expérience.

Utilisation de l'analyseur réseau

Nous avons finalement décidé de brancher l'analyseur réseau à la place de ANT. (Montage : Analyseur puis câble noir puis antenne). L'antenne étant tournée vers la mer, nous avons utilisé une option de l'analyseur qui nous permettait de situer l'amplitude de la réflexion en fonction de la distance du point à l'antenne. (Pour cela l'analyseur effectue un sweep en fréquence).

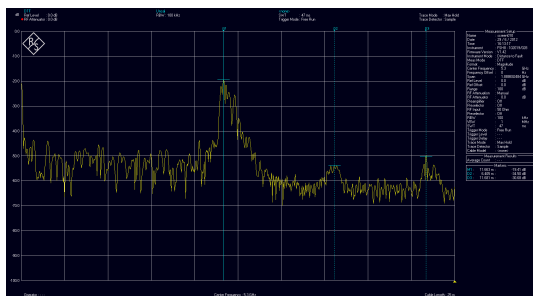


FIGURE I.24 – Amplitude des réflexions en fonction de la distance, en prenant le maximum détecté sur deux minutes

La dernière réflexion, 12m plus bas, correspond au fond de la mer, à cet endroit-là. (En effet nous ne sommes vraiment pas loin de la côte).

Analyse de la figure I.23

- Les hautes fréquences sont un peu plus atténuées par la présence de la mer, mais ce ne sont pas celles pertinentes pour l'étude des vagues.
- Pour les basses fréquences, les deux signaux sont très corrélés. La seule exception concerne la largeur du spectre pour le signal avec antenne tournée vers la mer : on remarque qu'il est plus large pour les fréquences positives, et ça, c'est bien la trace de la présence de la mer. Mais autant dire que ce n'est pas évident à quantifier, et aussi qu'on ne voit pas grand chose.

Analyse de la Figure I.24

On remarque un premier pic énorme à 11,6m, mais en fait, comme les ondes se propagent sur 10m dans un câble à $0.87 \times c$, il faut voir les 10 premiers mètres comme $10/0.87 = 11,5m$ si les ondes se propageaient dans le vide (ce que l'analyseur considère). La première réflexion correspond donc à la liaison antenne/câble.

La seconde réflexion, environs 6m plus bas, correspond cette fois-ci à la surface de la mer, et c'est bien ce qu'on constate à peu près à l'oeil, depuis la tour de marnage. Cette réflexion est néanmoins bien moins intense que la réflexion antenne/câble. Nous ne pourrions donc rien observer tant que nous n'aurons pas trouvé une solution pour s'en affranchir.

I.2.3 Découpage de l'espace physique en boîtes

Nous avons trop de bruit, au niveau de la connexion câble/antenne. Nous avons donc décidé de découper l'espace physique en boîtes, de sorte de pouvoir choisir la boîte que l'on regardait : en particulier, la boîte qui contenait la surface de la mer.

Explication physique du découpage On exécute un sweep en fréquence : on sweep de façon centrée à 5,3 GHz, sur 40 MHz, le tout sur $\tau = 20ms$. Ceci s'appelle faire des chirps.

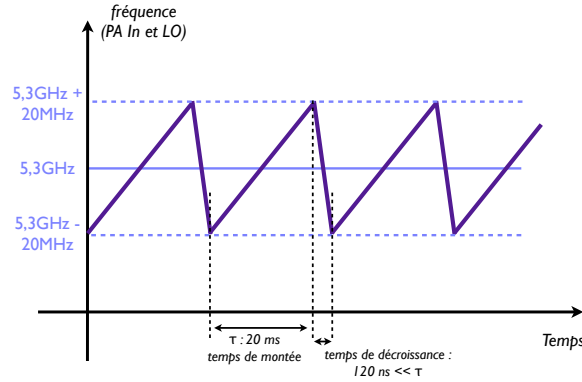


FIGURE I.25 – Illustration de l'évolution de la fréquence du générateur en fonction du temps

Si on note r le sweep rate, alors, sur la durée τ , on a $f(t) = f_0 + r.t$ où $f_0 = 5,28\text{GHz}$.

Si un écho a lieu à la distance δ , (sur un objet fixe...), la fréquence entrant au LO au bout de $\frac{2\delta}{c}$ est $f_0 + \frac{2\delta}{c}r + r.t$, et celle provenant de l'écho est $f_0 + r.t$ et après démodulation, on récupère $\frac{2\delta}{c}r$ (à un décalage de quelques centimètres près correspondant aux trajets différents dans les circuits à l'intérieur du rack).

On peut remarquer que $\tau \gg 2\frac{d_{max}}{c}$ où $d_{max} \simeq 30m$ donc qu'on n'aura pas de problème de superposition de signaux sur la durée τ , provenant d'une période antérieure.

On effectue alors une FFT sur chaque chirp de durée τ . Sur la FFT d'un chirp, les fréquences sont donc au moins séparées de $\frac{1}{\tau}$. Par conséquent, on ne distinguera que des échos séparés au minimum de δ tel que : $\frac{1}{\tau} = \frac{2\delta r}{c}$ donc $\delta = \frac{c}{2r\tau} \simeq 3,75m$.

Ainsi, en faisant une FFT sur un chaque chirp, on récupère l'aspect moyen (sur la durée τ et sur la longueur δ) du signal réfléchi par chaque boîte de taille δ . Autrement dit, pour le N^{eme} chirp, on se trouve à la date $N\tau$, et la p^{eme} harmonique de la FFT correspond à l'allure moyen du signal réfléchi par la p^{eme} boîte entre $(N-1)\tau$ et $N\tau$.

Finalement, il suffit, pour étudier l'évolution de la réflexion moyenne par la surface éclairée par le radar, de trouver la bonne boîte (potentiellement la 5ème ou la 6ème), et d'étudier l'évolution de l'harmonique de la FFT sur chaque chirp. Il y a donc trois échelles d'évolution temporelles à bien distinguer :

- la période moyenne des vagues très grande devant :
- la taille des chirps τ très grande devant :
- le temps que l'écho à la surface se fasse.

Ceci permet effectivement de s'affranchir de la réflexion entre l'antenne et le câble noir, qui a lieu dans une boîte différente !

Récupération des données

- Comme on n'a pas de synchronisation extérieure pour le boîtier NI9233, on acquiert la voie de synchronisation du générateur qui nous permettra d'effectuer une synchronisation manuelle ultérieurement.

- Le boîtier demande des périodes d'échantillonnages multiples de $2.10^5 s$. Comme on veut aller en distance environs à 100m, on veut au moins 60 points environs (ce qui correspond plutôt à 180m); ce qui indique une fréquence au moins de l'ordre de $3kHz$. On choisit alors la fréquence la plus proche par valeurs supérieures : $f_{acq} = 6250Hz$.

Manipulation à terre pour illustrer le découpage en boîtes Avant de redescendre le matériel au môle, nous avons décidé de tester l'expérience à terre. Pour ce faire, nous avons tout simplement utilisé un chariot qui traînait, et une grande plaque métallique (sur laquelle était peinte un damier, qui interviendra ultérieurement - mais peu importe la couleur de la plaque).

Il suffirait donc de reculer ou d'avancer avec le chariot, sur lequel serait posé la plaque, devant le radar. On ne pouvait pas rêver d'un meilleur réflecteur, qui représenterait ainsi l'évolution possible de la surface éclairée par le radar.

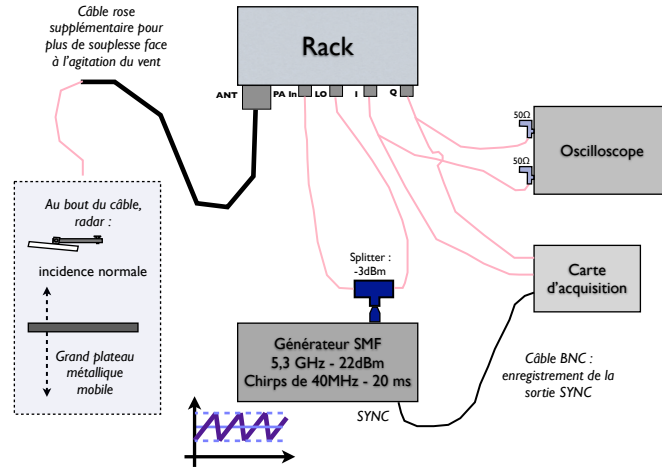


FIGURE I.26 – Schéma du montage à terre pour vérifier la pertinence du montage

Situation radar à vide

Sous l'hypothèse d'une unique réflexion à la distance L , on a, à la fréquence f , un retard de phase : $\frac{2L}{c/f} * 2\pi$ pour le signal qui emprunte le chemin PA In, par rapport à celui qui emprunte le chemin du LO (à une constante indépendante de L près)

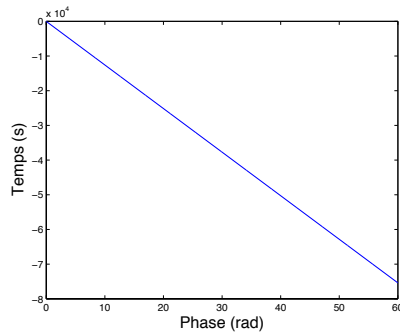


FIGURE I.27 – Evolution de la phase du signal en fonction du temps

Autrement dit, dans notre cas, on obtient un retard de phase : $\varphi(t) = -4\pi r t \frac{L}{c}$.

On vérifie juste ça, en étudiant l'évolution de l'argument $I + i.Q$ en fonction du temps : cela correspond exactement à φ . On remarque qu'en mode Lissajous, ce qu'on observe à l'oscilloscope doit avoir la forme d'un cercle, à peu près. C'est le cas.

On vérifie en ordres de grandeurs sur la figure. On a une pente de $1250 rad.s^{-1}$, ce qui correspond à une distance $L = 14,9m$.

Or le déphasage en longueur total est bien de $1m$ environs à l'intérieur du rack + $11,5m$ dans le câble noir + dans le câble rose $1/0.7 = 1,4m$ [3]. Ce qui fait un total d'environ $14m$. A $1m$ près, qui peut être dû à une sous estimation des trajets dans le rack, et aux liaisons entre câbles, on arrive au bon ordre de grandeur.

De même, si on fait la FFT de $I(t) + i.Q(t)$ sur chaque chirp on doit constater un pic de fréquences à $f = -\frac{2rL}{c}$ (parce que le signal démodulé a du retard par rapport à l'oscillateur local). On le voit bien sur la figure ci-dessous :

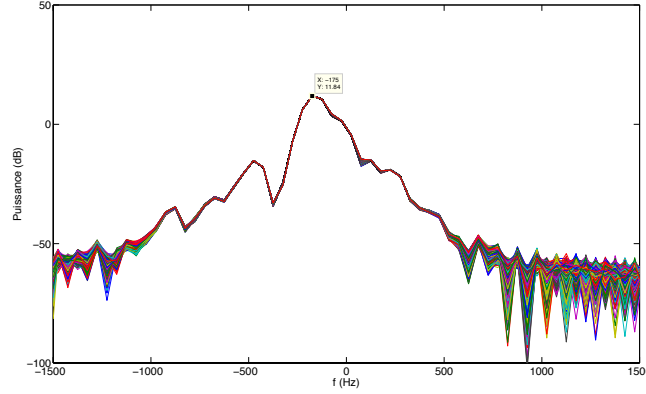


FIGURE I.28 – Représentation des FFT sur chaque chirp (chaque couleur correspond à un chirp) pour le radar n'observant rien

Le pic de la FFT correspond à une fréquence $f = -175Hz$, soit une longueur $L = 13 \pm 4m$ (l'incertitude est due à la période d'échantillonnage finie). Les résultats sont donc bien concordants.

Situation : plateau tiré par un homme à vitesse la plus constante possible

On représente d'abord, parce que c'est la première chose qui vient à l'esprit, la superposition des FFT par chirps du signal.

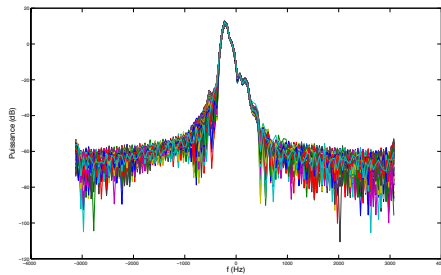


FIGURE I.29 – Représentation des FFT sur chaque chirp (chaque couleur correspond à un chirp) pour le radar observant un plateau réfléchissant reculant

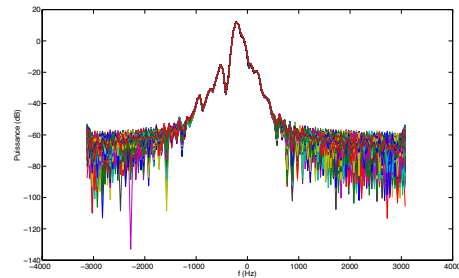


FIGURE I.30 – Représentation des FFT sur chaque chirp (chaque couleur correspond à un chirp) pour le radar n'observant rien

On constate la présence de fluctuations fortes d'amplitude sur environ 10 boîtes, à partir de la 5ème boîte (soit sur à peu près 30m ce qui correspond à la longueur du couloir dans lequel a reculé notre collaborateur) après la réflexion principale à la liaison câble-antenne.

