Die Runge-Kutta-Discontinuous-Galerkin-Methode zur Lösung konvektionsdominierter tiefengemittelter Flachwasserprobleme

Von der Fakultät für Bauingenieurwesen
der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen

zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Ingenieurwissenschaften

genehmigte Dissertation

vorgelegt von

Dirk Schwanenberg
aus Bardenberg jetzt Würselen

Berichter: Universitätsprofessor Dr.-Ing. Jürgen Köngeter
Universitätsprofessor Dr.-Ing. Josef Ballmann

Tag der mündlichen Prüfung: 11. März 2003

Vorwort

Die Fortschritte in der numerischen Strömungsmechanik sind nicht nur der rapide wachsenden Computerleistung zuzuschreiben, sondern beruhen auch zu einem wesentlichen Teil auf verbesserten mathematischen Modellgleichungen und verfeinerten numerischen Lösungsverfahren. Der Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit ist die numerische Lösung der tiefengemittelten Flachwassergleichungen mit Hilfe der Runge-Kutta-Discontinuous-Galerkin-Methode. Die Beschreibung der mathematischen und physikalischen Eigenschaften der Gleichungen bildet dabei die Basis zum Verständnis der eingesetzten Methode und ihrer Anwendungsbereiche.

Herrn Universitätsprofessor Dr.-Ing. Jürgen Köngeter möchte ich für seine großzügige Unterstützung meiner Forschungsarbeit und die Übernahme des Hauptreferats danken. Für seine zahlreichen fachlichen Anregungen, eine persönliche Einführung in die Thermodynamik und die Übernahme des Koreferats danke ich Herrn Universitätsprofessor Dr.-Ing. Joseph Ballmann.

Ein weiterer Dank gilt Herrn Professor Larry Weber des Iowa Institute of Hydraulic Research der University of Iowa in den USA für seine Einladung zu einem Forschungsaufenthalt, in dem wesentliche Teile der Arbeit schriftlich niedergelegt wurden.

Besonderer Dank gilt meinen Kollegen, den studentischen, nicht-wissenschaftlichen und wissenschaftlichen Mitarbeitern des Lehrstuhls und Instituts für Wasserbau und Wasserwirtschaft der RWTH Aachen, die durch ihre Unterstützung zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Namentlich erwähnt seien meine Zimmergenossen im Tower 2, einem der Baucontainer im Hof der wasserbaulichen Versuchshalle: Thomas Ackermann, Frank Schlaeger, Henning Schonlau und Maren Harms.

Delft, im März 2003 Dirk Schwanenberg

Abstract

Advances in Computational Fluid Dynamics are only to some extend related to rapidly increasing computer performance, but also to improvement of governing equations and numerical solution algorithms. The focus of this thesis is the numerical solution of the two-dimensional depth-averaged shallow water equations with a Runge-Kutta-Discontinuous-Galerkin finite-element method. As a background, a detailed discussion of the mathematical and physical properties of the governing equations is given with particular attention to discontinuous solutions. Existing numerical schemes are reviewed and discussed.

The Runge-Kutta-Discontinuous-Galerkin finite-element method is well suited to handle complicated geometries and requires a simple treatment of boundary conditions and source terms to obtain high-order accuracy. The explicit time integration, together with the use of orthogonal shape functions, makes the method computationally as efficient as comparable finite-volume schemes for transient and transcritical flows.

For smooth parts of the solution, the scheme is shown to be second and third order accurate for linear and quadratic shape functions, respectively, both in time and space. Furthermore, shocks are usually captured within only two elements. Several steady transcritical and transient flows are investigated to confirm the accuracy and convergence of the scheme. The results indicate excellent agreement with analytical solutions.

Comparison of numerical results with a flume experiment of supercritical open-channel flow shows an evaluation of the shallow water model against experimental data. The method allows very good decoupling of the numerical and mathematical model, resulting in a nearly grid-independent solution. The simulation of the actual Malpasset dam-break demonstrates the outstanding applicability of the scheme to non-trivial bathymetry and wave propagation on a dry bed.

Inhaltsverzeichnis

VORWORT **I**

ABSTRACT **II**

INHALTSVERZEICHNIS **III**

ABBILDUNGSVERZEICHNIS **VI**

TABELLENVERZEICHNIS **X**

VERZEICHNIS DER FORMELZEICHEN UND SYMBOLE **XII**

1 EINLEITUNG **1**

1.1 ALLGEMEINES 1
1.2 GLIEDERUNG DER ARBEIT 2

2 DIE TIEFENGEMITTELTEN FLACHWASSERGLEICHUNGEN **5**

2.1 HERLEITUNG DER GLEICHUNGEN 5
2.2 TURBULENZMODELLIERUNG 15
2.3 ANWENDUNGSBEREICHE 18
2.3.1 Damm- und Deichbruchberechnungen 19
2.3.2 Gerinne mit überkritischem Abfluss 20
2.4 ANALOGIE DER TIEFENGEMITTELTEN FLACHWASSERGLEICHUNGEN UND DER EULER-GLEICHUNGEN FÜR KOMPRESSIBLE FLUIDE 21

3 PHYSIKALISCHE UND MATHEMATISCHE EIGENSCHAFTEN DER TIEFENGEMITTELTEN FLACHWASSERGLEICHUNGEN **24**

3.1 REYNOLDSZAHL 24
3.2 FROUDEZAHL UND EIGENWERTE 25
3.2.1 Rotationsinvarianz der Impulsgleichungen 29
3.3 SCHWACHE LÖSUNGEN 30
3.4 SPRUNGBEDINGUNG AN DISKONTINUITÄTEN 32
3.5 VERGLEICH ZWISCHEN KONSERVATIVER UND NICHT-KONSERVATIVER FORMULIERUNG 34
3.6 REVERSIBILITÄT 35
3.7 ENTROPIEBEDINGUNG AN DISKONTINUITÄTEN 37

4 NUMERISCHE VERFAHREN ZUR LÖSUNG DER TIEFENGEMITTELTEN FLACHWASSERGLEICHUNGEN **41**

4.1 EIGENSCHAFTEN NUMERISCHER VERFAHREN 41
4.1.1 Konsistenz 42
4.1.2 Stabilität 42
4.1.3 Konvergenzordnung 43
4.2 ALLGEMEINE EINFÜHRUNG IN NUMERISCHE VERFAHREN 44
4.2.1 Charakteristikenverfahren 44
4.2.2 Finite-Differenzen-Verfahren 47
4.2.3 Finite-Elemente-Verfahren 49
4.3 UPWINDING-EIGENSCHAFTEN 50
4.3.1 Finite-Volumen-Verfahren 52
4.4 TVD-VERFAHREN 54
4.5 DISKRETISIERUNG DER QUELLTERME 56

5 DISKRETISIERUNG DER TIEFENGEMITTELTEN FLACHWASSERGLEICHUNGEN NACH EINER FINITE-ELEMENTE-METHODE 58

5.1 ALLGEMEINES 58
5.2 RÄUMLICHE DISKRETISIERUNG 61
5.2.1 Konstante Ansatzfunktion für Dreiecke 65
5.2.2 Lineare Ansatzfunktion für Dreiecke 65
5.2.3 Quadratische Ansatzfunktion für Dreiecke 66
5.3 DER NUMERISCHE FLUSS 67
5.3.1 Lax-Friedrichs-Riemannlöser für den konvektiven Fluss 68
5.3.2 HLL-Riemannlöser für den konvektiven Fluss 68
5.3.3 Riemannlöser für den diffusiven Fluss 71
5.4 ZEITLICHE DISKRETISIERUNG 72
5.5 ANFANGSBEDINGUNG 74
5.6 RANDBEDINGUNGEN 74
5.6.1 Einlaufrandbedingung 74
5.6.2 Auslaufrandbedingung 75
5.6.3 Wandrandbedingung 75
5.7 LIMITER-FUNKTIONEN 75
5.7.1 Einfluss der Sohlneigung 79

6 VERIFIZIERUNG DES NUMERISCHEN ALGORITHMUS 81

6.1 TESTPROBLEM 1: EFFIZIENZ DES VERFAHRENS 81
6.2 TESTPROBLEM 2: GERINNE NACH MACDONALD (1996) 92
6.3 TESTPROBLEM 3: SCHWALLWELLE NACH BERGER & STOCKSTILL (1995) 96
6.4 TESTPROBLEM 4: 1D-DAMMBRUCH 101
6.5 TESTPROBLEM 5: 2D-KREISDAMMBRUCH 109

7 FALLSTUDIEN 115

7.1 FALLBEISPIEL 1: SCHUSSRINNE (IPPEN & DAWSON, 1951) 115
7.2 FALLBEISPIEL 2: MALPASSET 122
7.2.1 Anfangsbedingungen 124
7.2.2 Ausbreitungszeiten 125
7.2.3 Maximale Wasserspiegel 129