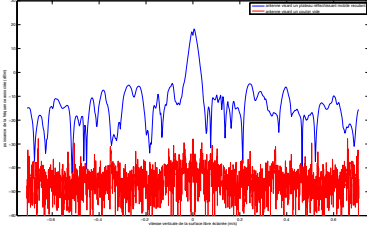


FIGURE I.31 – FFT de l'harmonique 0

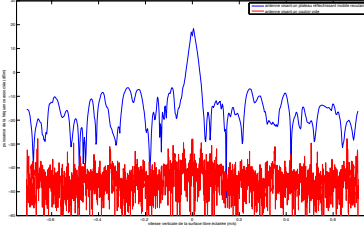


FIGURE I.32 – FFT de l'harmonique 1

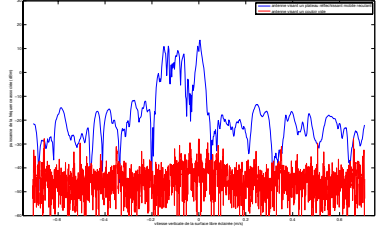


FIGURE I.33 – FFT de l'harmonique 2

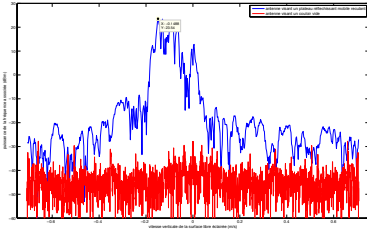


FIGURE I.34 – FFT de l'harmonique 3

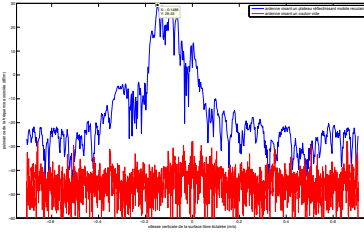


FIGURE I.35 – FFT de l'harmonique 4

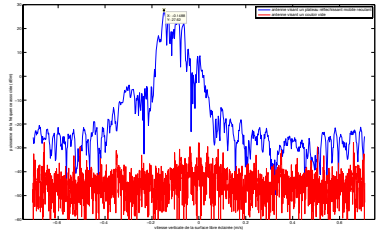


FIGURE I.36 – FFT de l'harmonique 5

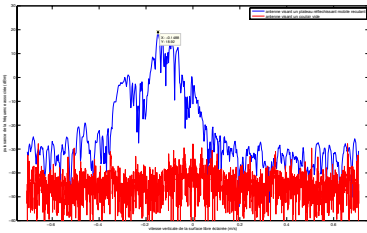


FIGURE I.37 – FFT de l'harmonique 6

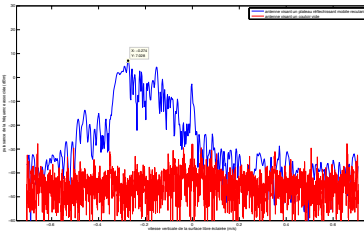


FIGURE I.38 – FFT de l'harmonique 7

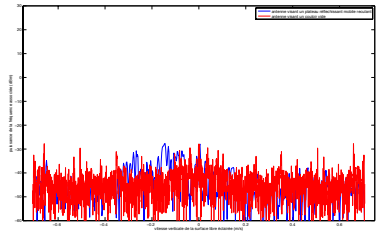


FIGURE I.39 – FFT de l'harmonique 18

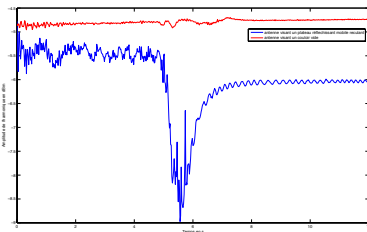


FIGURE I.40 – Variations d'amplitude de l'harmonique 0

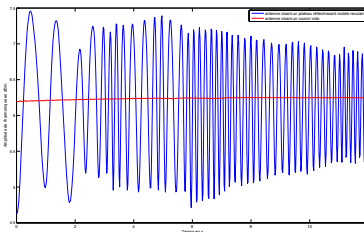


FIGURE I.41 – Variations d'amplitude de l'harmonique 5

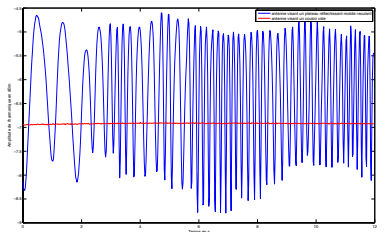


FIGURE I.42 – Variations d'amplitude de l'harmonique 6

On regarde alors ce qu'il se passe sur les premières boîtes. On ne voit aucun signal significatif jusqu'à la deuxième ou la troisième boîte où un signal régulier apparaît : l'amplitude de la boîte connaît des fluctuations régulières dues au déplacement du réflecteur (figures I.40-42). Si l'amplitude n'est régulièrement modulée qu'à partir du quart du temps c'est que notre collaborateur n'a pas commencé tout de suite à reculer régulièrement.

Sur chacun de ces graphes, on effectue alors une FFT. Une unité de fréquence sur le diagramme de la FFT correspond à $\frac{1}{\tau}$ (parce que c'est le nombre de points qu'on a sur le dessin par unité de temps) ; et cela correspond à un avancement spatial de δl tel que $\frac{2\delta l}{\lambda} = 1$ donc à une unité de vitesse : $+\frac{\lambda}{2\tau}$.

On commet dans ce calcul une incorrection : λ correspond à la longueur d'onde d'une fréquence variable, on prendra la fréquence centrale pour le calcul, et après l'erreur relative commise sur λ est de 1%, qui se reporte donc sur la vitesse.

On voit nettement sur les graphes suivants un pic à une vitesse de $-15cm.s^{-1}$ (soit environs $5km.h^{-1}$) ce qui correspond bien à la vitesse d'un homme reculant lentement.

I.3 Premières Acquisitions en mer

Comme avant, les acquisitions en incidence rasante n'ont rien donné de pertinent.

Sinon, on peut tout de suite montrer que l'étude préliminaire à terre était pertinente. En effet, on obtient face à la mer le même genre de spectres par chirp. De plus, en prenant la FFT de l'harmonique 6 par exemple, on obtient une répartition à peu près parabolique des vitesses (en dBm), ce qui correspond à une répartition gaussienne en probabilité. Ceci ouvre donc la porte pour de nombreux traitements.

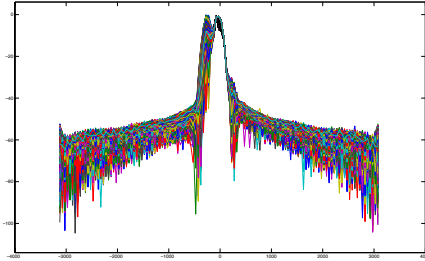


FIGURE I.43 – Représentation des FFT sur chaque chirp, le radar visant en incidence normale la mer

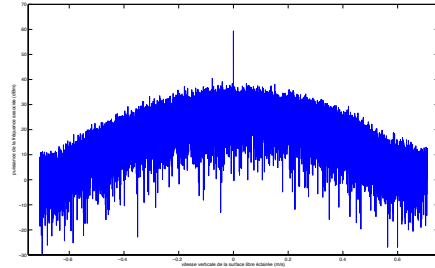


FIGURE I.44 – FFT de l'harmonique 5

II Capteur de pression



FIGURE I.45 – Photographie du capteur de pression - Ocean Sensor Systems

II.1 Présentation du capteur de pression

Le capteur de pression est un capteur qui acquiert à 10Hz. Il prend une heure de départ (qui est l'heure de l'ordinateur portable de référence) et enregistre alors la pression 10 fois par seconde. Il se place au fond de l'océan. Nous l'avons attaché à un gros poids, de sorte à ce qu'il ne bouge pas trop au fond de l'océan. Nous l'avons placé sous le radar (à peu près). On peut suspecter la présence de la tour et de tous les équipements sous marins de la tour d'être responsables de toutes sortes de fluctuations anormales.

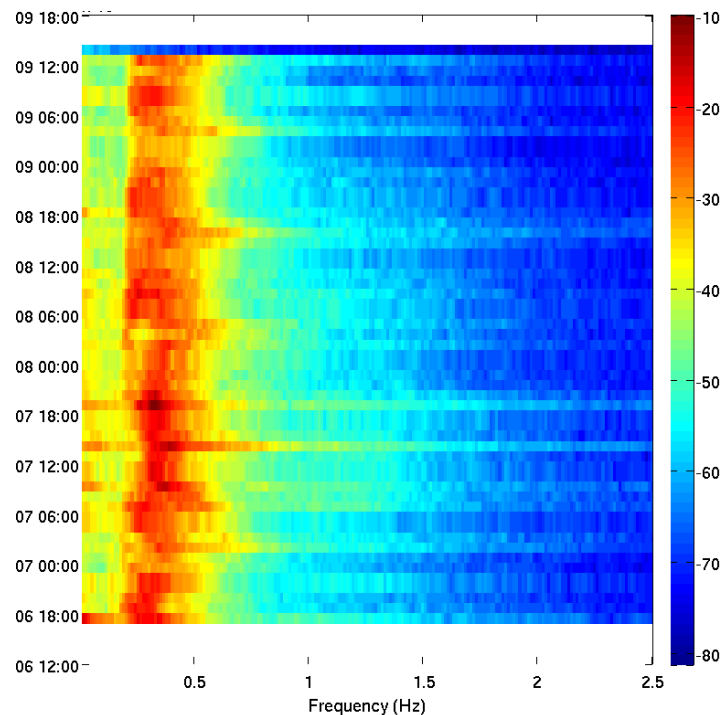


FIGURE I.46 – Représentation du spectre des vagues en fonction du temps sur plusieurs jours, obtenu à partir du capteur de pression

On observe bien sur la figure I.46 les marées, ainsi que des signaux à fréquence non nulle correspondant aux vagues principales, et un peu de signal à la fréquence double sur ce spectre. Le moment où les vagues sont les plus importantes (et donc où le spectre est très rouge) correspond au moment où le vent était relativement fort, et où la marée montait.

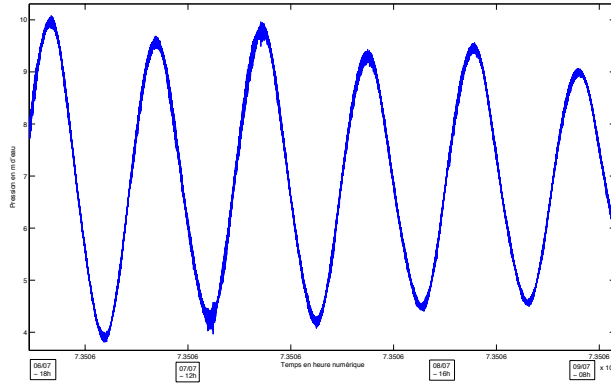


FIGURE I.47 – Représentation de la pression en mètre d'eau en fonction du temps, obtenu à partir du capteur de pression

On voit sur la figure I.47 de grandes sinusoïdes correspondant aux marées ; la modulation à plus petite échelle correspond aux vagues. (Mais le zoom est mauvais à cause de matlab).

II.2 Théorie des ondes de gravité monodirectionnelles

Avant d'aller plus loin il est nécessaire de faire un petit point de théorie sur les ondes de gravité monodirectionnelles, dont on se servira pour la suite.

On note λ la longueur d'onde de l'onde de surface, a l'amplitude de l'onde à la surface et h la profondeur moyenne de l'océan (on considère pour simplifier un fond plat). $z'z$ est sur la verticale ascendante, et $x'x$ dirigé dans le sens de propagation des vagues. On réduira dans la suite le problème à ces deux dimensions, donc invariance par translation selon $y'y$.

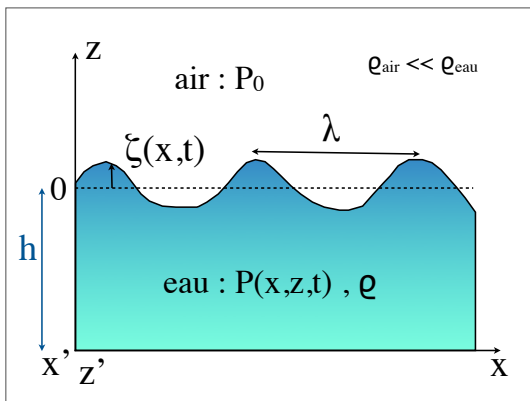


FIGURE I.48 – Schéma de l'étude des ondes de gravité

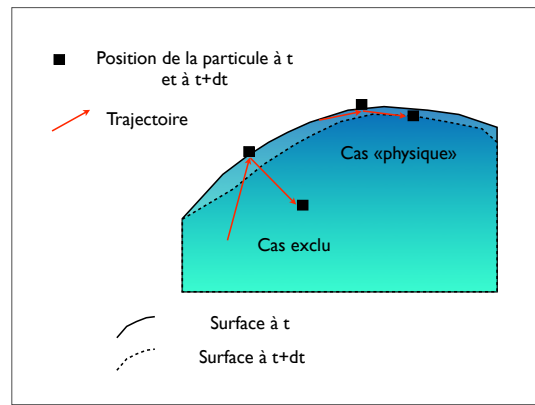


FIGURE I.49 – Condition limite à l'interface

II.2.1 Potentiel des vitesses des ondes de gravité

Hypothèses On considère une perturbation se propageant à la surface d'un fluide parfait (incompressible et irrotationnel). On peut alors introduire un potentiel des vitesses ϕ qui vérifie l'équation de Laplace : $\Delta\phi = 0$. On note $\zeta(x, t)$ le déplacement du fluide par rapport au niveau moyen de l'eau.

Pour des vagues usuelles $a \simeq 1m$ et $\lambda \simeq 10m$. C'est pourquoi on considèrera dans toute la suite que : $a \ll \lambda$

Equations aux limites Plusieurs équations :

★ A la surface libre, $p = P_0$

★ On note z le niveau de la surface libre au cours du temps, qui ne dépend que de t . Le mouvement de la surface libre ne s'identifie pas au mouvement des particules de fluide, car les particules de fluide ont par exemple, une composante de vitesse horizontale non nulle. Il paraît en revanche intuitif qu'au cours d'un intervalle de temps infinitésimal dt , la particule reste au contact de la surface libre. (Voir **Figure 2**)

$$\text{Ainsi : } \begin{cases} z(t) = \zeta(x(t), t) \\ z(t + dt) = \zeta(x(t + dt), t + dt) \end{cases}$$

$$\text{La deuxième équation s'écrit aussi : } z(t) + \frac{dz}{dt}dt = \zeta(x(t), t) + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{dx}{dt}dt + \frac{\partial \zeta}{\partial t}dt$$

$$\text{Par élimination avec la première équation, cela donne } v_z = \frac{\partial \zeta}{\partial x} v_x + \frac{\partial \zeta}{\partial t}.$$

Or le terme convectif est négligeable.

$$\text{En effet, des ordres de grandeur typiques imposent : } \frac{\frac{\partial \zeta}{\partial x}(x, t)v_x(t)}{\frac{\partial \zeta}{\partial t}(x, t)} \sim \frac{2\zeta_0}{\lambda} \ll 1.$$

Avec un développement de Taylor à l'ordre 0 :

$$\boxed{v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} \Big|_{z=0} \quad \text{Equation de la surface libre}}$$

★ Le théorème de Bernoulli indique par ailleurs : $\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz = K(t)$ (où on a négligé directement le terme $\frac{v^2}{2}$ car c'est également un terme convectif).

La dépendance temporelle de K peut être éliminée (car ϕ est défini par l'intermédiaire d'un gradient...) et en prenant pour référence le moment où la surface n'est pas perturbée (c'est-à-dire à l'infini dans le sens des x négatifs), on obtient $K = \frac{P_0}{\rho}$.

Or pour $z = \zeta$ et $p = P_0$, en dérivant par rapport au temps, cela donne :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x} v_x + g \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0$$

où le second terme est encore négligeable (terme convectif). En remplaçant, on obtient :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{Equation de propagation}}$$

Résolution ★ On utilise une méthode de séparation des variables en posant $\phi(z, x, t) = f(z) * g(x, t)$ qu'on injecte dans l'équation de Laplace.

On obtient : $\frac{f''}{f} = C$ où C est une constante.

Si cette constante est nulle, on tombe sur un champ de vitesse nul avec les conditions aux limites (inintéressant). Si cette constante est négative, on obtient une solution non physique (divergente ou évanescence selon l'axe des x).

On prend donc une constante positive : $C = k^2$ où $k \in \mathbb{R}$. On obtient $f(z) = A(e^{kz} + B.e^{-kz})$ où l'on peut s'affranchir de la constante A qui sera redondante avec la constante qu'on aura pour g .

La condition au sol cinématique $v_z(x, z = -h, t) = 0$ donne finalement : $f(z) = (e^{kz} + e^{-2kh}e^{-kz}) = e^{-kh} * \cosh(kz + kh)$

★ En cherchant des solutions sous forme d'ondes planes, l'équation de Laplace et l'équation de propagation fournissent la forme de $g(x, t)$ qu'on peut écrire : $g(x, t) = \phi_0 \sin(kx - \omega t)$

D'où :

$$\phi(z, x, t) = \phi_0 \cdot e^{-kh} * \cosh(kz + kh) \sin(kx - \omega t) \quad \text{Potentiel des vitesses des ondes de gravité}$$

On en déduit : $\zeta(x, z, t) = \frac{k\phi_0}{\omega} \cdot e^{-kh} * \sinh(kz + kh) \cos(kx - \omega t)$

Donc $a = \frac{k\phi_0}{\omega} \cdot e^{-kh} * \sinh(kh)$

D'où l'on obtient :

Champ des vitesses selon $z'z$	$v_z(z, x, t) = a \cdot \omega \cdot \frac{\sinh(kz+kh)}{\sinh(kh)} \sin(kx - \omega t)$
Champ de pression	$p(z, x, t) = P_0 - \rho \cdot g \cdot z + \rho \cdot g \cdot a \cdot \frac{\cosh(kz+kh)}{\cosh(kh)} \cos(kx - \omega t)$

FIGURE I.50 – Récapitulatif des expressions des principales grandeurs caractérisant la perturbation

Avec la relation de dispersion : $\omega^2 = gk \cdot \text{th}(kh)$

II.3 Séries temporelles de vitesses

Explication On cherche à comparer les séries temporelles du radar et du capteur de pression. Si l'on admet pour l'instant qu'à tout moment on observe une onde monochromatique monodirectionnelle (ce qui n'est pas le cas, mais on pourra s'en approcher ultérieurement), on peut utiliser les modélisations ci-dessus pour décrire le comportement de la vitesse verticale de la surface éclairée.

On veut donc à partir des données du radar obtenir des séries temporelles de pression, et à partir des données du capteur de pression, obtenir des séries temporelles de vitesses, pour enfin voir dans quelle mesure celles-ci sont corrélées.

Typiquement, si l'on veut passer de la série temporelle des pressions à celle des vitesses :

- on forme sur une échelle de temps suffisamment petite mais pas trop une FFT locale.
- on détermine le ω de la séquence choisie en prenant la moyenne de la FFT (ce qui est plus court que de modéliser).
- on trouve k par la relation de dispersion.
- on multiplie la pression à ce moment-là par les facteurs alors tous déterminés pour récupérer la vitesse (cf figure I.50)

Résultat On obtient ainsi, à raison d'une bonne mise au point de l'origine des temps, la série temporelle suivante (figure I.51), et on réalise un cospectre des deux séries temporelles (figure I.52).

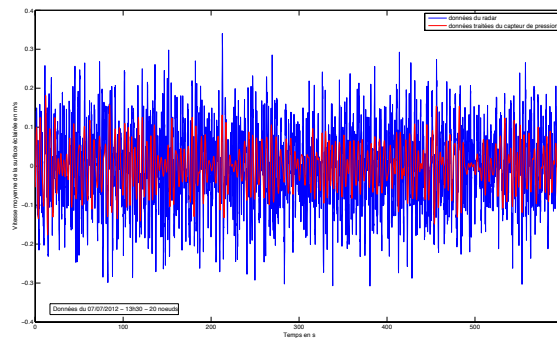


FIGURE I.51 – Représentation de la série temporelle représentant la vitesse moyenne de la surface éclairée à partir du radar et du capteur de pression

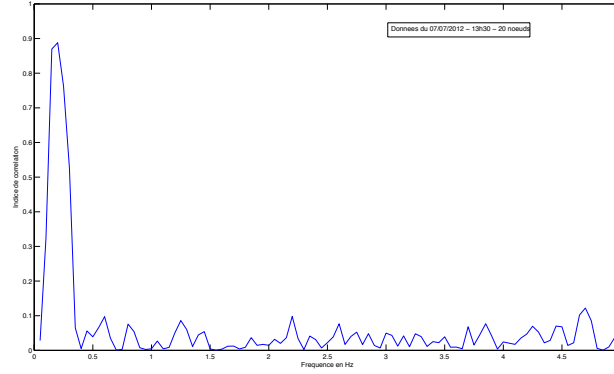


FIGURE I.52 – Représentation du co-spectre des séries temporelles de la vitesse moyenne de la surface éclairée à partir du radar et du capteur de pression

On constate une corrélation importante à basse fréquence, et ce même directement sur les séries temporelles. En revanche on ne voit pas de hautes fréquences sur le signal qui provient du capteur de pression. En effet, les hautes fréquences sont très très amorties au fond de l’océan, donc il est difficile de récupérer une information qui a probablement été perdue à cause de la limite de détection du capteur de pression.

D’autre part, on a dit tout à l’heure qu’il faut de façon préliminaire faire l’hypothèse qu’à chaque instant on observe une vague monochromatique, et monodirectionnelle. Pour s’en approcher on décide de ne regarder que les passages où le signal de la boîte observée doit caractériser une vague monochromatique. Il faut donc que le signal de la transformée de Fourier associé à la boîte observée soit localement monochromatique, c’est-à-dire que la partie réelle et la partie imaginaire soit en quadrature. On prendra simplement pour critère qu’un point correspond à un signal localement monochromatique si les maxima (de la partie imaginaire et de la partie réelle) ne coïncident pas.

On remplace alors les passages non pertinents par un signal à zéro. Les séries temporelles obtenues sont représentées figure I.53.

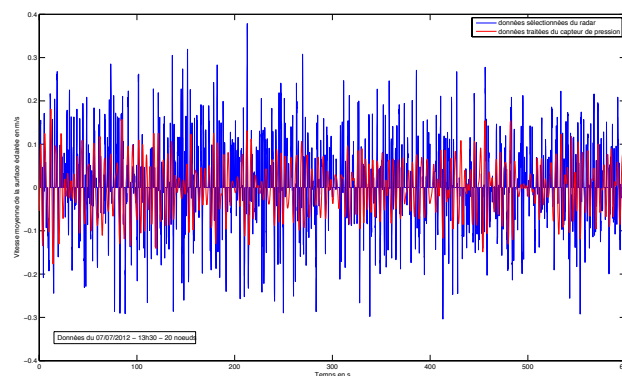


FIGURE I.53 – Représentation de la série temporelle représentant la vitesse moyenne de la surface éclairée à partir du radar et du capteur de pression - en mettant à zéro les passages où la représentation de la vitesse n’est pas pertinente pour la courbe à partir du radar

Il faudrait alors réaliser un cospectre adapté, mais les durées pertinentes sont très petites donc c’est difficile. Par manque de temps, on n’a donc pas pu pousser l’étude plus loin.

II.4 Séries temporelles de pressions

On peut faire, réciproquement, la même chose pour n'obtenir que des séries temporelles de pressions. Intuitivement, les résultats seront potentiellement meilleurs, parce qu'au fond de l'eau les hautes fréquences sont très atténuées, et il est toujours plus facile de perdre de l'information que d'en récupérer.

On a coupé ici les basses fréquences avec un coupe bande carré, pour s'affranchir du terme de marée qui apparaissait dans les deux signaux.

On représente alors la pression en mètre d'eau, et on obtient ainsi les séries temporelles suivantes qui sont relativement corrélées à basse fréquence. Ces fréquences sont environ de 0.2Hz, ce qui correspond à de très grandes longueur d'onde de l'ordre de 40m (qui correspond également au pic en fréquence des séries temporelles). La houle ? On effectue alors un cospectre qui est représenté ci dessous.