7.2.4 Flutwelle in der Initialphase 132
7.2.5 Sensitivitäten der numerischen Berechnung 139

8 ZUSAMMENFASSUNG 143

9 AUSBLICK 145

LITERATUR 146

ANHANG A: ANSATZFUNKTIONEN 156

ANHANG B: NUMERISCHE INTEGRATION 159

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 2.1:	Schubspannung und Geschwindigkeit über die Fließtiefe	17
Abbildung 3.1:	Laminare (links) und turbulente Strömung (rechts)	24
Abbildung 3.2:	Bestimmtheitsbereich (links) und Einflussbereich (rechts)	28
Abbildung 3.3:	Projektion der Charakteristiken auf die horizontale Ebene, a) unterkritischer Abfluss, b) überkritischer Abfluss	29
Abbildung 3.4:	Rotationsinvarianz der tiefengemittelten Flachwassergleichungen	29
Abbildung 3.5:	Rechteckiges Kontrollvolumen einer eindimensionalen Erhaltungsgleichung	31
Abbildung 3.6:	Sprungbedingung an einer Diskontinuität bzw. Stoßfront	32
Abbildung 3.7	Schräger Stoß	33
Abbildung 3.8	Senkrechter Stoß	34
Abbildung 3.9:	Die Entstehung einer Stoßfront in einer Lösung der Burgers-Gleichung	36
Abbildung 3.10:	a) Verdichtungsstoß b) Verdünnungsstoß c) Verdünnungs-fächer für die Burgers-Gleichung	38
Abbildung 4.1:	Grundlagen des Charakteristikenverfahrens	46
Abbildung 4.2:	Finite-Volumen-Verfahren erster Ordnung nach Godunov (links), WAF-Verfahren zweiter Ordnung (rechts)	52
Abbildung 5.1:	a) Kontinuierliche Ortsdiskretisierung (links), b) Diskontinuierliche nodale Ortsdisretisierung (mittig), c) Diskontinuierliche modale Ortsdiskretisierung (rechts)	59
Abbildung 5.2:	HLL-Ansatz für unterkritischen Abfluss	69
Abbildung 5.3:	Slope Limiter für eindimensionale Elemente, a) MUSCL-Limiter, b) RKDG-Limiter	76
Abbildung 5.4:	Slope Limiter am Dreieck	76
Abbildung 5.5:	Slope Limiting bei Nullabfluss in einem Gerinne mit starker Sohl-neigung, a) normaler RKDG-Limiter, b) modifizierter RKDG-Limiter	79
Abbildung 6.1:	Testproblem 1, Initialzustand der Wassertiefe und Lösung nach t = 0,5 s	82

Abbildung 6.2: Testproblem 1, L^1-Fehler und Konvergenzverhalten der Wassertiefe für die RKDG-Methode mit konstanten bis kubischen Ansatzfunktionen 85

Abbildung 6.3: Testproblem 1, L^1-Fehler und Konvergenzverhalten der Wassertiefe für die RKDG-Methode mit konstanten bis kubischen Ansatzfunktionen,
der W33- und W45-Methode und des MacCormack-Verfahrens 91

Abbildung 6.4: Testproblem MACDONALD (1996), a) Sohlneigung im Gerinne, b) Wassertiefe h und kritische Wassertiefe h_{krit} im Gerinne 94

Abbildung 6.5: Testproblem MACDONALD (1996), Elementmittelwerte der RKDG2-Methode ($k = 2$), a) Diskretisierung mit $N = 10$ Elementen, b) Diskretisierung mit $N = 20$ Elementen 94

Abbildung 6.6: Testproblem MACDONALD (1996), Elementmittelwerte der RKDG-Methode ($k = 2$), a) Diskretisierung mit $N = 40$ Elementen, b) Diskretisierung mit $N = 80$ Elementen 95

Abbildung 6.7: Testproblem BERGER & STOCKSTILL (1995), a) Anfangsbedingung für Wassertiefe und breitenbezogenen Durchfluss bei $t = 0$, b) Analytische Lösung für Wassertiefe und breitenbezogenen Durchfluss nach $t = 18{,}7192$ s 97

Abbildung 6.8: Testproblem BERGER & STOCKSTILL (1995), a) Verfahren erster Ordnung mit Roe-Fluss, $CFL = 0{,}9$ und LF-Fluss, $CFL = 0{,}09$, b) Verfahren zweiter Ordnung mit Roe-Fluss, $CFL = 0{,}3$ und LF-Fluss, $CFL = 0{,}03$ 100

Abbildung 6.9: Testproblem 4a, a) Anfangsbedingung für Wassertiefe und breitenbezogenen Durchfluss bei $t = 0$, b) Analytische Lösung für Wassertiefe und breitenbezogenen Durchfluss nach $t = 60$ s 102

Abbildung 6.10: Testproblem 4b, a) Anfangsbedingung für Wassertiefe und breitenbezogenen Durchfluss bei $t = 0$, b) Analytische Lösung für Wassertiefe und breitenbezogenen Durchfluss nach $t = 100$ s 104

Abbildung 6.11: Testproblem 4b, Elementmittelwerte der RKDG1-Methode ($k = 1$), a) Diskretisierung mit $N = 10$ Elementen, b) Diskretisierung mit $N = 20$ Elementen 107

Abbildung 6.12: Testproblem 4a, Elementmittelwerte der RKDG1-Methode ($k = 1$), a) Diskretisierung mit $N = 10$ Elementen, b) Diskretisierung mit $N = 20$ Elementen 109

Abbildung 6.13: Testproblem 5, Dreiecksnetzgeometrie 111

Abbildung 6.14: Testproblem 5, a) Wasseroberfläche (2D-RKDG, $k = 1$, $M_L = 0{,}1$) im Initialzustand bei $t = 0$ 112

Abbildung 6.15: Testproblem 5, a) Wasseroberfläche (2D-RKDG0, $k = 0$) nach $t = 0{,}69$ s, b) Wassertiefe (2D-RKDG1, $k = 1$, $M_L = 0{,}1$) nach $t = 0{,}69$ s 112

Abbildung 6.16: Testproblem 5, a) Höhenlinien der Wasseroberfläche nach $t = 0{,}69$ s, 2D-RKDG0, b) Höhenlinien der Wasseroberfläche nach $t = 0{,}69$ s, 2D-RKDG1 113

Abbildung 6.17: Testproblem 5, Querschnitt der Wasseroberfläche für $y = 0$ (quasi-1D Lösung, 2D-RKDG0, 2D-RKDG1, $M_L = 0{,}1$) 114

Abbildung 7.1: Fallbeispiel Schussrinne, Höhenlinien der Wassertiefe h [ft] in der Gerinneverengung, Messwerte modifiziert nach IPPEN & DAWSON (1951). 116

Abbildung 7.2: Fallbeispiel Schussrinne, Höhenlinien der Wassertiefe h [ft] in der Gerinneverengung, Ergebnis der RKDG1-Methode ($N = 4935$ Dreieckselemente) 116

Abbildung 7.3: Fallbeispiel Schussrinne, Höhenlinien der Wassertiefe h [ft] in der Gerinneverengung, Ergebnis der RKDG1-Methode ($N = 21.246$ Dreieckselemente) 117

Abbildung 7.4: Fallbeispiel Schussrinne, Wassertiefe an der Gerinnewand bei einer positiven Wandänderung, modifiziert nach IPPEN & DAWSON (1951) 118

Abbildung 7.5: Fallbeispiel Schussrinne, Höhenlinien der Wassertiefe h [ft] in der Gerinneverengung, Ergebnis der RKDG1-Methode ohne Berücksichtigung von Viskosität ($N = 21.246$ Dreieckselemente) 119

Abbildung 7.6: Fallbeispiel Schussrinne, Höhenlinien der Wassertiefe h [ft] in der Gerinneverengung, Ergebnis der RKDG1-Methode ohne Berücksichtigung von Viskosität, Sohlreibung und Sohlneigung ($N = 21.246$ Dreieckselemente) 120

Abbildung 7.7: Fallbeispiel Schussrinne, Höhenlinien der Wassertiefe h [ft] in der Gerinneverengung, Berechnungsergebnisse modifiziert nach BERGER & STOCKSTILL (1995) 121

Abbildung 7.8: Fallbeispiel Malpasset, Digitales Geländemodell des Tals des Reyran, Sohlhöhe z [m] (Farbfläche) 123

Abbildung 7.9: Fallbeispiel Malpasset, Position der ausgefallenen Transformatoren (A-C) und der Messpunkte des physikalischen Modells (S6-S14) 124

Abbildung 7.10: Fallbeispiel Malpasset, prozentuale Abweichungen der Flutwelle zwischen den Transformatoren, Ergebnisse verschiedener numerischer Verfahren, n = 0,03333 s/m$^{1/3}$ 127

Abbildung 7.11: Fallbeispiel Malpasset, prozentuale Abweichungen der Flutwelle zwischen den Transformatoren, RKDG1-Verfahren, verschiedene Rauheiten 128

Abbildung 7.12: Fallbeispiel Malpasset, absolute Abweichungen der maximalen Wasserspiegel der Flutwelle an den Punkten S6-S14, Ergebnisse verschiedener numerischer Verfahren, n = 0,03333 s/m$^{1/3}$ 130

Abbildung 7.13: Fallbeispiel Malpasset, absolute Abweichungen der maximalen Wasserspiegel der Flutwelle an den Messpunkten des physikalischen Modells (S6-S14), RKDG1-Verfahren, verschiedene Rauheiten 131

Abbildung 7.14: Fallbeispiel Malpasset, digitales Geländemodell, Sohlhöhe z [m] (Farbfläche) 132

Abbildung 7.15: Fallbeispiel Malpasset, maximale Sohlneigung S_{max} [-] (Farbfläche) 133

Abbildung 7.16: Fallbeispiel Malpasset, Wassertiefe h [m] (Farbfläche), Vektoren der Fließgeschwindigkeit zum Zeitpunkt t = 60 s 134

Abbildung 7.17: Fallbeispiel Malpasset, Wassertiefe h [m] (Farbfläche), Vektoren der Fließgeschwindigkeit zum Zeitpunkt t = 100 s 135

Abbildung 7.18: Fallbeispiel Malpasset, Wasserspiegel z+h [m] (Farbfläche) zum Zeitpunkt t = 100 s 135

Abbildung 7.19: Fallbeispiel Malpasset, Froudezahl Fr [-] (Farbfläche), weiße Höhenlinie bei Fr = 1, Vektoren der Fließgeschwindigkeit zum Zeitpunkt t = 100 s 136

Abbildung 7.20: Fallbeispiel Malpasset, prozentuale vertikale Geschwindigkeiten an der Sohle [%] (Farbfläche), weiße Höhenlinien bei ±20% zum Zeitpunkt t = 100 s 137