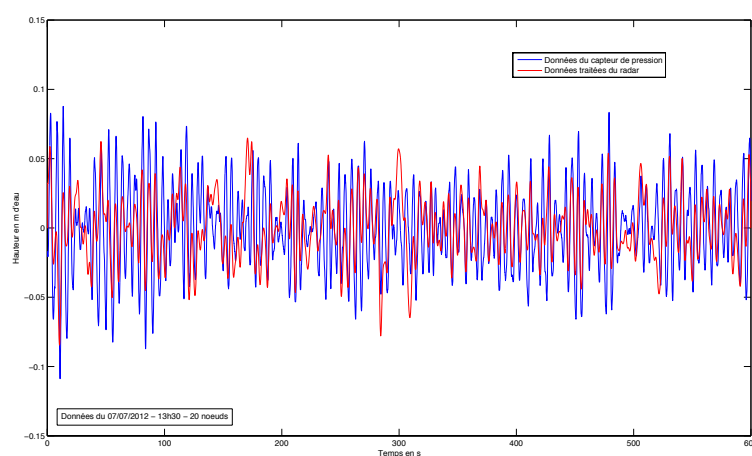


FIGURE I.54 – Représentation de la série temporelle de pression en mètre d'eau à partir du radar et du capteur de pression

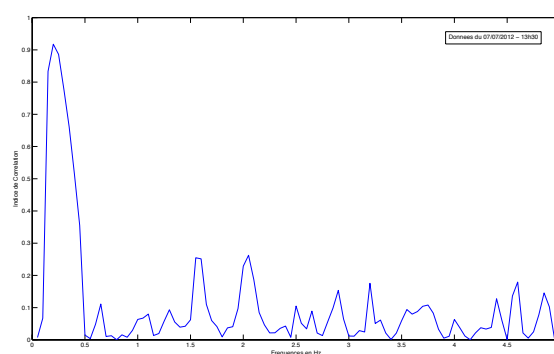


FIGURE I.55 – Représentation du co-spectre des séries temporelles de pression en mètre d'eau à partir du radar et du capteur de pression

Remarque

On peut toutefois remarquer, sur les séries temporelles, une certaine modulation : on voit des fréquences de l'ordre de 0.2 Hz modulées par des enveloppes de plus faibles fréquences. Cependant ces modulations ne sont probablement dues au fait que les vagues viennent de direction différentes et interfèrent.

III Autres amuseries sur les vagues

III.1 Influence du vent sur le kurtosis de la répartition spectrale des vagues

On cherche à voir quelle influence a le vent sur la répartition spectrale des vagues. Intuitivement, un vent fort produira des vagues de plus forte amplitude. Par conséquent, les vitesses observées seront davantage étalées parce qu'il y aura des vitesses plus importantes. On peut, à partir des séries temporelles de vitesse (du radar et du capteur de pression), effectuer un traitement probabiliste.

On représente alors la fonction caractéristique de distribution des vitesses et on tente de la modéliser par l'intégrale d'une gaussienne. En effet, les vitesses sont en première approximation, la résultante d'une superposition linéaire des vitesses associées à un grand nombre de composantes, dont les phases sont mutuellement indépendantes. La loi des grands nombres nous dit donc que leur répartition spectrale va donc être gaussienne. Pour les moments de fort vent, la distribution des vitesses s'éloigne du modèle. En effet si le vent est bien établi, les vagues vont être davantage directionnelles et donc la répartition gaussienne va être faussée.

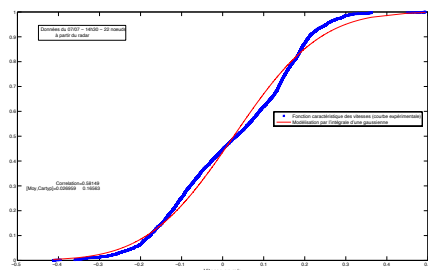


FIGURE I.56 – Fonction caractéristique des vitesses et modélisation à partir des données du radar, pour un vent fort

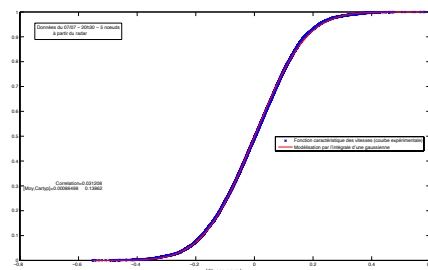


FIGURE I.57 – Fonction caractéristique des vitesses et modélisation à partir des données du radar, pour un vent faible

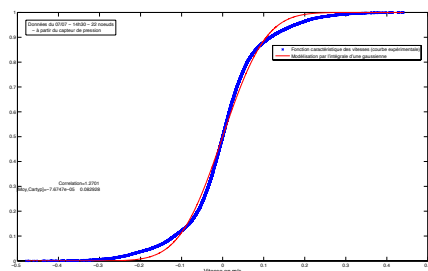


FIGURE I.58 – Fonction caractéristique des vitesses et modélisation à partir des données du capteur de pression, pour un vent fort

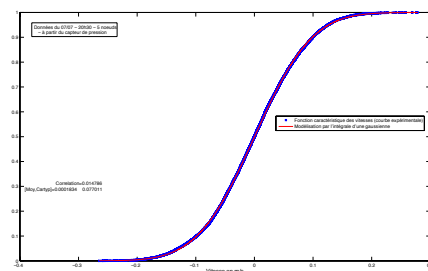


FIGURE I.59 – Fonction caractéristique des vitesses et modélisation à partir des données du capteur de pression, pour un vent faible

On décide alors d'étudier l'évolution de deux paramètres de la distribution en fonction du vent : l'écart-type et le kurtosis.

Il est malheureusement difficile d'observer une tendance nette sur ces graphes. Néanmoins, l'on peut trouver que :

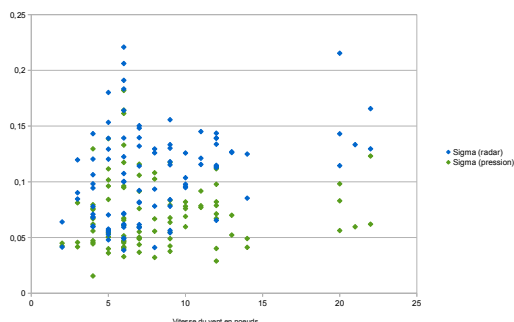


FIGURE I.60 – Evolution de l'écart-type (de la modélisation gaussienne) en m/s avec le vent, pour les deux appareils de mesure

- pour l'écart type, on observe d'abord une tendance générale de l'écart-type à être plus faible pour les données du capteur de pression (ce qui est normal car le capteur de pression perd de l'information sur les hautes fréquences, donc les hautes vitesses). Ensuite, on peut intuitivement tendre à la hausse de l'écart-type avec l'augmentation du vent - mais le vent n'est évidemment pas le seul facteur intervenant.

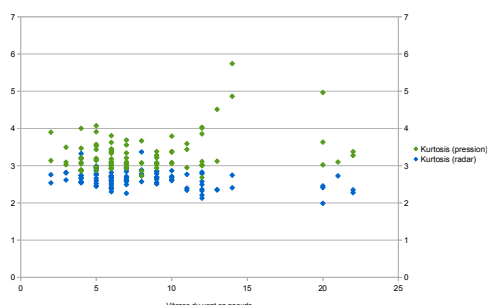


FIGURE I.61 – Evolution du kurtosis de la série temporelle des vitesses avec le vent, pour les deux appareils de mesure

- pour le kurtosis, la dispersion des points est plus importante lorsque le vent est plus important. Ce qui signifie que pour certains points correspondant à des vents élevés, l'étalement de la gaussienne est plus important. Cela est probablement dû à la naissance de vagues plus "jeunes" et au déferlement face aux vents forts. Sinon, pour les vents faibles, tous les points sont centrés autour de 3, ce qui correspond bien au kurtosis d'une répartition gaussienne.

III.2 Y a-t-il plus vaguelettes dans les creux ou dans les crêtes ?

N'est-ce pas une question que l'on aimerait se poser ? Intuitivement, l'on se dit que les petites vagues ont plutôt tendance à se former sur les crêtes que dans les creux : sur les crêtes la surface est plus prompte à être ridée par le vent. Essayons de voir cela !

Pour obtenir nos séries temporelles de vitesse, nous avons effectué des transformées de Fourier locales et recherché le pic de ces transformées de Fourier locale. Dans l'espace de Fourier, chaque vitesse à l'instant t a donc une amplitude plus ou moins importante, amplitude qui est reliée à la détection de l'antenne. Plus l'amplitude qu'on associe à la vitesse dans l'espace de Fourier est importante, plus la détection du point qui avait cette vitesse à cet instant a été efficace.

On effectue alors le procédé suivant : pour un échantillon de dix minutes, on calcule point par point l'accélération en calculant la pente entre deux vitesses consécutives. On associe à l'accélération calculée une amplitude (égale à la moyenne des amplitudes des deux vitesses dans l'espace de Fourier).

On calcule alors la moyenne des amplitudes pour les accélérations positives (caractérisant les creux) (resp. négatives, caractérisant les crêtes). Et on appelle indice de réflexion entre les creux et les crêtes, le log du rapport des deux :

$$\text{indice de reflexion creux - cretes} = \ln \left(\frac{\text{moyenne des amplitudes pour acc} > 0}{\text{moyenne des amplitudes pour acc} < 0} \right)$$

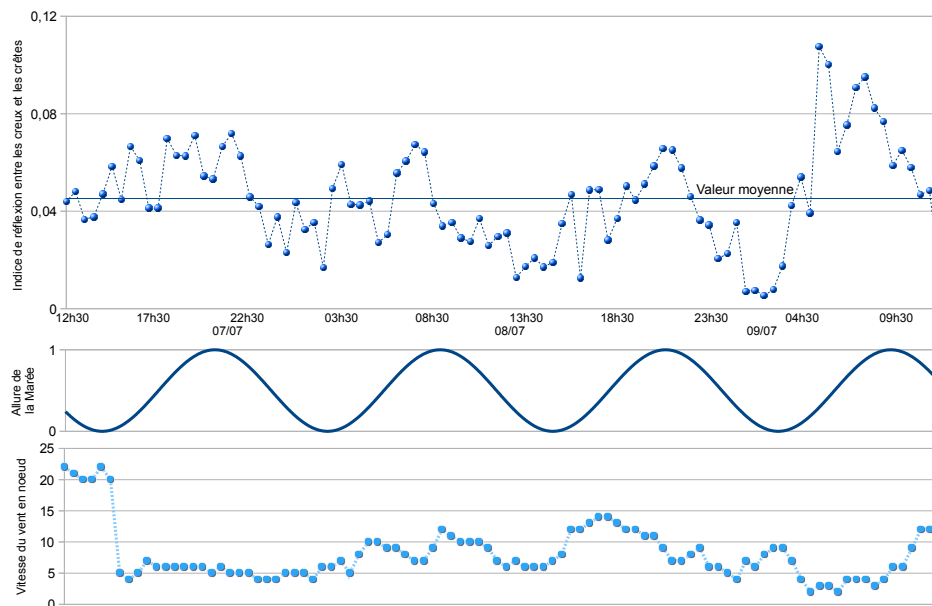


FIGURE I.62 – Représentation de l'indice de réflexion des creux et des crêtes au cours du temps vis-à-vis des conditions de marée et de vent

L'indice, s'il est positif, caractérise ainsi que les creux réfléchissent plus que les crêtes. C'est bien ce que l'on constate à première vue. Donc le radar voit plus les creux que les crêtes.

On constate de plus qu'à la montée de la marée (ie arrivée d'un grand courant dans le goulet) ainsi qu'avec l'augmentation du vent (un petit peu), la détection se fait d'autant plus facilement que l'on se trouve dans un creux. Dans ces conditions-là, de toute façon, l'apparition des vagues est favorisée, donc la mer est d'autant plus formée.

Cette fluctuation de la réflexion peut s'expliquer par deux effets :

- un creux a la forme globale d'un miroir convexe donc il renvoie de façon plus directionnelle les ondes qu'il reçoit, qu'une crête qui a la forme d'un miroir concave.
- si l'on voit de nombreuses vaguelettes à la place d'une surface plane, c'est difficile de savoir ce qu'il se passe. Au contraire, une surface rugueuse aura tendance à moins réfléchir en incidence normale.

Si l'on admet que les deux effets ont des conséquences d'importance comparables (ou du moins que le premier ne l'emporte pas sur le second), alors on peut bien conclure qu'il y a plus de vaguelettes qui se forment sur les crêtes que sur les creux.

IV Caméras de Stéréo-Vidéo



FIGURE I.63 – Photographie vue de profil des caméras de stéréo-vidéo

IV.1 Présentation du système

Le troisième appareil de mesure était un ensemble de caméras de stéréo-vidéo reliées à un ordinateur avec une mémoire importante.

Le principe, en résumé, est le suivant : deux caméras acquièrent des images de la même surface de l'océan de façon synchronisée, avec des angles différents, avec une grande fréquence d'acquisition. On crée alors un programme qui reconstitue par triangulation la surface de l'océan observée au cours du temps.

IV.2 Surfaces marines

Chapitre II

Etude mathématique des ondes de surface et de la propagation des paquets d'onde

L'idée de cette partie mathématique est de commencer par reprendre l'étude de la propagation des ondes de surface et d'en réaliser un traitement plus formel et rigoureux. On se placera dans un cadre plus large (il n'y a pas d'hypothèse à priori sur une propagation en eaux profondes / peu profondes), mais on restera toujours dans le cadre de la modélisation d'ondes monodirectionnelles pour plus de simplicité.

On retrouvera d'abord les résultats de la physique (théorie linéaire de propagation), puis on s'intéressera à la propagation de paquets d'onde dans la théorie linéaire (les vagues n'ont pas une extension finie).

On s'intéressera ensuite à la propagation non-linéaire des paquets d'onde afin de mettre en évidence l'instabilité de Benjamin-Feir.

Enfin, on se placera dans le cadre d'équations plus générales, pouvant être adaptées au cas de la propagation des vagues, et on étudiera la propagation de paquets d'onde dans ces équations.

I Equation de propagation des ondes de surface : Formulation de Dirichlet-Neumann

I.1 Présentation du problème

Le traitement effectué en première partie pour résoudre la forme de la surface libre, et trouver le champ des vitesses en tout point dans la mer peut être résolu d'un point de vue plus formel et général.

On se place toujours dans un cas monodirectionnel. Le fluide possède les mêmes propriétés. En revanche, les fluctuations de la surface libre ne sont plus nécessairement petites ; la seule restriction est une restriction pratique : la surface libre n'atteint jamais le niveau du fond.

On obtient alors l'équation suivante pour le comportement à la surface libre ($z = \zeta$)

$$v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} v_x + \frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

En remarquant que la normale à la surface libre peut s'écrire : $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla \zeta|^2}}(\vec{e}_z - |\nabla \zeta| \vec{e}_x)$, on obtient :

$$\partial_t \zeta - \sqrt{1 + |\nabla \zeta|^2} \vec{v} \cdot \vec{n} \text{ en } z = \zeta$$

On peut aussi traduire ça en terme de potentiel :

$$\partial_t \zeta - \sqrt{1 + |\nabla \zeta|^2} \partial_{\vec{n}} \phi \text{ en } z = \zeta$$

Il faut aussi réécrire le théorème de Bernoulli qui donne sur tout le domaine occupé par le fluide à chaque instant, noté Ω_t :

$$\partial_t \phi + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + gz = -\frac{1}{\rho} (P - P_0)$$

Ces équations forment ce qu'on appelle les équations de Bernoulli.

I.2 Opérateur de Dirichlet-Neumann

L'idée de la formulation de Zakharov et Craig-Sulem, est que l'on peut déterminer entièrement le flot en connaissant ζ et $\psi = \phi|_{z=\zeta}$.

En effet, la connaissance de ϕ peut être déduite en résolvant une simple équation de Laplace avec conditions aux limites (sous certaines hypothèses de régularité sur ψ et ζ) :

$$\begin{cases} \Delta \phi = 0 & \text{sur } \Omega_t \\ \phi|_{z=\zeta} = \psi & \text{et } \partial_z \phi = 0 \text{ en } z = -h \end{cases}$$

La connaissance de ϕ permet alors de récupérer le champ des vitesses sur Ω_t , et le champ de pression.

Il suffit donc de trouver deux équations indépendantes vérifiées par ψ et ζ . On a envie d'étudier les deux équations de Bernoulli à la surface du fluide.

Pour cela, on introduit l'opérateur de Dirichlet Neumann :

$$G[\zeta] : \psi \longmapsto \sqrt{1 + |\nabla \zeta|^2} \partial_{\vec{n}} \phi|_{z=\zeta}$$

où ϕ est la solution de l'équation de Laplace.

A l'aide de raisonnements sur les dérivées composées simples, on obtient l'expression des dérivées spatiales de ϕ à la surface :

$$(\partial_z \phi)_{z=\zeta} = \frac{G[\zeta]\psi + \nabla \zeta \cdot \nabla \psi}{1 + |\nabla \zeta|^2}$$

Et donc en prenant les deux équations de Bernoulli à la surface du fluide, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \zeta - G[\zeta]\psi = 0 \\ \partial_t \psi + g\zeta + \frac{1}{2}|\nabla \psi|^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{(G[\zeta]\psi + \nabla \zeta \cdot \nabla \psi)^2}{1 + |\nabla \zeta|^2} \right) = 0 \end{cases}$$

I.3 Formulation hamiltonienne

I.4 Théorie Linéaire

Paramètres adimensionnés importants On introduit pour étudier les comportements asymptotiques, les échelles caractéristiques suivantes :

- L_x , échelle caractéristique dans la direction x' .
- a , échelle caractéristique de variation de ζ .

Et on pose les paramètres adimensionnés suivants :

$$\varepsilon = \frac{a}{h}, \mu = \frac{h^2}{L_x^2}$$

appelés respectivement paramètre de non linéarité et paramètre de profondeur.

Ordres de grandeur *Vagues Tsunami* En 2004, le Tsunami qui dévasta l'océan indien fut provoqué par la création d'une faille sur 200km, dans un océan d'environ 2km de profondeur. Des observations satellites quantifient l'amplitude typique de la vague à $a \sim 60cm$.

On a donc $\varepsilon \sim 10^{-4}$ et $\mu \sim 10^{-4}$.

Le Tsunami est donc l'exemple d'une vague se propageant en "eaux peu profondes", bien que la profondeur de l'océan soit importante, notamment devant a .

Océanographie côtière A l'Ifremer nous avons étudié des vagues d'amplitude maximale $a \sim 1m$, sur une hauteur d'environ $h \sim 10m$ de fond. L'extension spatiale de ces vagues était grande, à l'échelle humaine (par exemple on les voyait venir d'environ $L_x \sim 100m$).

On a donc $\varepsilon \sim 10^{-1}$ et $\mu \sim 10^{-2}$.

Les vagues observées en océanographie côtière sont donc aussi des vagues se propageant en "eaux peu profondes", bien que ce ne soit pas évident là non plus.

Il est donc important de garder en tête que ce n'est pas seulement la quantité h qui caractérise un régime d'eau profonde, mais le rapport h/L_x .

Théorie linéaire La façon la plus directe d'obtenir des renseignements sur la forme et l'amplitude des vagues de gravité est de voir ce qu'il se passe autour de la position d'équilibre. On linéarise donc notre système :

$$\begin{cases} \partial_t \zeta - G[0]\psi = 0 \\ \partial_t \psi + g\zeta = 0 \end{cases}$$

Et on obtient une équation du second ordre pour ζ :

$$\partial_t^2 \zeta + gG[0]\zeta = 0$$

Le problème est de savoir comment l'opérateur de Dirichlet-Neumann agit sur ζ . L'idée est d'étudier l'action de G dans l'espace de Fourier, et ensuite de se ramener formellement à l'espace de départ.

Avec les approximations de linéarité, on a : $G[0]\psi = \partial_z \phi|_{z=0}$, où ϕ est solution du problème de Laplace suivant :

$$\begin{cases} \Delta \phi = 0 & \text{sur } \Omega_t \\ \phi|_{z=0} = \psi & \text{et } \partial_z \phi = 0 & \text{en } z = -h \end{cases}$$

Dans l'espace de Fourier, selon la variable x , on obtient l'équation suivante pour $\hat{\phi}$:
 $-\xi^2 \hat{\phi}(\xi, z) + \partial_z^2 \hat{\phi}(z, \xi) = 0$, avec les conditions aux limites.

On vérifie alors aisément qu'il existe une unique solution au problème de Laplace dans l'espace de Fourier, tel que :

$$\forall (\xi, z) \in \mathbb{R}^2, \hat{\phi}(\xi, z) = \frac{\cosh((z+h)|\xi|)}{\cosh(h|\xi|)} \hat{\psi}(\xi)$$

Et par conséquent :

$$G[0]\psi = \partial_z \phi|_{z=0} = |\xi| \tanh(h|\xi|) \hat{\psi}(\xi)$$

Pour traduire alors l'action de l'opérateur de Dirichlet-Neumann, on introduit la notation suivante, appelée multiplicateur de Fourier :

Si $f \in \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$, alors le multiplicateur de Fourier associé est défini par :

$$\begin{cases} f(D) : \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d) \\ \forall u \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d), \forall \xi \in \mathbb{R}^d, f(D)\hat{u}(\xi) = f(\xi)\hat{u}(\xi) \end{cases}$$

On peut donc écrire l'action de G en terme de multiplicateurs :

$$G[0]\psi = |D| \tanh h |D| \psi$$

On se retrouve alors à résoudre :

$$\begin{cases} \partial_t^2 \zeta + g |D| \tanh h |D| \zeta = 0 \\ (\zeta, \psi)|_{t=0} = (\zeta_0, \psi_0), \text{ i.e., } \zeta|_{t=0} = \zeta_0, \text{ et, } \partial_t \zeta|_{t=0} = |D| \tanh(h|D|) \psi_0 \end{cases}$$

Il suffit de résoudre dans l'espace de Fourier, de se ramener ensuite par transformée de Fourier inverse, à l'espace réel, et d'utiliser les conditions initiales pour trouver les constantes d'intégration.

On obtient alors en posant la relation de dispersion suivante : $\omega(\xi) = \sqrt{g|\xi| \tanh(h|\xi|)}$,

$$\zeta(x, t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{i(\xi \cdot x - \omega(\xi)t)} (\hat{\zeta}_0(\xi) + i \frac{\omega(\xi)}{g} \hat{\psi}_0(\xi)) d\xi + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{i(\xi \cdot x + \omega(\xi)t)} (\hat{\zeta}_0(\xi) - i \frac{\omega(\xi)}{g} \hat{\psi}_0(\xi)) d\xi$$

On peut ainsi obtenir la célérité des vagues en fonction de ξ , qui caractérise un nombre d'onde :

$$c(|\xi|) = \sqrt{g \frac{\tanh(h|\xi|)}{|\xi|}}$$

Remarque 1 : On retrouve exactement les mêmes relations que par le traitement physique direct de premier ordre. En effet, étudier le comportement des vagues autour de leur position d'équilibre, revient bien à dire que a est petit devant toutes les autres longueurs caractéristiques.

Remarque 2 : Si l'on identifie l'extension spatiale typique de la vague L_x à la longueur d'onde λ , on aura une vague concentrée dans l'espace de Fourier autour de $\xi_0 = \frac{2\pi}{L_x}$, avec une vitesse :

$$c = \sqrt{gh\nu}, \text{ o, } \nu = \frac{\tanh(2\pi\sqrt{\mu})}{2\pi\sqrt{\mu}}$$

Remarque 3 : On retrouve ainsi que dans les eaux peu profondes $\mu \ll 1$, alors $\nu \simeq 1$ et la célérité des vagues est $\sqrt{gh}$ indépendamment de leur longueur d'onde. Le milieu est non dispersif. En revanche en eaux profondes, $\mu \gg 1$, la célérité des vagues est $\sqrt{\frac{gL_x}{2\pi}}$ et le milieu est dispersif.

Il faudra donc adapter le choix des variables réduites selon les milieux dans lesquels on travaille.

I.5 Equations de modulation

Introduction du problème de la modulation Les vagues étudiées à la surface de l'océan n'ont pas une extension infinie. Il est donc important de s'intéresser à la propagation des vagues en terme de paquets d'ondes.

D'après l'étude menée dans le cadre de la théorie linéaire, on sait que les ondes planes :

$$\begin{pmatrix} \zeta(x, t) \\ \psi(x, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_{01} \\ \psi_{01} \end{pmatrix} e^{i(\vec{k}\vec{x} - \Omega t)} + cc.$$

avec $\Omega = \omega(\vec{k})$ et $\zeta_{01} = i\frac{\omega(\vec{k})}{g}\psi_{01}$ sont solution des équations de Zakharov autour de la position d'équilibre. Mais ces solutions ne représentent pas de vraies vagues (extension infinie).

On cherche alors des solutions aux oscillations lentement modulées, en forme de paquets d'onde :

$$\begin{pmatrix} \zeta(x, t) \\ \psi(x, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_{01}(\epsilon t, \epsilon x) \\ \psi_{01}(\epsilon t, \epsilon x) \end{pmatrix} e^{i(\vec{k}\vec{x} - \Omega t)} + cc.$$

où ϵ est un paramètre sans dimension supposé petit.

Cependant, au contraire des ondes planes, dans le modèle des vagues linéaires, on ne peut pas trouver de solutions exacte sous la forme de paquet d'onde. On va toutefois chercher à caractériser l'évolution de vagues qui se trouvent sous forme de paquet à l'instant initial :

$$\begin{pmatrix} \zeta(0, t) \\ \psi(0, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_{01}^0(\epsilon x) \\ \psi_{01}^0(\epsilon x) \end{pmatrix} e^{i\vec{k}\vec{x}} + cc.$$

Evolution du paquet d'onde On veut appliquer la même démarche que précédemment. Pour cela on impose naturellement la relation :

$$\zeta_{01}^0 = i\frac{\omega(\vec{k})}{g}\psi_{01}^0.$$

On impose aussi que les transformées de Fourier de ζ_{01} et de ψ_{01} soient à support compact, pour plus de simplicité.