Abbildung 7.21: Fallbeispiel Malpasset, prozentuale vertikale Geschwindigkeiten am Wasserspiegel [%] (Farbfläche), weiße Höhenlinien bei ±20% zum Zeitpunkt t = 100 s 138

Tabellenverzeichnis

Tabelle 2.1:	Analoge Größen der Euler- und Flachwassergleichungen	22
Tabelle 5.1:	Optimale Parameter für TVD-Runge-Kutta-Verfahren	73
Tabelle 5.2:	Anzahl der Ein- und Auslaufrandbedingungen für tiefengemittelte Berechnungen	74
Tabelle 6.1:	Maximale und verwendete *CFL*-Zahl für die RKDG-Methode mit Ansatzfunktionen unterschiedlicher Polynomgrade k	83
Tabelle 6.2:	Testproblem 1, relativer Fehler der Wassertiefe, RKDG0 ($k = 0$), HLL-Fluss	84
Tabelle 6.3:	Testproblem 1, relativer Fehler der Wassertiefe, RKDG1 ($k = 1$), HLL-Fluss, $M_L = 1$	84
Tabelle 6.4:	Testproblem 1, relativer Fehler der Wassertiefe, RKDG2 ($k = 2$), HLL-Fluss, $M_L = 1$	84
Tabelle 6.5:	Testproblem 1, relativer Fehler der Wassertiefe, RKDG3 ($k = 3$), HLL-Fluss, $M_L = 1$	85
Tabelle 6.6:	Testproblem 1, L^∞- und L^1-Fehler mit $N = 10$, $k = 0, 1, 2, 3$	86
Tabelle 6.7:	Testproblem 1, Effizienz höherpolynomialer Ansatzfunktionen, $N = 10$, $M_L = 1$	87
Tabelle 6.8:	Testproblem 1, relativer Fehler der Wassertiefe, RKDG1 ($k = 1$), $M_L = 0$	88
Tabelle 6.9:	Testproblem 1, relativer Fehler der Wassertiefe, RKDG2 ($k = 2$), $M_L = 0$	88
Tabelle 6.10:	Testproblem 1, relativer Fehler der Wassertiefe, W33	89
Tabelle 6.11:	Testproblem 1, relativer Fehler der Wassertiefe, W45	89
Tabelle 6.12:	Testproblem 1, relativer Fehler der Wassertiefe, MacCormack	90
Tabelle 6.13:	Testproblem MacDonald (1996), L^∞-Fehler der Wassertiefe h, HLL-Fluss, $M_L = 1{,}0$	95
Tabelle 6.14:	Testproblem MacDonald (1996), L^1-Fehler der Wassertiefe h, HLL-Fluss, $M_L = 1{,}0$	96
Tabelle 6.15:	Testproblem Berger & Stockstill (1995), RKDG0 ($k = 0$), L^1-Fehler der Wassertiefe für $CFL = 0{,}9$	98

Tabelle 6.16: Testproblem BERGER & STOCKSTILL (1995), RKDG1 ($k = 1$), L^1-Fehler der Wassertiefe für $CFL = 0,3$, $M_L = 0$ 99
Tabelle 6.17: Testproblem BERGER & STOCKSTILL (1995), L^1-Fehler für unterschiedliche RKDG-Verfahren 99
Tabelle 6.18: Testproblem BERGER & STOCKSTILL (1995), relative Ausführungszeiten 101
Tabelle 6.19: Testproblem 4b, RKDG0 ($k = 0$), L^1-Fehler für $CFL = 0,9$ 105
Tabelle 6.20: Testproblem 4b, RKDG1 ($k = 1$), L^1-Fehler für $CFL = 0,3$, $M_L = 0$ 105
Tabelle 6.21: Testproblem 4b, Effizienz der RKDG0- und RKDG1-Methode, HLL-Fluss 106
Tabelle 6.22: Testproblem 4a, RKDG0 ($k = 0$), L^1-Fehler für $CFL = 0,9$ 107
Tabelle 6.23: Testproblem 4a, RKDG1 ($k = 1$), L^1-Fehler für $CFL = 0,3$, $M_L = 0$ 108
Tabelle 6.24: Testproblem 4a, Effizienz RKDG0 und RKDG1, HLL-Fluss 109
Tabelle 7.1: Fallbeispiel Malpasset, Ausbreitungszeiten und prozentuale Abweichungen der Flutwelle zwischen den Transformatoren, Ergebnisse verschiedener numerischer Verfahren, $n = 0,03333$ s/m$^{1/3}$, modifiziert nach HARMS (2001) 126
Tabelle 7.2: Fallbeispiel Malpasset, Ausbreitungszeiten und prozentuale Abweichungen der Flutwelle zwischen den Transformatoren, RKDG1-Verfahren, verschiedene Rauheiten, modifiziert nach HARMS (2001) 127
Tabelle 7.3: Fallbeispiel Malpasset, maximale Wasserspiegel der Flutwelle an den Punkten S6-S14, Ergebnisse verschiedener numerischerVer-fahren, $n = 0,03333$ s/m$^{1/3}$, modifiziert nach HARMS (2001) 129
Tabelle 7.4: Fallbeispiel Malpasset, maximale Wasserspiegel der Flutwelle an den Messpunkten des physikalischen Modells (S6-S14), RKDG1-Verfahren, verschiedene Rauheiten, modifiziert nach HARMS (2001) 130
Tabelle 7.5: Fallbeispiel Malpasset, Sensitivitäten der Berechnungsergebnisse des Malpasset-Anwendungsfalls auf verschiedene Einflussfaktoren 139

Verzeichnis der Formelzeichen und Symbole

Lateinische Schriftzeichen

A, B		Jacobimatrizen
c	m s^{-1}	Wellengeschwindigkeit
CFL	-	CFL-Zahl
C_z	m$^{2/3}$ s^{-1}	Chezy-Koeffizient
f_i	m s^{-2}	Vektor der äußeren Kräfte
F		Flussvektor in x-Richtung
Fr	-	Froudezahl
G		Flussvektor in y-Richtung
g	m s^{-2}	Erdbeschleunigung
H		numerischer Flussvektor
h	m	Wassertiefe
K	m^2	Elementfläche
$K_{A,B}$		Matrizen der Eigenvektoren A und B
k	m^2 s^{-2}	turbulente kinetische Energie (Kapitel 2)
k	-	Polynomgrad einer Funktion
k_{St}	m$^{-1/3}$ s	Stricklerbeiwert
L	m	charakteristische Länge
L^1		Integralnorm 1
L^∞		Integralnorm ∞
M	-	Massenmatrix
M_L	-	Limiter-Parameter
n	m$^{1/3}$ s^{-1}	Manningbeiwert
n_e		Normalenvektor
p	N m^{-2}	Druck (Kapitel 2)
p	-	Konvergenzordnung
Q		Matrix-Vektor von Hilfsvariablen
q	m^2 s^{-1}	breitenbezogener Durchfluss
R		Flussmatrix

r	m	Radius
Re	-	Reynoldszahl
r_{hy}	m	hydraulischen Radius
S	-	Matrix-Vektor der Quellterme
S_0	-	Quellterm aus Sohlneigung
S_f	-	Quellterm aus Reibung
s	m s^{-2}	Geschwindigkeit einer Diskontinuität
T	-	Rotationsmatrix
TV		Totale Variation
t	s	Zeit
U		Matrix-Vektor $U = (h, uh, vh)^T$
u_i	m s^{-1}	Geschwindigkeitsvektor
$u*$	m s^{-1}	Schubspannungsgeschwindigkeit
u	m s^{-1}	Geschwindigkeitskomponente in x-Richtung
v	m s^{-1}	Geschwindigkeitskomponente in y-Richtung
W	m s^{-1}	Martix-Vektor der Riemann Invarianten
w	m s^{-1}	Geschwindigkeitskomponente in z-Richtung
z	m	Höhenkote der festen Sohle

Griechische Schriftzeichen

β	-	Winkel einer Stoßfront
β_{ij}	-	Impulskorrekturfaktor
γ	-	Verhältnis spezifischer Wärmen, bzw. Adiabatenexponent
ϕ	-	Testfunktion
φ	-	Ansatzfunktion
κ	-	Karmankonstante
Λ	m s^{-1}	Diagonalmatrix
λ	m s^{-1}	Eigenwert einer Matrix
ν	m^2 s^{-1}	kinematischen Scherviskosität
ν_t	m^2 s^{-1}	turbulente kinematische Viskosität
θ	-	Winkel einer positiven Wandänderung
ρ	kg m^{-3}	Fluiddichte
Γ		Rand des Berechnungsgebietes
τ_{ij}	N m^{-2}	Schubspannungsmatrix

ω_i	-	Wichtungsfaktoren der numerischen Integration
ξ	m	Höhenkote der Fluidoberfläche
Ω	m^2	Kontrollvolumen

Indizes

$\overline{\langle\rangle}$	Mittelwert
$\langle\rangle'$	Fluktuation
$\langle\rangle_0$	Größe zum Zeitpunkt $t = 0$
$\langle\rangle_L$	Größen auf der linken Seite einer Diskontinuität
$\langle\rangle_R$	Größen auf der rechten Seite einer Diskontinuität
$\langle\rangle_h$	Näherungslösung
$\langle\rangle^n$	zeitdiskrete Größe
$\langle\rangle_i$	ortsdiskrete Größe

1 Einleitung

1.1 Allgemeines

Die Erhaltungssätze der Kontinuumsmechanik für Masse, Impuls und Energie, die Navier-Stokes-Gleichungen (NSG), bilden die Grundlage für die physikalisch basierte Beschreibung strömungsmechanischer Vorgänge. Von Relevanz für hydrodynamische Simulationen, die im Bereich des Wasserbaus durchgeführt werden, sind insbesondere die ableitbaren vereinfachten Gleichungen wie die NSG für inkompressible Fluide und deren zeitliche Mittelung in Form der Reynoldsgleichungen. Die Annahme eines hydrostatischen Drucks führt weiter zu den Flachwassergleichungen, die durch eine Dimensionsreduzierung mit Hilfe einer Tiefenintegration in die räumlich zweidimensionalen tiefengemittelten Flachwassergleichungen (FWG) überführt werden können.