On peut alors donner l'expression de ζ sous forme explicite :

$$\zeta(t, x) = \frac{i}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{i(\xi \cdot x - \omega(\xi)t)} \frac{\omega(\vec{k}) + \omega(\xi)}{g} \frac{1}{\epsilon} \widehat{\psi}_{01}^0\left(\frac{\xi - \vec{k}}{\epsilon}\right) d\xi + \frac{i}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{i(\xi \cdot x + \omega(\xi)t)} \frac{\omega(\vec{k}) - \omega(\xi)}{g} \frac{1}{\epsilon} \widehat{\psi}_{01}^0\left(\frac{\xi - \vec{k}}{\epsilon}\right) d\xi$$

et ainsi, à l'aide d'un simple changement de variable :

$$\zeta(t, x) = e^{i(\vec{k} \cdot x - \Omega t)} \frac{i}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{i(\epsilon \xi \cdot x + (\omega(\vec{k}) - \omega(\vec{k} + \epsilon \xi))t)} \frac{\omega(\vec{k}) + \omega(\vec{k} + \epsilon \xi)}{g} \widehat{\psi}_{01}^0(\xi) d\xi$$

$$+\frac{i}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{i(\epsilon\xi \cdot x + \omega(\vec{k} + \epsilon\xi)t)} \frac{\omega(\vec{k}) - \omega(\vec{k} + \epsilon\xi)}{g} \widehat{\psi}_{01}^0(\xi) d\xi$$

On développe au premier ordre les termes pertinents :

$$\begin{aligned} \zeta(t, x) &= e^{i(\vec{k} \cdot x - \Omega t)} \frac{i}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{i(\epsilon\xi \cdot x + (\epsilon\xi \partial \omega(\vec{k}) + o(\epsilon))t)} \frac{2\omega(\vec{k}) + \epsilon\xi \partial \omega(\vec{k}) + o(\epsilon)}{g} \widehat{\psi}_{01}^0(\xi) d\xi \\ &\quad + \frac{i}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{i(\epsilon\xi \cdot x + \omega(\vec{k} + \epsilon\xi)t)} \frac{\epsilon\xi \partial \omega(\vec{k}) + o(\epsilon)}{g} \widehat{\psi}_{01}^0(\xi) d\xi \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\widehat{\psi}_{01}^0$ est à support compact, on obtient :

$$\zeta(t, x) = e^{i(\vec{k} \cdot x - \Omega t)} \int_{\mathbb{R}} e^{i(\epsilon\xi \cdot x + \omega(\vec{k}) - \omega(\vec{k} + \epsilon\xi)t)} \widehat{\zeta}_{01}^0(\xi) d\xi + O(\epsilon) \dots + O(\epsilon)$$

ce qu'on peut réécrire en introduisant les variables réduites $t' = \epsilon t$ et $x' = \epsilon x$:

$$\zeta_{01}(t', x') = \int_{\mathbb{R}} e^{i(\xi \cdot x' + \frac{\omega(\vec{k}) - \omega(\vec{k} + \epsilon\xi)}{\epsilon} t')} \widehat{\zeta}_{01}^0(\xi) d\xi$$

$$\zeta(t, x) = e^{i(\vec{k} \cdot x - \Omega t)} \zeta_{01}(t', x') + O(\epsilon) + cc$$

On peut aussi définir ζ_{01} comme la solution du problème de dispersion linéaire suivant :

$$\partial_{t'} \zeta_{01} + i \frac{\omega(\vec{k} + \epsilon D') - \omega(\vec{k})}{\epsilon} \zeta_{01} = 0, \quad \zeta_{01}|_{t'=0} = \zeta_{01}^0$$

Approximations de l'évolution de l'enveloppe

- si l'on s'intéresse à des temps relativement courts : $t = O(\frac{1}{\epsilon})$, en ne gardant que les termes d'ordre inférieurs à $O(\epsilon)$, on peut développer $\omega(\vec{k} + \epsilon D')$ au premier ordre, et l'on obtient une équation de transport à la vitesse de groupe :

$$\partial_{t'} \zeta_{01} + \nabla \omega(\vec{k}) \cdot \nabla' \zeta_{01} = 0, \quad \zeta_{01}|_{t'=0} = \zeta_{01}^0$$

- si l'on s'intéresse à des temps plus longs $t = O(\frac{1}{\epsilon^2})$, il faut pousser le développement au second ordre, et on obtient une équation de Schrödinger linéaire :

$$\partial_{t'} \zeta_{01} + \nabla \omega(\vec{k}) \cdot \nabla' \zeta_{01} - \epsilon \frac{i}{2} \nabla' \cdot \mathcal{H}_\omega(\vec{k}) \nabla' \zeta_{01} = 0, \quad \zeta_{01}|_{t'=0} = \zeta_{01}^0$$

II Equations de modulation en profondeur finie

On cherche à étendre notre étude des équations régissant les paquets d'onde. Pour ce faire, nous allons d'abord procéder à un adimensionnement des équations, pour plus de simplicité.

II.1 Adimensionnement des équations

Pour adimensionner les équations, on utilisera les variables réduites, et on posera aussi $\phi' = \frac{\phi}{\phi_0}$ où l'on peut trouver un ordre de grandeur simple pour ϕ_0 autour de l'équilibre.

On admet que l'on obtient les équations adimensionnées suivantes,

où $\nabla = \partial_x$ et $\Delta^\mu = \mu \partial_x^2 + \partial_z^2$, et en omettant les primes pour plus de clarté :

$$\begin{cases} \partial_t \zeta - \frac{1}{\mu\nu} \mathcal{G}_\mu[\varepsilon \zeta] \psi = 0 \\ \partial_t \psi + \zeta + \frac{\varepsilon}{2\nu} |\nabla \psi|^2 - \frac{\varepsilon \mu}{\nu} \frac{(\frac{1}{\mu} \mathcal{G}_\mu[\varepsilon \zeta] \psi + \nabla(\varepsilon \zeta) \cdot \nabla \psi)^2}{2(1+\varepsilon^2 \mu |\nabla \zeta|^2)} = 0 \end{cases}$$

où $\mathcal{G}_\mu[\varepsilon \zeta] \psi = \sqrt{1 + \varepsilon^2 |\nabla \zeta|^2} \partial_n \phi|_{z=\varepsilon \zeta}$ et avec :

$$\begin{cases} \Delta^\mu \phi = 0, & -1 \leq z \leq \varepsilon \zeta, \\ \phi|_{z=\varepsilon \zeta} = \psi, & \partial_n \phi|_{z=-1} = 0 \end{cases}$$

II.2 Problème de la modulation à un ordre supérieur en eaux de profondeur finie

On approche $\nu \simeq \mu^{-1/2}$ en eaux de profondeurs finies et en introduisant la quantité : $\epsilon = \varepsilon \sqrt{\mu} = \frac{a}{L_x}$, on obtient le système adimensionné suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \zeta - \frac{1}{\sqrt{\mu}} \mathcal{G} \psi = 0 \\ \partial_t \psi + \zeta + \frac{\epsilon}{2} |\nabla \psi|^2 - \epsilon \frac{(\frac{1}{\sqrt{\mu}} \mathcal{G} \psi + \epsilon \nabla \zeta \cdot \nabla \psi)^2}{2(1+\epsilon^2 |\nabla \zeta|^2)} = 0 \end{cases}$$

On repose ce problème en terme de vecteurs : on cherche $U = \begin{pmatrix} \zeta \\ \psi \end{pmatrix}$ qui satisfait l'équation :

$$\partial_t U + \mathcal{N}(U) = 0$$

où l'opérateur $\mathcal{N}$ est tel que l'équation est équivalente à celle sus-citée.

On cherche alors une solution approchée de ce système sous la forme :

$$U_{app}(t, x) = U_0(t, x) + \epsilon U_1(t, x) + \epsilon^2 U_2(t, x)$$

où l'on doit chercher les différentes composantes sous la forme :

$$U_0(t, x) = \begin{pmatrix} i\omega \psi_{01}(\epsilon t, \epsilon x) \\ \psi_{01}(\epsilon t, \epsilon x) \end{pmatrix} e^{i\theta} + cc + \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_{00}(\epsilon t, \epsilon x) \end{pmatrix}$$

Le terme en ψ_{00} est rendu nécessaire par la création d'un mode continu à cause de l'interaction non-linéaire des modes oscillants.

$$U_1(t, x) = \begin{pmatrix} \zeta_{11}(\epsilon t, \epsilon x) e^{i\theta} \zeta_{12}(\epsilon t, \epsilon x) e^{i2\theta} + cc + \zeta_{10}(\epsilon t, \epsilon x) \\ \psi_{11}(\epsilon t, \epsilon x) e^{i\theta} \psi_{12}(\epsilon t, \epsilon x) e^{i2\theta} + cc \end{pmatrix}$$

$$U_2(t, x) = \sum_{n=1}^3 U_{2n}(\epsilon t, \epsilon x) e^{in\theta} + cc + U_{20}(\epsilon t, \epsilon x)$$

L'idée maintenant est de calculer : $U_{app} + \mathcal{N}(U_{app})$.

On obtient :

$$U_{app} + \mathcal{N}(U_{app}) = \dots O(1) + \dots O(\epsilon) + \dots O(\epsilon^2) + \epsilon^3 R_3(\epsilon t, \epsilon x) + \epsilon^{4-d/2} R_4(\epsilon t, \epsilon x)$$

On peut montrer que les termes résiduels satisfont, $\forall s \geq 0$:

$$|R_3(\epsilon t, \cdot)|_{\mathbb{H}^s} + |R_4(\epsilon t, \cdot)|_{\mathbb{H}^s} \leq C \left(\sum_{ij} |\zeta_{ij}(\epsilon t, \cdot)|_{\mathbb{H}^{s+3}} \right) \sum_{ij} |\nabla \psi_{ij}(\epsilon t, \cdot)|_{\mathbb{H}^{s+3}}$$

On cherche alors à éliminer les termes restants d'ordre supérieur en ϵ . Pour cela on cherche à annuler les termes non oscillants entre eux, puis les termes d'harmonique 1, 2 et 3, au moins jusqu'à un $O(\epsilon^3)$. On déduit après de nombreux calculs que la détermination des composantes de U_{app} se réduit à la détermination de $(\psi_{01}, \psi_{00}, \zeta_{10})$ par trois équations :

$$\begin{cases} \partial_t \psi_{01} + \frac{i}{2\omega} \left[\frac{(\omega^2(\vec{k} + \epsilon D) - \omega^2)}{\epsilon} + \epsilon(\nabla \omega(\vec{k}) \cdot \nabla)^2 \right] \psi_{01} \\ + \epsilon i \left(\vec{k} \cdot \nabla \psi_{00} + \frac{|\vec{k}|^2}{2\omega} (1 - \sigma^2) \zeta_{01} + \frac{2|\vec{k}|^4}{\omega} (1 - \alpha) |\psi_{01}|^2 \right) \psi_{01} = 0 \\ \partial_t \zeta_{01} - |D| \frac{\tanh(\epsilon \sqrt{\mu} |D|)}{\epsilon} \psi_{00} = -2\omega \vec{k} \cdot \nabla |\psi_{01}|^2 \\ \partial_t \psi_{00} + \zeta_{10} = -|\vec{k}|^2 (1 - \sigma^2) |\psi_{01}|^2 \end{cases}$$

où $\sigma = \tanh(\sqrt{\mu} |\vec{k}|)$ et $\alpha = -\frac{9}{8\sigma^2} (1 - \sigma^2)^2$.

II.3 Le modèle de "dispersion complet" de Benney-Roskes

Le modèle est donné par les équations suivantes (qui ne change que par la première équation de l'évaluation précédente) :

$$\begin{cases} \partial_t \psi_{01} + i \frac{(\omega(\vec{k} + \epsilon D) - \omega^2)}{\epsilon} \psi_{01} + \epsilon i \left(\vec{k} \cdot \nabla \psi_{00} + \frac{|\vec{k}|^2}{2\omega} (1 - \sigma^2) \zeta_{01} + \frac{2|\vec{k}|^4}{\omega} (1 - \alpha) |\psi_{01}|^2 \right) \psi_{01} = 0 \\ \partial_t \zeta_{01} - |D| \frac{\tanh(\epsilon \sqrt{\mu} |D|)}{\epsilon} \psi_{00} = -2\omega \vec{k} \cdot \nabla |\psi_{01}|^2 \\ \partial_t \psi_{00} + \zeta_{10} = -|\vec{k}|^2 (1 - \sigma^2) |\psi_{01}|^2 \end{cases}$$

Sous réserve que le triplet $(\psi_{01}, \psi_{00}, \zeta_{10})$ puisse être déterminé par ces équations, on peut alors déterminer U_{app} , et l'on peut montrer que pour des temps courts, la solution trouvée est une bonne approximation des équations des vagues.