Die reduzierten räumlichen und zeitlichen Details im vereinfachten mathematischen Modell müssen durch eine Parametrisierung berücksichtigt werden, die wie die Gerinnerauheit auf empirischen Gleichungen beruhen können. Das bedeutet einerseits für die Modellierung der ablaufenden Prozesse einen erhöhten Abstraktionsgrad und schränkt den Anwendungsbereich der FWG ein, ermöglicht aber andererseits eine wesentlich effektivere numerische Berechnung der Strömungsphänomene.

Die in dieser Arbeit diskutierten FWG und ihre numerische Umsetzung auf der Basis einer zeitlich expliziten Finite-Elemente Diskretisierung liefern für bestimmte Anwendungsfelder des Wasserbaus praxistaugliche Ergebnisse. Dazu gehören extrem instationäre Fließphänomene wie Dammbruchwellen, Schwallwellen durch Unwetter in bergigem Gebiet, durch Inbetriebnahme von Turbinen, durch Notablässe oder durch Spülvorgänge, sowie Schwall- und Sunkwellen aufgrund von Schleusungen. Ein weiteres Anwendungsfeld der Gleichungen sind örtlich gerichtete Fließvorgänge bei schießenden bzw. überkritischen Abflüssen, Wechselsprünge oder Stoßfronten.

Das in dieser Arbeit vorgestellte numerische Verfahren, die Runge-Kutta-Discontinuous-Galerkin-Methode (RKDG-Methode), basiert wie auch die FWG auf einem deterministischen Ansatz. Unter Beachtung des Kausalprinzips kann ein späterer Systemzustand eindeutig aus einem vorherigen Zustand bestimmt werden. Kleine Änderungen im Anfangszustand des Systems können aufgrund der Nichtlinearität der ablaufenden strömungsmechanischen Prozesse große Änderungen in den Ergebnissen hervorrufen. Die zeitliche Integration der Lösung durch das numerische Verfahren hat deshalb besonders bei Fragestellungen, die wie Dammbruchwellen stark vom Initialzustand des Systems abhängen, eine große Bedeutung. Andererseits werden bei stationären und quasi-stationären Problemstellungen (z. B. Schussrinnenströmung) die Lösungen maßgeblich von den Randbedingungen geprägt und stellen auch in diesem Punkt entsprechende Anforderungen an den numerischen Algorithmus.

Die Zielstellung dieser Arbeit ist eine detaillierte Herleitung der FWG, die Eingrenzung ihrer Anwendungsfelder im Wasserbau und ihre numerische Lösung mit Hilfe der RKDG-Methode. Dabei wird im Besonderen sowohl auf die mathematische und physikalische als auch auf die numerische Behandlung von Diskontinuitäten in der Lösung eingegangen. Das im Gebrauch auf die FWG erstmals von SCHWANENBERG & KÖNGETER (2000) vorgestellte RKDG-Verfahren wird anhand von analytischen Testproblemen verifiziert und auf praktische Fallbeispiele wie eine Dammbruchwelle und eine Schussrinnenströmung angewendet. Die eingesetzte numerische Methode stellt für die Simulation von extrem instationären und transkritischen Strömungen eine sehr gute Alternative zu den bisher hauptsächlich benutzten Finite-Volumen Verfahren dar.

1.2 Gliederung der Arbeit

In **Kapitel 2** werden die FWG aus den Grundgleichungen der Hydromechanik, den Navier-Stokes-Gleichungen, ausführlich hergeleitet. Die dabei getroffenen Annahmen und Vereinfachungen werden vorgestellt und erörtert. Die kurze Darstellung einer einfachen Turbulenzmodellierung dient als Grundlage einer späteren Sensitivitätsanalyse der untersuchten Strömungen auf Turbulenzeffekte. Die sinnvollen Anwendungsgebiete der FWG werden aufgezeigt und zusammen mit dem Stand der Forschung auf diesen Gebieten dargestellt. Die Beschreibung der Analogie der Gleichungen zu den Euler-Gleichungen für kompressible Fluide schafft ein Verständnis für ihre enge Verwandtschaft unter den Gesichtspunkten der Lösungstheorie und der darauf angewendeten numerischen Verfahren.

Die physikalischen und mathematischen Eigenschaften der tiefengemittelten Flachwassergleichungen sind in **Kapitel 3** thematisiert. Nach der Einführung der dimensionslosen Parameter wie der Reynolds- und der Froudezahl beschäftigt sich die Arbeit hauptsächlich mit der Theorie der diskontinuierlichen Lösungen der Gleichungen. Dabei wird sowohl auf unterschiedliche Formulierungen der FWG (konservativ und nicht-konservativ) als auch auf die Wahl verschiedener Formen der partiellen Differentialgleichungen (Divergenz- und Integralform) eingegangen. Weiterhin wird die Sprungbedingung und die Entropiebedingung im Rahmen der Behandlung diskontinuierlicher Lösungen erläutert. Beide Bedingungen haben später bei der Implementierung des numerischen Verfahrens eine wesentliche Bedeutung.

Numerische Lösungsverfahren für die FWG werden in **Kapitel 4** vorgestellt. Nach einer allgemeinen Einführung in verschiedene Merkmale zur Charakterisierung dieser Verfahren findet eine Diskussion der wesentlichen, in der Literatur benutzten Lösungsmethoden zur Diskretisierung der FWG statt. Dabei handelt es sich um das Charakteristikenverfahren, die Methode der Finite-Differenzen (FD), der Finite-Elemente (FE) oder der Finite-Volumen (FV). Diese mündet in eine Beschreibung des aktuellen Stands der Forschung auf diesem Gebiet. Besondere Beachtung schenkt die Arbeit den Upstream- und Total-Variation-Diminishing-Eigenschaften (TVD-Eigenschaften) der Verfahren und der Behandlung der in den FWG vorkommenden Quellterme.

Die Herleitung der Diskretisierung der in Anwendung auf die FWG neuen RKDG-Methode findet in **Kapitel 5** statt. Dabei wird mehrfach auf die in Kapitel 3 erarbeiteten mathematischen und physikalischen Grundlagen zurückgegriffen. Trotz der formalen Bezeichnung der RKDG-Methode als FE-Verfahren finden sich in ihr einige Anleihen und Ideen der in Kapitel 4 vorgestellten FV-Verfahren. Sie werden an dieser Stelle besonders diskutiert.

In **Kapitel 6** werden eine Reihe von analytischen stationären und instationären Lösungen für die FWG mit und ohne Diskontinuitäten vorgestellt. Dabei wird anhand von Konvergenzuntersuchungen die Leistungsfähigkeit der RKDG-Methode an komplexer werdenden Problemstellungen analysiert und verifiziert.

Der Einsatz des numerischen Verfahrens auf praktische Fragestellungen wird in **Kapitel 7** an zwei Fallbeispielen untersucht. Die erste Anwendung, die Simulation einer stationären überkritischen Strömung in einer sich verengenden Schussrinne, mündet in eine Diskussion des Potentials des Flachwasseransatzes zur Berechnung von Stoßphänomenen. In einer zweiten Anwendung, der Simulation der Flutwelle nach dem Bruch des Malpassetdamms, wird die Berechnung instationärer und transkritischer Strömung analysiert, und Naturmessungen und Daten aus einem physikalischen Modellversuch werden gegenübergestellt.

Kapitel 8 fasst die vorliegende Arbeit zusammen. In **Kapitel 9** wird ein Ausblick auf weiteren Forschungsbedarf gegeben.

2 Die tiefengemittelten Flachwassergleichungen

Die in der Hydromechanik verwendeten Grundgleichungen für die Erhaltung von Masse, Impuls und Energie werden als die Navier-Stokes-Gleichungen (NSG) bezeichnet. Die tiefengemittelten Flachwassergleichungen (FWG) lassen sich unter der Anwendung verschiedener Annahmen und Vereinfachungen aus den NSG für inkompressible Fluide ableiten. Im folgenden Kapitel wird diese Ableitung vorgestellt, und die damit verbundenen Einschränkungen in der tiefengemittelten Impulsbilanz werden diskutiert. Neben der Vernachlässigung der vertikalen Geschwindigkeit und Beschleunigung ist dies hauptsächlich die Annahme eines konstanten oder logarithmischen vertikalen Profils für die horizontalen Geschwindigkeitskomponenten und die Voraussetzung einer konstanten Dichte im Fluid. Die aufgeführten Punkte bilden ein wesentliches Kriterium für die Einschätzung des Anwendungsbereiches der FWG.

2.1 Herleitung der Gleichungen

Unter Benutzung der Tensornotation lauten die NSG für eine homogene inkompressible Flüssigkeit:

Kontinuitätsgleichung:

$$\partial_i u_i = 0, \qquad i = x, y, z \tag{2.1}$$

Impulsgleichungen:

$$\partial_t u_i + \partial_j (u_i u_j) = -\frac{1}{\rho} \partial_i p + \nu \partial_j (\partial_j u_i) + f_i \qquad i, j = x, y, z \tag{2.2}$$

mit den Geschwindigkeitskomponenten $u_x = u$, $u_y = v$, $u_z = w$, dem Druck p, der Fluiddichte ρ, der kinematischen Scherviskosität ν und dem Vektor der äußeren Kräfte f_i.

Für laminare und gering turbulente Strömungen lassen sich diese Gleichungen mittels Direkter Numerischer Simulation (DNS) lösen. Zur Beschreibung von Strömungen mit höherer Turbulenz wird üblicherweise eine zeitliche Mittelung der NSG nach Reynolds über das Intervall Δt durchgeführt. Die gemittelten Größen der Geschwindigkeit $\overline{u}_i$ und des Drucks $\overline{p}$ lauten damit

$$\overline{u}_i = \frac{1}{\Delta t}\int_{\Delta t} u_i(t)\,\mathrm{d}t\,, \qquad i = x, y, z\,, \tag{2.3}$$

$$\overline{p} = \frac{1}{\Delta t}\int_{\Delta t} p(t)\,\mathrm{d}t \tag{2.4}$$

Die Geschwindigkeitskomponenten u_i und der Druck p können in die zeitlichen Mittelwerte $\overline{u}_i$, $\overline{p}$ und in fluktuierende Anteile u_i', p' aufgeteilt werden. Es gilt

$$u_i = \overline{u}_i + u_i' \qquad i = x, y, z \tag{2.5}$$

$$p = \overline{p} + p' \tag{2.6}$$

Durch das Einsetzen der Gleichungen (2.5) und (2.6) in die NSG lassen sich die sogenannten Reynoldsgleichungen ableiten. Eine genaue Herleitung findet sich in DVWK (1999) oder MALCHAREK (2000). Für ein inkompressibles Fluid lauten die Reynoldsgleichungen:

Kontinuitätsgleichung:

$$\partial_i \overline{u}_i = 0 \qquad i = x, y, z \tag{2.7}$$

Impulsgleichungen:

$$\partial_t \overline{u}_i + \partial_j(\overline{u}_i \overline{u}_j) = -\frac{1}{\rho}\partial_i \overline{p} + \partial_j(\nu \partial_j \overline{u}_i - \overline{u_i' u_j'}) + f_i \qquad i, j = x, y, z \tag{2.8}$$

Die Reynoldsgleichungen enthalten wegen der Nichtlinearität der konvektiven Terme in den Impulsgleichungen,

$$\partial_j(\overline{(\overline{u}_i + u_i')(\overline{u}_j + u_j')}) = \partial_j(\overline{u}_i \overline{u}_j) + \partial_j(\overline{u_i' u_j'}) \tag{2.9}$$

neben den zeitlich gemittelten Größen zusätzlich Fluktuationsterme,

$$\overline{u_i' u_j'} \tag{2.10}$$

die auch als Reynoldsspannungen bezeichnet werden. Die Reynoldsgleichungen haben damit mehr Unbekannte als Gleichungen, was einen Schließungsansatz erfordert. Der aus diesem Umstand entstandene Forschungszweig, die Turbulenzmodellierung, beschäftigt sich mit der quantitativen Beschreibung der Reynoldsspannungen. Eine Einführung in die Turbulenzmodellierung mit einem Schwerpunkt auf offenen Gerinnen findet sich in RODI (1993).

Ein bedeutender und vielen Turbulenzmodellen zu Grunde liegender Schließungsansatz, das Prinzip der Wirbelviskosität, wurde von Boussinesq eingeführt. Dieser Ansatz basiert auf der Annahme einer Proportionalität zwischen den als isotrop angenommenen turbulenten Spannungen und den Ableitungen der mittleren Geschwindigkeiten,

$$-\overline{u_i' u_j'} = \nu_t (\partial_j \overline{u}_i + \partial_i \overline{u}_j) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \tag{2.11}$$

mit der turbulenten kinetischen Energie k. Der Proportionalitätsfaktor dieser Größen wird als die turbulente kinematische Viskosität ν_t bezeichnet. Die turbulente kinematische Viskosität ist nicht wie die kinematische Scherviskosität eine reine Stoffgröße, sondern sie ist vom Strömungszustand abhängig. In offenen Gerinnen ist die turbulente kinematische Viskosität meist um mehrere Dimensionen größer als die kinematische Scherviskosität. Die Ergänzung der turbulenten kinetischen Energie k mit dem Kronecker-Delta-Symbol δ_{ij} im zweiten Term der rechten Seite stellt eine Erweiterung des klassischen Boussinesq Ansatzes dar und macht die Gleichung anwendbar auf Normalspannungen des Reynoldsspannungstensors (RODI, 1993). Die turbulente kinetische Energie berechnet sich zu

$$k = \frac{1}{2} (\overline{u'u'} + \overline{v'v'} + \overline{w'w'}) \tag{2.12}$$

Der zweite Term in Gleichung (2.11) wirkt somit wie ein Druckanteil und kann in numerischen Berechnungen meist zusammen mit dem Druck im Druckgradienten behandelt werden.

Natürliche offene Gerinne sind in der Regel nicht tief im Vergleich zu ihrer horizontalen Ausdehnung. Ausgehend von einer geringen Geschwindigkeits- und Beschleunigungskomponente in z-Richtung kann der Einfluss der vertikalen Geschwindigkeit und Beschleunigung in der vertikalen Impulsbilanz (2.8) vernachlässigt werden. Diese Impulsgleichung kann so auf eine hydrostatische Druckbedingung reduziert werden, gegeben durch

$$\partial_z \overline{p} + \rho g = 0 \tag{2.13}$$

Mit Gleichung (2.13) kann der Druck explizit aus der Wassertiefe h bestimmt werden. Die Reynoldsgleichungen können in einen einfacheren Formelsatz, die sogenannten Flachwassergleichungen, umgewandelt werden. Sämtliche Schubspannungen werden bei dieser Umformung im Parameter τ zusammengefasst. Das Symbol der zeitlichen

Mittelung wird im Folgenden weggelassen. Die dreidimensionalen Flachwassergleichungen ergeben sich damit zu

Kontinuitätsgleichung:

$$\partial_i u_i = 0 \qquad i = x, y, z \tag{2.14}$$

Impulsgleichungen:

$$\partial_t u + \partial_i (u u_i) = -\frac{1}{\rho}\partial_x p + \frac{1}{\rho}\partial_i \tau_{xi} \qquad i = x, y, z \tag{2.15}$$

$$\partial_t v + \partial_i (v u_i) = -\frac{1}{\rho}\partial_y p + \frac{1}{\rho}\partial_i \tau_{yi} \qquad i = x, y, z \tag{2.16}$$

An der Höhenkote der freien Oberfläche ξ gilt die kinematische Randbedingung

$$\partial_t \xi + u_s \partial_x \xi + v_s \partial_y \xi - w_s = 0 \tag{2.17}$$

mit den Geschwindigkeiten u_s, v_s, w_s an der freien Oberfläche. Für eine feste Sohle mit der Höhenkote z_b lautet die Randbedingung

$$u_b \partial_x z + v_b \partial_y z - w_b = 0 \tag{2.18}$$

mit den Geschwindigkeiten u_b, v_b, w_b an der Gerinnesohle. Bei der Herleitung der Flachwassergleichungen ist die vertikale Geschwindigkeit und Beschleunigung weitgehend vernachlässigt worden. Ist eine Sohlneigung vorhanden, tritt gemäß Gleichung (2.17) proportional zu den horizontalen Geschwindigkeiten eine vertikale Geschwindigkeitskomponente auf. Es ist im Rahmen der Benutzung der Flachwassergleichungen darauf hinzuweisen, dass bei Gerinnen mit einer größeren Sohlneigung oder Sohlneigungsänderung die hydrostatische Druckbedingung verletzt wird. Die Anwendbarkeit der Flachwassergleichungen ist damit eingeschränkt. Als ungefährer Grenzwert für die Sohlneigung S_0 wird in der Literatur eine Größe von $S_0 = 0{,}1$ angegeben. Eine weiterführende Diskussion dieses Sachverhaltes befindet sich in DVWK (1999).

Die Flachwassergleichungen können über eine Tiefenintegration weiter vereinfacht und in ihrer Dimension reduziert werden. Bei diesem Vorgehen wird die Dichte als konstant angenommen und die vertikale Geschwindigkeit in den gesamten Impulsgleichungen vernachlässigt. Die horizontalen Geschwindigkeiten werden über die Fließtiefe h gemittelt. Sie sind definiert durch

$$\overline{u} = \frac{1}{h}\int_{z_b}^{\xi} u(z)\,\mathrm{d}z \tag{2.19}$$

$$\overline{v} = \frac{1}{h}\int_{z_b}^{\xi} v(z)\,\mathrm{d}z \tag{2.20}$$

Die Tiefenintegration der Kontinuitätsgleichung lautet

$$\int_{z_b}^{\xi} (\partial_x u + \partial_y v + \partial_z w)\,\mathrm{d}z = 0 \tag{2.21}$$

wobei unter Anwendung des Satzes von Leibniz[1] für Integrale mit variablen Grenzen auf die beiden ersten Summanden des Integrals in Gleichung (2.21) und

$$\int_{\mathrm{z_b}}^{\xi} \partial_z w\,\mathrm{d}z = w_\xi - w_{z_b} \tag{2.22}$$

auf den dritten Summanden die Gleichung umgeformt werden kann zu

$$\partial_x \int_{z_b}^{\xi} u\,\mathrm{d}z + \partial_y \int_{z_b}^{\xi} v\,\mathrm{d}z + \underbrace{u_{z_b}\partial_x z + v_{z_b}\partial_y z - w_{z_b}}_{0} \underbrace{- u_\xi \partial_x \xi - v_\xi \partial_y \xi + w_\xi}_{\partial_t \xi} = 0 \tag{2.23}$$

Durch Einsetzen der kinematischen Randbedingungen (Gleichung (2.17) - (2.18)) und der Annahme einer festen Sohle bzw. $\partial_t z_b = 0$ und $h = \xi - z_b$ lautet die tiefengemittelte Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t h + \partial_x(\overline{u}h) + \partial_y(\overline{v}h) = 0 \tag{2.24}$$