En effet :

Si $s \geq 0$ et $(\psi_{01}, \nabla \psi_{00}, \zeta_{10}) \in \mathcal{C}([0, \frac{T}{\epsilon}]; \mathbb{H}^{s+5}(\mathbb{R})^3)$ où $T > 0$ est une solution des équations du modèle de Benney-Roskes, alors la solution U_{app} vérifie :

$$\partial_t U_{app} + \mathcal{N}(U_{app}) = \epsilon^3 R_3(\epsilon t, \epsilon x) + \epsilon^{4-d/2} R_4(\epsilon t, \epsilon x)$$

avec pour tout $0 \leq t \leq \frac{T}{\epsilon^2}$: $|R_3(\epsilon t, \cdot)|_{\mathbb{H}^s} + |R_4(\epsilon t, \cdot)|_{\mathbb{H}^s} \leq C \left(\mu_{max}, |(\psi_{01}, \nabla \psi_{00}, \zeta_{10})|_{L^\infty([0, \frac{T}{\epsilon}], \mathbb{H}^{s+5})} \right)$

Remarque 1 Les erreurs cumulées sont d'ordre $O(\epsilon^{1-\frac{d}{2}})$, ce qui est petit en dimension 1, dans laquelle nous travaillons ; mais pas en dimension 2 (les résultats sont généralisables à la dimension 2).

II.4 Modèle de Benney-Roskes simplifié

L'idée est de développer le terme en $\omega(\vec{k} + \epsilon D)$ en série de Taylor à l'ordre 2 pour simplifier l'action de l'opérateur. On obtient en dimension 1 :

$$\begin{cases} \partial_t \psi_{01} + \omega' \partial_x \psi_{01} - \frac{i\epsilon}{2} \omega'' \partial_x^2 \psi_{01} + \epsilon i \left(|k| \cdot \partial_x \psi_{00} + \frac{|k|^2}{2\omega} (1 - \sigma^2) \zeta_{01} + \frac{2|k|^4}{\omega} (1 - \alpha) |\psi_{01}|^2 \right) \psi_{01} = 0 \\ \partial_t \zeta_{01} + \sqrt{\mu} \Delta \psi_{00} = -2\omega |k| \cdot \partial_x |\psi_{01}|^2 \\ \partial_t \psi_{00} + \zeta_{10} = -|k|^2 (1 - \sigma^2) |\psi_{01}|^2 \end{cases}$$

On obtient un résultat similaire de consistance avec les équations des vagues.

Comportement en profondeur infinie

Lorsqu'on étudie le comportement quand $\mu \rightarrow \infty$, on peut montrer que les effets non-linéaires : création d'un mode non oscillant à cause de l'interaction non linéaire des modes oscillants, disparaissent. (ie $\psi_{00} = 0$)

II.5 Modèle de Davey-Stewartson en dimension 1

L'approximation de Davey-Stewartson (motivée par le fait que ψ_{01} avance à la vitesse de groupe c_g) consiste à chercher le triplet solution sous la forme :

$$\begin{cases} \psi_{01}(t', x') = \underline{\psi_{01}}(\epsilon t', x' - c_g t) \\ \zeta_{10}(t', x') = \underline{\zeta_{10}}(\epsilon t', x' - c_g t) \\ \psi_{00}(t', x') = \underline{\psi_{00}}(\epsilon t', x' - c_g t) \end{cases}$$

On obtient alors un nouveau set d'équations :

$$\begin{cases} \partial_\tau \underline{\psi_{01}} - \frac{i}{2} \omega'' \partial_x^2 \underline{\psi_{01}} + i \left(\beta \partial_x \underline{\psi_{00}} + \frac{2|k|^4}{\omega} (1 - \bar{\alpha}) |\underline{\psi_{01}}|^2 \right) \underline{\psi_{01}} = 0 \\ (\sqrt{\mu} - \omega'^2) \partial_x^2 \underline{\psi_{00}} = -2\omega \beta \partial_x |\underline{\psi_{01}}|^2 \\ \zeta_{01} = \omega' \partial_x \underline{\psi_{00}} - |k|^2 (1 - \sigma^2) |\underline{\psi_{01}}|^2 \end{cases}$$

où $\tau = \epsilon t' = \epsilon^2 t$ parce que la variable temporelle a encore évolué, et

$$\beta = |k| (1 + (1 - \sigma^2) \frac{\omega' |k|}{2\omega}), \bar{\alpha} = \alpha + \frac{1}{4} (1 - \sigma^2)^2$$

On remarque que l'on a progressé et qu'il suffit maintenant de déterminer ψ_{00} et ψ_{01} .

On peut encore montrer un résultat similaire aux précédents de consistance avec les équations des vagues.

II.6 Equation non linéaire de Schrödinger

De la seconde équation on peut facilement extraire $\partial_x \underline{\psi_{00}}$ et la remplacer dans la première, ce qui donne l'équation suivante pour $\underline{\psi_{01}}$:

$$\partial_\tau \underline{\psi_{01}} - i \frac{1}{2} \omega'' \partial_x^2 \underline{\psi_{01}} + i \delta |\underline{\psi_{01}}|^2 \underline{\psi_{01}} = 0$$

où :

$$\delta = 2 \frac{|k|^4}{\omega} (1 - \bar{\alpha}) - 2 \frac{\omega \beta^2}{\sqrt{\mu} - \omega'^2}$$

De même, on peut montrer la consistance de cette équation avec l'équation des vagues.

Remarque 1

Comme $\zeta_{01} = i\omega \psi_{01}$ on peut déduire une équation non linéaire de Schrödinger pour ζ_{01} :

$$\partial_\tau \underline{\zeta_{01}} - i \frac{1}{2} \omega'' \partial_x^2 \underline{\zeta_{01}} + i \delta |\underline{\zeta_{01}}|^2 \underline{\zeta_{01}} = 0$$

II.7 Instabilité de Benjamin-Feir

Approche par les petites perturbations

L'équation non-linéaire de Schrödinger admet des solutions du type ondes planes de la forme :

$$\underline{\zeta}_{01}(\tau, x) = \frac{A}{2} \exp(-i\Omega\tau), \text{ avec } \Omega = \frac{\delta}{4\omega^2}|A|^2$$

L'élévation de la surface libre correspond alors à :

$$\zeta_{app}(t, x) = A \cos(k.x - \omega(1 + \epsilon^2 \frac{\Omega}{\omega})t)$$

On considère alors la petite perturbation suivante :

$$\underline{\zeta}(\tau, x) = \frac{A+a}{2} \exp(i(-\Omega\tau + \theta))$$

En négligeant les termes du second ordre après avoir réinjecté dans l'équation non linéaire de Schrödinger, on obtient en sélectionnant partie réelle et partie imaginaire :

$$\begin{cases} \partial_\tau a + \frac{A}{2}\omega''\partial_x^2\theta = 0 \\ \partial_\tau\theta + \frac{A}{2}\delta a - \frac{\omega''}{2A}\partial_x^2 a = 0 \end{cases}$$

En passant dans l'espace de Fourier, on obtient :

$$\begin{cases} \partial_\tau \hat{a} - \frac{A}{2}\omega''\xi^2\hat{\theta} = 0 \\ \partial_\tau \hat{\theta} + (\frac{A}{2}\delta + \frac{\omega''}{2A}\xi^2)\hat{a} = 0 \end{cases}$$

Soit finalement l'équation suivante sur a :

$$\partial_\tau^2 \hat{a} + \frac{A}{2}\omega''\xi^2(\frac{A}{2}\delta + \frac{\omega''}{2A}\xi^2)\hat{a} = 0$$

Cette équation obtient des solutions non divergentes en temps si et seulement si :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \frac{A}{2}\omega''\xi^2(\frac{A}{2}\delta + \frac{\omega''}{2A}\xi^2) > 0$$

Autrement dit, comme $\omega'' < 0$, le train d'onde est stable si et seulement si $\delta > 0$.

On cherche alors à expliciter cette condition. Le signe du coefficient δ de la non linéarité dépend de $\sqrt{\mu}|k'|$ ou de $|k|h$ en variables dimensionnées. On peut montrer que pour $|k|h \lesssim 1.363$, le train d'onde est stable. Sinon, il diverge dans le temps.

En eaux relativement profondes, il est donc impossible de créer des courtes vagues monodirectionnelles d'amplitude régulière. A un moment, l'amplitude de la vague créée va diverger.

III Extension à un problème plus général

L'objet de cette section est d'étudier des équations plus générales, qui peuvent représenter le mouvement des vagues, et notamment le comportement de paquets d'onde dans ces équations.

III.1 Présentation du problème

Les équations étudiées On cherche à étudier l'équation suivante :

$$\begin{cases} \partial_t U + A(\partial)U + \frac{1}{\epsilon}EU = \epsilon T(U, U, U), \forall t \geq 0 \\ U|_{t=0} = \mathcal{U}^0(x, \frac{\vec{k} \cdot x}{\epsilon}), \forall x \in \mathbb{R}^d \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

où U est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) dépendant de t et de la variable spatiale $x \in \mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$), L'opérateur $A(\partial)$ est défini comme :

$$A(\partial) = \sum_{j=1}^d A_j \partial_j,$$

où ∂_j est l'opérateur différentiel relatif à la j -ème coordonnée spatiale.

On forme les hypothèses suivantes :

Les matrices A_j ($j = 1, \dots, d$) sont à coefficients constants $n \times n$, réels, et *symétriques*.

La matrice E est à coefficient constants $n \times n$, réels, et *antisymétrique*.

On fait aussi l'hypothèse que :

$$T : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

est *trilinéaire*. Sa symétrisation est notée T^S .

Les paquets d'onde sont bien sûr une classe importante de conditions initiales avec une enveloppe modulée rapidement.

$$\mathcal{U}^0(x, \frac{\vec{k} \cdot x}{\epsilon}) = u^0(x) e^{i \frac{\vec{k} \cdot x}{\epsilon}} + cc,$$

Lien avec l'équation des vagues On peut voir l'équation (II.1) de la façon suivante ; on a :

$$\partial_t U + \frac{i}{\epsilon} [A(\epsilon \partial) + \frac{E}{i}] U = \epsilon T(U, U, U)$$

La matrice $A(\epsilon \partial) + \frac{E}{i}$ est hermitienne et donc diagonalisable sur les espaces propres Π_j , avec valeurs propres λ_j . Sur chaque espace propre :

$$(\partial_t + \frac{i}{\epsilon} \lambda_j(\epsilon \partial)) U_j = \epsilon T_j(U, U, U)$$

De même, il est possible d'obtenir des équations similaires scalaires pour les vagues :

On peut écrire, avec $U = \begin{pmatrix} \zeta \\ \psi \end{pmatrix}$, l'équation vectorielle suivante :

$$\partial_t U + \mathcal{A}_0(D)U = \epsilon \mathcal{N}(U)$$

où $\mathcal{A}_0(D) = \begin{pmatrix} 0 & -|D| \tanh(\sqrt{\mu}|D|) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est la partie linéaire de l'équation. Cette matrice est diagonalisable également.

$\mathcal{N}$ est la partie non linéaire de l'équation. On obtient en projection sur les espaces propres :

$$(\partial_t + \mu_j(|D|)) U_j = \epsilon \mathcal{N}_j(U)$$

Ici les μ_j ne sont pas forcément des fonctions linéaires, et les $\mathcal{N}_j$ sont des opérateurs bilinéaires. Ici la non-linéarité est essentiellement quadratique, par rapport à celle des équations que nous allons étudier, où elle est d'ordre 3. Mais essentiellement, la forme des équations est comparable.

Application à d'autres domaines de la physique L'équation (II.1) se retrouve essentiellement dans les domaines de la propagation d'ondes en optique (Maxwell-Ampère dans un milieu dispersif, par exemple).

III.2 Approximation non-linéaire de Schrödinger

On énonce ici un premier théorème d'existence sous certaines conditions initiales.

Premier théorème d'existence

Hypothèses :

- $\mathcal{U}^0(x, \frac{\vec{k} \cdot x}{\epsilon}) = u^0(x) e^{i \frac{\vec{k} \cdot x}{\epsilon}} + cc$
- $s > \frac{d}{2}$, tel que $u^0 \in \mathbb{H}^s(\mathbb{R}^d)^n$
- $\omega \in \mathbb{R}$

Alors $\exists T > 0$, $\forall \epsilon \in [0; 1]$, $\exists U \in \mathcal{C}([0; \frac{T}{\epsilon}], \mathbb{H}^s)^n$ solution du problème (1.1).

De plus on peut écrire :

$U(t, x) = \mathcal{U}(t, x, \frac{\vec{k} \cdot x - \omega t}{\epsilon})$ où $\mathcal{U}$ est solution du problème :

$$\begin{cases} \partial_t U + A(\partial)U + \frac{i}{\epsilon} \mathcal{L}(\omega D_\theta, \vec{k} D_\theta)U = \epsilon T(U, U, U) \\ U|_{t=0}(x, \theta) = u^0(x) e^{i\theta} + cc \\ \text{avec } \mathcal{L}(\omega D_\theta, \vec{k} D_\theta) = -\omega D_\theta + A(\vec{k})D_\theta + \frac{E}{i} \\ D_\theta = -i\partial_\theta \text{ et } A(\vec{k}) = \sum_{j=1}^d A_j k_j \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

Idée de la preuve

◦ On suppose d'abord que $\mathcal{U}$ est solution de (II.2), alors il est facile de montrer que U est solution de (II.1).