Bezüglich der Impulsgleichungen kann ähnlich vorgegangen werden. Im Folgenden wird nur die Herleitung der tiefengemittelten Impulsgleichung in *x*-Richtung beschrieben. Die Herleitung der Impulsgleichung in *y*-Richtung verläuft identisch. Die tiefengemittelte Version von Gleichung (2.15) lautet

---

[1] Der Satz von Leibniz:

$$\partial_x \int_{a(x,y)}^{b(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z = \int_{a(x,y)}^{b(x,y)} (\partial_x f(x,y,z))\,\mathrm{d}z - f(x,y,a(x,y))\,\partial_x a(x,y) + f(x,y,b(x,y))\,\partial_x b(x,y)$$

$$\int_{z_b}^{\xi} \partial_t u + \partial_i (uu_i)\, dz = \int_{z_b}^{\xi} -\frac{1}{\rho}\partial_x p + \frac{1}{\rho}\partial_i \tau_{xi}\, dz \tag{2.25}$$

Durch die Anwendung des Satzes von Leibniz auf den Term der zeitlichen Ableitung und der konvektiven Terme der Impulsgleichung können diese wie folgt umgeformt werden:

$$\int_{z_b}^{\xi} \partial_t u \,\mathrm{d}z = \partial_t (\overline{u}h) + u_{z_b}\partial_t z_b - u_\xi \partial_t \xi \tag{2.26}$$

$$\int_{z_b}^{\xi} \partial_x u^2 \,\mathrm{d}z = \partial_x \int_{z_b}^{\xi} u^2 \,\mathrm{d}z + u_{z_b}^2 \partial_x z_b - u_\xi^2 \partial_x \xi \tag{2.27}$$

$$\int_{z_b}^{\xi} \partial_y (uv) \,\mathrm{d}z = \partial_y \int_{z_b}^{\xi} uv \,\mathrm{d}z + u_{z_b} v_{z_b} \partial_y z_b - u_\xi v_\xi \partial_y \xi \tag{2.28}$$

$$\int_{z_b}^{\xi} \partial_z (uw) \,\mathrm{d}z = u_\xi w_\xi - u_{z_b} w_{z_b} \tag{2.29}$$

Die zusammengefassten Terme der zeitlichen und konvektiven Ableitungen (2.25) - (2.29) ergeben sich damit zu

$$\begin{aligned} &\partial_t (\overline{u}h) + \partial_x \int_{z_b}^{\xi} u^2 \,\mathrm{d}z + \partial_y \int_{z_b}^{\xi} uv \,\mathrm{d}z \\ &\underbrace{- u_\xi \partial_t \xi - u_\xi^2 \partial_x \xi - u_\xi v_\xi \partial_y \xi + u_\xi w_\xi}_{0} + \underbrace{u_{z_b}^2 \partial_x z_b + u_{z_b} v_{z_b} \partial_y z_b - u_{z_b} w_{z_b}}_{0} \\ &= \partial_t (\overline{u}h) + \partial_x (\overline{u}^2 h) + \partial_y (\overline{u}\overline{v}h) + \partial_x \int_{z_b}^{\xi} \overline{u'u'} \,\mathrm{d}z + \partial_y \int_{z_b}^{\xi} \overline{u'v'} \,\mathrm{d}z \end{aligned} \tag{2.30}$$

Die verbleibenden Integrale über die Größen $\overline{u'u'}$ und $\overline{u'v'}$ beschreiben, ähnlich wie bei der zeitlichen Reynoldsmittelung der NSG, einen Dispersionseffekt aufgrund der Mittelung. Bei der Tiefenintegration handelt es sich hier um eine räumliche Mittelung. Die konvektiven Terme (2.27) und (2.28) können unter Einführung der Impuls-korrekturterme

$$\beta_{ij} = 1 + \frac{\overline{u'_i u'_j}}{\overline{u}_i \overline{u}_j} \geq 1 \tag{2.31}$$

weiter zusammengefasst werden zu

$$\begin{aligned}&\partial_x(\overline{u}^2 h) + \partial_y(\overline{u}\overline{v}h) + \partial_x \int_{z_b}^{\xi} \overline{u'u'}\,\mathrm{d}z + \partial_y \int_{z_b}^{\xi} \overline{u'v'}\,\mathrm{d}z \\ &= \partial_x(\beta_{xx}\overline{u}^2 h) + \partial_y(\beta_{xy}\overline{u}\overline{v}h)\end{aligned} \tag{2.32}$$

Unter der Annahme eines turbulenten Gerinneabflusses mit einem logarithmischen Geschwindigkeitsprofil nehmen die Parameter β_{ij} für extrem rauhe Gerinne einen Wert von bis zu 1,15 an (MALCHAREK, 2000), strebt jedoch für weniger rauhe Gerinne schnell gegen eins und wird im Rahmen von praktischen Berechnungen in der Regel vernachlässigt (BEFFA, 1994).

Die partielle Ableitung des Drucks errechnet sich unter Ausnutzung der hydrostatischen Druckannahme zu

$$\partial_x p = \rho\, g \partial_x \xi = \rho\, g \partial_x (z_b + h) \tag{2.33}$$

Der Druckterm lautet damit

$$\int_{z_b}^{\xi} \frac{1}{\rho} \partial_x p \,\mathrm{d}z = gh(\partial_x z_b + \partial_x h) = gh\partial_x z_b + \partial_x(\frac{1}{2} gh^2) \tag{2.34}$$

Die tiefengemittelten Ableitungen des Spannungstensors lassen sich umformen zu

$$\begin{aligned}&\int_{z_b}^{\xi} \partial_x \tau_{xx}\,\mathrm{d}z \\ &= \partial_x \int_{z_b}^{\xi} \tau_{xx}\,\mathrm{d}z + \tau_{xx,z_b}\partial_x z_b - \tau_{xx,\xi}\partial_x \xi = \partial_x(\overline{\tau}_{xx} h) + \tau_{xx,z_b}\partial_x z_b - \tau_{xx,\xi}\partial_x \xi\end{aligned} \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned}&\int_{zb}^{\xi} \partial_y \tau_{xy}\,\mathrm{d}z \\ &= \partial_y \int_{zb}^{\xi} \tau_{xy}\,\mathrm{d}z + \tau_{xy,z}\partial_y z_b - \tau_{xy\xi}\partial_y \xi = \partial_y(\overline{\tau}_{xy} h) + \tau_{xy,z}\partial_y z_b - \tau_{xy,\xi}\partial_y \xi\end{aligned} \tag{2.36}$$

$$\int_{z_b}^{\xi} \partial_z \tau_{xz} \, \mathrm{d}z = \tau_{xz,z_b} - \tau_{xz,\xi} \tag{2.37}$$

Die Spannungsterme lauten zusammengefasst

$$\begin{aligned} &\partial_x(\bar{\tau}_{xx}h) + \partial_y(\bar{\tau}_{xy}h) + [\tau_{xx}\partial_x z_b + \tau_{xy}\partial_y z_b + \tau_{xz}]_{z_b} \\ &-[\tau_{xx}\partial_x\xi + \tau_{xy}\partial_y\xi + \tau_{xz}]_{\xi} \\ &= \partial_x(\bar{\tau}_{xx}h) + \partial_y(\bar{\tau}_{xy}h) + \tau_{x,z_b} - \tau_{x,\xi} \end{aligned} \tag{2.38}$$

Die Klammerterme werden zu horizontal projizierten Spannungen an der Sohle τ_{x,z_b} und der freien Oberfläche $\tau_{x,\xi}$ zusammengefasst. Die gesamten FWG lauten damit:

Kontinuitätsgleichung:

$$\partial_t h + \partial_x(\bar{u}h) + \partial_y(\bar{v}h) = 0 \tag{2.39}$$

Impulsgleichungen:

$$\begin{aligned} &\partial_t(\bar{u}h) + \partial_x(\beta_{xx}\bar{u}^2 h + \frac{1}{2}gh^2) + \partial_y(\beta_{xy}\bar{u}\bar{v}h) \\ &= gh(S_{0x} - S_{fx}) + \frac{1}{\rho}\partial_x(h\bar{\tau}_{xx}) + \frac{1}{\rho}\partial_y(h\bar{\tau}_{xy}) \end{aligned} \tag{2.40}$$

$$\begin{aligned} &\underbrace{\partial_t(\bar{v}h)}_{\text{lokale Beschleunigung}} \underbrace{+\partial_x(\beta_{yx}\bar{u}\bar{v}h) + \partial_y(\beta_{yy}\bar{v}^2 h + \frac{1}{2}gh^2)}_{\text{konvektive Beschleunigung}} \\ &= \underbrace{gh(S_{0y} - S_{fy})}_{\text{Quellterme}} + \underbrace{\frac{1}{\rho}\partial_x(h\bar{\tau}_{xy}) + \frac{1}{\rho}\partial_y(h\bar{\tau}_{yy})}_{\text{diffuse Terme}} \end{aligned} \tag{2.41}$$

mit $S_{0x} = -\partial_x z_b$, $S_{0y} = -\partial_y z_b$ und den Sohlschubspannungen $S_{fx} = \tau_{x,z_b} / gh\rho$ und $S_{fy} = \tau_{y,z_b} / gh\rho$.

Die Sohlschubspannungen werden bei praktischen Berechnungen durch empirische Ansätze angenähert. Eine gebräuchliche Formulierung basiert auf der Benutzung des Chezy-Koeffizienten C_z. Die Sohlschubspannungen lauten damit

$$S_{fx} = \frac{\bar{u}\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}{h\,C_z^2} \tag{2.42}$$

$$S_{fy} = \frac{\bar{v}\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}{h\,C_z^2} \tag{2.43}$$

Unter Benutzung des empirischen Reibungsgesetzes nach Manning kann der Chezy-Koeffizient C_z ausgedrückt werden durch

$$C_z = k_{St}\, h^{1/6} = \frac{h^{1/6}}{n} \tag{2.44}$$

mit dem Manningbeiwert n bzw. dem Stricklerbeiwert $k_{St} = 1/n$. Eine zusätzliche Berücksichtigung von Windschubspannungen und weiterer äußerer Kräfte findet sich in WEIYAN (1992), wird jedoch im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter verfolgt.

Die Gleichungen (2.39) - (2.41) werden auch als die konservative Form der FWG bezeichnet. Unter der Annahme einer konstanten Dichte stellen die Zeitableitungen der Gleichungen die zeitliche Änderung von Volumen und Impuls dar[2].

Eine Reihe von Finite-Differenzen-Verfahren (FD-Verfahren) und fast alle in der Literatur bekannten Finite-Elemente-Verfahren (FE-Verfahren) basieren auf einer Diskretisierung der nicht-konservativen Form oder der sogenannten Geschwindigkeitsformulierung der FWG. Man erhält diese bei Vernachlässigung von β_{ij} und durch Ausdifferenzieren der konvektiven Terme in den Impulsgleichungen durch die Umformung

$$\begin{aligned}
&\partial_t(\bar{u}h) + \partial_x(\bar{u}^2 h + \frac{1}{2}gh^2) + \partial_y(\bar{u}\bar{v}h) \\
&= h\partial_t\bar{u} + \bar{u}\partial_t h + \bar{u}h\partial_x\bar{u} + \bar{u}\partial_x(\bar{u}h) + gh\partial_x h + \bar{v}h\partial_x\bar{u} + \bar{u}\partial_x(\bar{v}h) \\
&= h(\partial_t\bar{u} + \bar{u}\partial_x\bar{u} + \bar{v}\partial_y\bar{u} + g\partial_x h) + \bar{u}\underbrace{(\partial_t h + \partial_x(\bar{u}h) + \partial_y(\bar{v}h))}_{0}
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Damit lautet die nicht-konservative Geschwindigkeitsformulierung der FWG:

Kontinuitätsgleichung:

[2] Die physikalische Einheit der Impulsgleichungen entspricht erst nach Multiplikation der Gleichungen mit der Fluiddichte ρ, die zeitlich und räumlich als unverändert angenommen wird, der Einheit Impuls.

$$\partial_t h + \partial_x(\bar{u}h) + \partial_y(\bar{v}h) = 0 \tag{2.46}$$

Impulsgleichungen:

$$\partial_t \bar{u} + \bar{u}\partial_x \bar{u} + \bar{v}\partial_y \bar{u} = g(S_{0x} - S_{fx}) + \frac{1}{\rho h}\partial_x(h\bar{\tau}_{xx}) + \frac{1}{\rho h}\partial_y(h\bar{\tau}_{y}) \tag{2.47}$$

$$\partial_t \bar{v} + \bar{u}\partial_x \bar{v} + \bar{v}\partial_y \bar{v} = g(S_{0y} - S_{fy}) + \frac{1}{\rho h}\partial_x(h\bar{\tau}_{xy}) + \frac{1}{\rho h}\partial_y(h\bar{\tau}_{yy}) \tag{2.48}$$

Auf die Anwendbarkeit dieser Formulierung im Rahmen der in dieser Arbeit untersuchten Strömungen wird in Kapitel 3.5 näher eingegangen.

Es sei darauf hingewiesen, dass die vorgestellten Einschränkungen im Anwendungsbereich der FWG ausschließlich auf Idealisierungen der Impulsgleichungen beruhen. Die Kontinuitätsgleichung ist nach wie vor allgemeingültig und wird in der tiefengemittelten Form oft auch in dreidimensionalen Modellen für offene Gerinne zur Bestimmung der freien Oberfläche benutzt (JANKOWSKI, 1999).

Die bei der Herleitung bis hierhin getroffenen Vereinfachungen und Annahmen für Strömungen in offenen Gerinnen seien noch einmal zusammengefasst:

- **Die Vernachlässigung der vertikalen Geschwindigkeit und Beschleunigung:**

  Diese Bedingung führt, wenn in der Strömung eingehalten, zu einer hydrostatischen Druckverteilung im Fluid und schränkt die Anwendung der FWG hauptsächlich in 2 Anwendungsbereichen ein:

  a) Größere Sohlneigungen führen aufgrund der kinematischen Randbedingung (2.18) zu einer entsprechend großen vertikalen Geschwindigkeit. Eine Änderung der Sohlneigung und damit der vertikalen Geschwindigkeit impliziert außerdem eine vertikale Beschleunigung des Wassers an der Sohle. Sowohl die Sohlneigung als auch die Sohlneigungsänderung müssen deshalb bei den zu untersuchenden Strömungen klein sein.

  b) An der Wasseroberfläche werden wie an der Gerinnesohle die vertikalen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen vernachlässigt. Dort schränkt diese Vernachlässigung hauptsächlich die Berechnung kurzer Wellen ein, bei denen diese Effekte eine maßgebende Rolle spielen.

- **Eine bekannte vertikale Verteilung der horizontalen Geschwindigkeiten:**

Die Gleichungen (2.40) und (2.41) beschreiben den horizontalen Impulsaustausch. Sind die vertikalen Geschwindigkeitsprofile der horizontalen Geschwindigkeiten u und v bekannt, kann dieser Austausch über die Faktoren β_{ij} exakt berücksichtigt werden. Bei praktischen Berechnungen ist dieses vertikale Geschwindigkeitsprofil in der Regel nicht bekannt und wird entweder als logarithmisch oder konstant angenommen. Die Anwendung der FWG ist damit auf Strömungen beschränkt, auf die diese Annahme zutrifft.

- **Annahme einer konstanten Dichte im Fluid:**

  Die Annahme einer konstanten Dichte im Fluid schließt die Anwendung der FWG auf Strömungen aus, bei denen vertikale Dichteunterschiede eine maßgebende Rolle spielen (z. B. bei geschichteter Seenströmung).

2.2 Turbulenzmodellierung

Tritt die Turbulenz in der Strömung in den Vordergrund und soll diese über eine numerische Simulation abgebildet werden, können die FWG nur bedingt angewendet werden. Turbulente Effekte können zwar zusammen mit der Herleitung der Impulsgleichungen auf die horizontale Ebene projiziert werden, stellen aber eigentlich einen voll dreidimensionalen Prozess dar. Es existieren in der Literatur eine Reihe von tiefengemittelten Versionen dreidimensionaler Turbulenzmodelle, die eine mehr oder weniger gute Erfassung der Turbulenz in offenen Gerinnen ermöglichen. Genannt seien hier das tiefengemittelte Mixing-Length-Modell und das tiefengemittelte k-ε-Modell (RODI, 1993).

Die im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Strömungen haben einen ausgeprägt konvektiven Charakter. Die Turbulenzmodellierung ist deshalb von untergeordneter Bedeutung und soll durch das im Folgenden dargestellte einfache Turbulenzmodell mit konstanter turbulenter kinematischer Viskosität ν_t approximiert werden. Es handelt sich um ein Nullgleichungsmodell, bei dem die turbulente kinematische Viskosität ν_t sich alleine auf der Basis bekannter Größen beschreiben lässt. Die Implementierung der Turbulenz in das numerische Modell dient in der Hauptsache zur Untersuchung der Sensitivität der untersuchten Strömungen auf Turbulenzeffekte. Sie kann bei den praktischen Berechnungen im Rahmen dieser Arbeit in der Regel vernachlässigt werden.

Unter Anwendung des Wirbelviskositätsprinzips von Boussinesq können die turbulenten Schubspannungen mit der tiefengemittelten turbulenten kinematischen Viskosität $\bar{\nu}_t$ durch

$$\bar{\tau}_{xx} = 2\rho\overline{\nu_t}\partial_x(\bar{u}) \tag{2.49}$$

$$\bar{\tau}_{xy} = \bar{\tau}_{yx} = \rho\overline{\nu_t}(\partial_y(\bar{u}) + \partial_x(\bar{v})) \tag{2.50}$$

$$\bar{\tau}_{yy} = 2\rho\overline{\nu_t}\partial_y(\bar{v}) \tag{2.51}$$

abgeschätzt werden. Neben dieser von einer Reihe von Autoren benutzten Form (z. B. YE & MCCORQUODALE, 1997; JIA & WANG, 1999) finden sich in der Literatur einige weitere Formulierungen, die auf weitergehenden Vereinfachungen und Annahmen beruhen. MOLLS & CHAUDHRY (1995) benutzen

$$\bar{\tau}_{xx} = \frac{2\rho\overline{\nu_t}}{h}\partial_x(\bar{u}h) \tag{2.52}$$

$$\bar{\tau}_{xy} = \bar{\tau}_{yx} = \frac{\rho\overline{\nu_t}}{h}(\partial_y(\bar{u}h) + \partial_x(\bar{v}h)) \tag{2.53}$$

$$\bar{\tau}_{yy} = \frac{2\rho\overline{\nu_t}}{h}\partial_y(\bar{v}h) \tag{2.54}$$

Diese Art der Formulierung ist bei der Benutzung von konservativen Variablen $U = (h, \bar{u}h, \bar{v}h)^T$ einfacher in ein numerisches Verfahren zu implementieren. Sie ist jedoch nur für eine konstante Wassertiefe h mit den Gleichungen (2.52) - (2.54) identisch und sollte möglichst nicht angewendet werden.