◦ Il n'est pas difficile alors de montrer que $U \in \mathcal{C}([0; \frac{T}{\epsilon}], \mathbb{H}^s)^n$.

◦ Il faut alors prouver l'existence d'une solution à (II.2).

Pour cela, on pose $S(t) = \exp\left(-tA(\partial) - \frac{i}{\epsilon} t \mathcal{L}(\omega D_\theta, \vec{k} D_\theta)\right)$, puis on construit une unique solution à (II.2) par un schéma itératif classique :

$$U^{l+1}(t) = S(t)U^0(t) + \epsilon \int_0^t S(t-t')T(U^l, U^l, U^l)(t')dt'$$

◦ Enfin il reste à montrer l'unicité de la solution par une majoration énergétique classique et l'utilisation du lemme de Gronwall.

Dérivation formelle de l'approximation non-linéaire de Schrödinger On veut construire une bonne approximation de la solution quand $\epsilon \rightarrow 0$.

On sait qu'il faut chercher cette approximation sous la forme :

$U_{app}(t, x) = \mathcal{U}_{app}(t, x, \frac{\vec{k} \cdot x - \omega t}{\epsilon})$ où $\mathcal{U}_{app}$ est solution du problème (II.2).

On cherche alors, tout comme on avait fait pour les vagues, $\mathcal{U}_{app}$ sous la forme :

$$\mathcal{U}_{app}(t, x, \theta) = (u_{0,1}(\epsilon t, t, x) e^{i\theta} + cc) + \epsilon (u_{1,1}(\epsilon t, t, x) e^{i\theta} + cc) + \epsilon^2 U_2(\epsilon t, t, x, \theta)$$

On injecte alors ceci dans l'équation (II.2) et on obtient :

$$\partial_t \mathcal{U}_{app} + A(\partial) \mathcal{U}_{app} + \frac{i}{\epsilon} \mathcal{L}(\omega D_\theta, \vec{k} D_\theta) \mathcal{U}_{app} - \epsilon T(\mathcal{U}_{app}, \mathcal{U}_{app}, \mathcal{U}_{app}) = \epsilon^{-1} R_{-1} + \epsilon^0 R_0 + \epsilon^1 R_1 + \epsilon^2 R^\epsilon$$

La méthode BKW consiste alors à choisir $u_{0,1}$, $u_{1,1}$, et U_2 pour supprimer les restes : R_{-1} , R_0 et R_1 .

Suppression du terme en $O(\epsilon^{-1})$: relation de dispersion

$u_{0,1}$ vérifie : $\mathcal{L}(\omega, k) u_{0,1} = 0$.

On aboutit donc à la condition : $\det(\mathcal{L}(\omega, k)) = 0$, qu'on peut appeler relation de dispersion.

On notera pour plus tard $\omega(\vec{k})$ la paramétrisation locale de ω en fonction de $\vec{k}$ selon la relation de dispersion et on notera $\mathcal{C}_\mathcal{L}$ tous les couples $(\omega, \vec{k})$ qui satisfont la relation de dispersion.

On notera aussi $\nabla_{\vec{k}} \omega = c_g(\vec{k})$.

On notera enfin $\Pi(\omega, k)$ la projection orthogonale sur le noyau de $\mathcal{L}(\omega, k)$.

Conclusion de la suppression des autres termes

Si l'on peut trouver $u_{0,1}(\tau, t, x)$ où $\tau = \epsilon t$ tel que :

$$\begin{cases} \Pi(\omega, \vec{k}) u_{0,1} = u_{0,1}, \\ (\partial_t + c_g(\vec{k}) \cdot \nabla) u_{0,1} = 0, \\ \partial_\tau u_{0,1} - \frac{i}{2} \omega''(\vec{k})(\partial, \partial) = 3\Pi(\omega, \vec{k}) T^S(u_{0,1}), \\ u_{0,1}|_{t=\tau=0}(x) = u^0(x), \end{cases}$$

Ensuite on obtient les autres composantes $u_{1,1}$ et U_2 qui annulent R_{-1}, R_0 et R_1 .

Il est possible de réduire ce système de la façon suivante :

$$u_{0,1}(\tau, t, x) = \underline{u}(\tau, x - c_g(\vec{k})t);$$

Si $\Pi(\omega, \vec{k}) u^0 = u^0$, on a :

$$\begin{cases} \partial_\tau \underline{u} - \frac{i}{2} \omega''(\vec{k})(\partial_y, \partial_y) \underline{u} = 3\Pi(\omega, \vec{k}) T^S(\underline{u}), \\ \underline{u}|_{\tau=0}(y) = u^0(y), \end{cases} \quad (II.3)$$

où $y = x - c_g(\vec{k})t$.

On peut alors définir l'approximation non-linéaire de Schrödinger par :

$$U_{NLS}(t, x) = u_{NLS}(t, x) e^{i(\vec{k}x - \omega t)/\epsilon} + cc, \text{ avec } u_{NLS} = \underline{u}(\epsilon t, x - c_g(\vec{k})t)$$

Justification rigoureuse On peut montrer proprement la consistance de cette approximation, et obtenir le résultat suivant :

Consistance de l'approximation de NLS

Hypothèses

- On garde les hypothèses précédentes.
- $s > d/2$ et $u^0 \in \mathbb{H}^{s+3}(\mathbb{R}^d)^n$ est tel que

$$\exists \omega \in \mathbb{R}, \quad (\omega, \vec{k}) \in \mathcal{C}_\mathcal{L} \quad \text{and} \quad \Pi(\omega, \vec{k}) u^0 = u^0.$$

- $\underline{u} \in C([0, T]; \mathbb{H}^{s+3}(\mathbb{R}^d))$ (pour $T > 0$) est l'unique solution de (II.3).

Alors $\exists \epsilon_0 > 0$, tel que $\forall 0 < \epsilon < \epsilon_0$, l'unique solution U de (II.1) (dont l'existence est prévue par le précédent théorème) existe sur $[0, T/\epsilon]$, et on a :

$$|U(t, x) - U_{NLS}(t, x)|_{L^\infty([0, \frac{T}{\epsilon}] \times \mathbb{R}^d)} \leq \epsilon C(T, |u^0|_{H^{s+3}}),$$

où U_{NLS} est défini comme précédemment.

III.3 Approximation des courtes impulsions

Limites de l'approximation de NLS L'approximation de NLS est mauvaise dans deux conditions :

- si le spectre initial de l'enveloppe est trop large, les propriétés dispersives de NLS sont mauvaises.
- si l'enveloppe varie trop vite comparativement à la longueur d'onde (qui est de l'ordre de ϵ) NLS est une mauvaise description de la solution.

Nouvelles hypothèses

Il faut se placer dans un nouvel espace appelé algèbre de Wiener : $W(\mathbb{R}^d) = \{f \in S'(\mathbb{R}^d), \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)\}$. C'est une algèbre de Banach qui s'injecte continuellement dans $\mathcal{L}^\infty$.

On cherche une solution sous la forme : $U_{SP}(t, x) = u_{env}(t, x)e^{i\theta} + cc.$ (SP = short pulse)

Pour voir quelle équation pertinente prendre, on ne garde que l'harmonique de rang 1 et on obtient l'équation suivante pour u_{env} :

$$\begin{cases} \partial_t u_{env} + \frac{i}{\epsilon} \mathcal{L}(\omega, \vec{k} + \epsilon D) u_{env} = 3\epsilon T^S(u_{env}) \\ u_{env}|_{t=0} = u^0 \end{cases} \quad (II.4)$$

Résolution pour des fréquences courtes

Hypothèses

- $u^0 \in W(\mathbb{R}^d)^n$
- autres hypothèses de régularité que nous ne détaillerons pas.

Alors $\exists T > 0$, et $\exists ! u_{env} \in \mathcal{C}([0; T/\epsilon], (W(\mathbb{R}^d))^n)$ solution de (II.4).

et $\exists \epsilon_0 > 0$ tel que $\forall 0 < \epsilon < \epsilon_0$ la solution U de (II.1) vérifie :

$$|U(t, x) - U_{SP}(t, x)|_{L^\infty([0, \frac{T}{\epsilon}] \times \mathbb{R}^d)} \leq \epsilon C(T, |u^0|_W)(1 + |\nabla u^0|_W)$$

Remarques On ne détaillera pas ici la preuve de ce résultat de consistance. L'important est toutefois de remarquer que la majoration sous entend donc que $|\nabla u^0|_W \ll \frac{1}{\epsilon}$. Il s'agit de la traduction physique du fait que "l'enveloppe ne varie pas trop à l'échelle de la longueur d'onde".

III.4 Modèle de dispersion complet

On peut obtenir un résultat similaire de consistance, mais en étudiant une équation plus simple, et surtout une équation scalaire. En effet on peut chercher l'enveloppe en résolvant l'équation :

$$\begin{cases} \partial_t u_{env} + \frac{i}{\epsilon} (\omega(\vec{k} + \epsilon D) - \omega(\vec{k})) u_{env} = 3\epsilon \Pi T^S(u_{env}) \\ u_{env}|_{t=0}(x) = u^0(x) \end{cases} \quad (II.5)$$

Cette équation est plus intéressante car les opérateurs linéaires sont des opérateurs scalaires. De plus, l'opérateur $\frac{i}{\epsilon} (\omega(\vec{k} + \epsilon D) - \omega(\vec{k}))$ demeure borné, au contraire de $\frac{i}{\epsilon} \mathcal{L}(\omega, \vec{k} + \epsilon D)$ qui est de taille $O(\frac{1}{\epsilon})$. Dans le précédent modèle, il fallait donc prendre en compte les oscillations rapides ; dans notre nouveau modèle, cela n'est plus nécessaire. On peut donc prendre un pas de discrétisation moins petit pour les calculs numériques.

Conclusion

L'étude des vagues générées par le vent est un grand sujet encore fortement inabouti aujourd'hui. On a pu en avoir un bref aperçu au cours de rapport.

D'une part, l'étude expérimentale des vagues demande une maîtrise importante du traitement du signal. Aujourd'hui, nous savons faire des mesures très précises notamment en utilisant un émetteur horizontal rotatif sur un bateau par exemple, et en récupérant les données avec un autre récepteur. On peut ainsi obtenir les fameux pics de Bragg, et répertorier des données très précises sur les vagues au temps présent. Ceci sert pour établir des modèles de prévision météorologiques, mais qui sont limités en confiance à une ou deux semaines. Les techniques d'observation et les modèles se multiplient donc. On cherche aussi à créer des programmes qui reproduisent le mouvement des vagues (en images) en fonction de paramètres extérieurs (vent, soleil, fond de l'océan) ; et les observations permettent aussi de corrélérer les modèles et la réalité.

D'autre part, l'étude mathématique des vagues est très complexe. On a vu combien on a réduit les hypothèses dès le départ. Même en gardant des hypothèses raisonnables, dès que l'on sort du régime linéaire ; les calculs deviennent très complexes. De plus dès que l'on passe en dimension supérieure à 1, on peut dire de moins en moins de choses. Par exemple, l'équation non linéaire de Schrödinger, en dimension 2, contient un terme en $\partial_x^2 - \partial_y^2$, au lieu d'un laplacien classique, ce qui empêche toutes les théories classiques d'aboutir. Les vagues sont donc une grande source de problèmes ouverts à tout point de vue.

Aujourd'hui, des scientifiques du monde entier essayent de récupérer l'énergie des vagues par l'intermédiaire de bouées, car les vagues sont une source gigantesque et inexploitée d'énergie. Cependant, leur principale difficulté (outre les problèmes techniques liés à l'installation et l'entretien d'un dispositif marin) est de prévoir les mouvements des vagues afin d'adapter la production d'électricité.

Bibliographie

- [1] *Etats de mer : hydrodynamique et applications*
Cours de M2 de Fabrice Ardhuin - 10 octobre 2011
- [2] Times Microwave Systems Datasheets
LMR-600 câble datasheet
<http://www.nr6ca.org/pdf/LMR600A.pdf>
- [3] Belden Datasheets
RG-316 U câble datasheet
<http://www.belden.com/techdatas/english/83284.pdf>
- [4] *Article on the different windows to do a FFT*
<http://en.wikipedia.org/wiki/Windowfunction>
- [5] *High-Frequency nonlinear optics : from the nonlinear Schrödinger approximation to ultrashort-pulses equations*
David Lannes - 27 Octobre 2010
- [6]
Chapitres 1 et 8 - David Lannes