Ein besonders einfaches und in der Praxis von Anwendern häufig benutztes Konzept zur Bestimmung der Turbulenz beruht auf der Annahme einer konstanten Wirbelviskosität ν_t im gesamten Strömungsfeld oder in weiter unterteilten Bereichen. Unter der Annahme einer gleichförmigen und stationären Strömung in einem ebenen Kanal und bei Vernachlässigung der y-Richtung vereinfacht sich Gleichung (2.15) zu

$$0 = -\partial_x p + \frac{1}{\rho}\partial_z\tau_{xz} \tag{2.55}$$

Bei einem wegen der hydrostatischen Druckannahme konstanten Druckgradienten über die Fließtiefe h ergibt sich für die Schubspannung $\tau_{xz}(z)$ ein linearer Verlauf (Abbildung 2.1) über die Fließtiefe mit einer maximalen Schubspannung $\tau_{xz,max}$ an der Gerinnesohle:

$$\frac{1}{\rho}\tau_{xz}(z) = \frac{1}{\rho}\tau_{xz,max}(1-\frac{z}{h}) = \nu_t(z)\partial_z u(z) \tag{2.56}$$

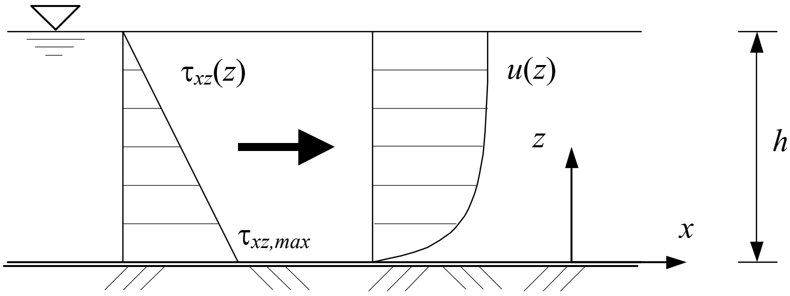

Abbildung 2.1: Schubspannung und Geschwindigkeit über die Fließtiefe

Unter Einführung der Grenzschubspannungsgeschwindigkeit u^* gemäß

$$u^* = \sqrt{\frac{1}{\rho}\tau_{xz,max}} \tag{2.57}$$

und einem logarithmischen Geschwindigkeitsprofil unter der Annahme einer turbulenten Strömung mit

$$\frac{u}{u^*} = \frac{1}{\kappa}\ln z + d \tag{2.58}$$

mit der Karmankonstante $\kappa = 0{,}4$ und einem Parameter d, kann die turbulente kinematische Viskosität im vertikalen Profil aus den Gleichungen (2.56) und (2.58) zu

$$\nu_t(z) = u^*\kappa\, z(1-\frac{z}{h}) \tag{2.59}$$

berechnet werden. Die Grenzschubspannungsgeschwindigkeit u^* kann in offenen Gerinnen mit Hilfe des Chezy-Koeffizienten C_z abgeschätzt werden zu

$$u^* = \frac{\sqrt{g(\overline{u}^2+\overline{v}^2)}}{C_z} \tag{2.60}$$

Durch eine Tiefenmittelung der turbulenten kinematischen Viskosität ergibt sich daraus eine Proportionalität der tiefengemittelten turbulenten kinematischen Viskosität $\overline{\nu}_t$ zum Produkt aus Wassertiefe h und der Grenzschubspannungsgeschwindigkeit u^* gemäß

$$\overline{\nu_t} = \frac{\kappa}{6} u^* h = 0{,}0667\, u^* h \tag{2.61}$$

Die getroffene Annahme bezüglich der turbulenten kinematischen Viskosität setzt eine Dominanz der durch die Gerinnesohle eingebrachte Turbulenz über die Effekte freier Grenzschichten voraus. Die in Experimenten gewonnenen Werte können durch die Berücksichtigung weiterer Turbulenzeffekte von der Formulierung gemäß Gleichung (2.61) abweichen. RASTOGI & RODI (1978) geben die Proportionalitätskonstante, basierend auf experimentellen Daten, mit 0,0765 an. Aus praktischen Anwendungen wird von erheblich höheren Werten berichtet. In einigen Fällen wird außerdem in einen Anteil der gemittelten Wirbelviskosität in Strömungsrichtung und einen Anteil transversal zur Strömung unterschieden.

2.3 Anwendungsbereiche

Die Flachwassergleichungen, sowohl in ihrer dreidimensionalen Form als auch in der zweidimensionalen tiefengemittelten Variante, stellen zu den nicht-hydrostatischen dreidimensionalen Navier-Stokes-Gleichungen eine erhebliche Vereinfachung dar und ermöglichen damit eine einfachere numerische Diskretisierung. So wurden schon sehr früh praktische Problemstellungen mit Hilfe dieser Gleichungen gelöst. Ein Berechnungsbeispiel für eine Anwendung am Ohio River auf der Basis eines Finite-Differenzen-Verfahrens präsentiert STOKER (1957). In den siebziger Jahren kamen wegen ihrer einfachen Anpassung auf komplizierte Berechnungsgeometrien zunehmend auch Verfahren auf Basis der FE-Methode in Gebrauch. Einen Überblick über erste zweidimensionale Modelle gibt GRAY (1980).

Die FWG stellen auch heute noch eines der wichtigsten Ingenieurswerkzeuge bei der Berechnung von Strömungen in offenen Gerinnen dar. Eine Bestimmung der Wasserspiegellage, die bei den meisten ingenieurtechnischen Fragestellungen von einem Hauptinteresse ist, kann auf dieser Basis mit einer hohen Genauigkeit durchgeführt werden. Es kann aufgrund der langjährigen Benutzung des Flachwasseransatzes auf eine Vielzahl von verifizierten Anwendungen zurückgegriffen werden, so dass die Methode im Bereich des Wasserbaus und der Wasserwirtschaft als Stand der Technik betrachtet werden kann.

Mit zunehmender Rechnerleistung und erheblichen Fortschritten bei der Modellierung der vollen dreidimensionalen Navier-Stokes-Gleichungen, angewandt auf offene Gerinne (LAI, 2000; JANOWSKI, 1999), scheinen die vorgenommen Vereinfachungen bei der Herleitung der Flachwassergleichungen für eine Reihe von wissenschaftlichen Anwendungsfällen nicht mehr angebracht oder notwendig zu sein. Dabei handelt es sich in erster Linie um Strömungen, die aufgrund der oben beschriebenen Einschränkungen der Flachwassertheorie nicht exakt genug von dieser beschrieben werden können.

Die aktuelle Forschung bezüglich der tiefengemittelten Flachwassergleichungen konzentriert sich daher auf stark konvektionsdominierte Problemstellungen wie Dammbruchwellen. Hier handelt es sich um Anwendungsfälle, in denen die Viskosität eine untergeordnete Rolle spielt und in der Regel vernachlässigt werden kann. Für Problemstellungen dieser Art gibt es trotz der oben genannten Fortschritte noch keine praktikablen Lösungsansätze auf Basis der NSG. Weiterhin wird der klassische Flachwasseransatz in Bezug auf nicht-konstante vertikale Geschwindigkeits- oder quadratische Druckprofile erweitert und für die Simulation von Strömungen in stark geneigten oder gekrümmten Gerinnen verwendet (z. B. bei Wehrüberfällen und Schussrinnen). Die ein- oder zweidimensionale auf die Horizontale projizierte Betrachtungsweise kann so beibehalten werden.

2.3.1 Damm- und Deichbruchberechnungen

Ein aktuelles wissenschaftliches und praktisches Einsatzgebiet der FWG ist die Simulation von Damm- und Deichbrüchen. Basierend auf den eindimensionalen FWG, auch als die St.-Venant-Gleichungen bezeichnet, wurden schon sehr früh analytische Lösungen für einfache Testprobleme abgeleitet. Das klassische eindimensionale Dammbruchproblem besteht aus einer Anfangsbedingung mit verschiedenen Wasserständen im Ober- und Unterwasser eines infinitesimal dicken Dammes, der zu einem Zeitpunkt $t = 0$ schlagartig entfernt wird. RITTER (1892) gibt die analytische Lösung für eine horizontale Sohle ohne Reibung bei trockenem Unterwasser an. STOKER (1957) erweitert diese Lösung auf beliebige Unterwasserstände. DRESSLER (1952) stellt eine Näherungslösung für die Ritterlösung mit Reibung auf. Die Lösungen von Ritter und Stoker sind einige der wenigen nicht-trivialen analytischen Lösungen für die Flachwassergleichungen mit Diskontinuitäten und werden im Rahmen dieser Arbeit zur Verifizierung des entwickelten numerischen Verfahrens benutzt.

Die Untersuchung von Dammbruchwellen wird nach dem aktuellen Stand der Wissenschaft entweder mit Hilfe physikalischer Modelle oder mit ein- und zweidimensionalen numerischen Modellen auf Grundlage der Flachwassertheorie durchgeführt. Nicht-hydrostatische, auf den NSG beruhende Modelle, werden zur Zeit nur für stark idealisierte, nicht jedoch für praktische Untersuchungen verwendet. Zur Verifizierung der hydrostatischen Druckannahme, besonders in der Initialphase des Bruchs, wurden eine Reihe von experimentellen Untersuchungen (STANSBY et al., 1998) und numerischen Simulationen mit zweidimensional lateral arbeitenden Modellen durchgeführt (FERZINGER & PERIC, 1999; MOHAPATRA et al., 1999; ZWART et al., 1999; HSU et al., 2001). Im Rahmen der europäischen CADAM-Initiative (Concerted Action on Dambreak Modelling) sind weiterhin eine Vielzahl von Daten aus physikalischen Modellversuchen und Naturdaten zusammengetragen worden und haben zur Verifizierung und Validierung von Software zur Simulation von Dammbruchmodellen gedient (CADAM, 2000). Sämtliche eingesetzte numerische Modelle basieren auf den ein- und zweidimensionalen FWG. Eine Einführung in die Dammbruchsimulation und eine Diskussion von Modellierungssoftware finden sich weiterhin in ALMEIDA & FRANCO (1994).

Bei der Simulation von Dammbruchwellen sind neben den Fehlern aufgrund der Vereinfachungen der Flachwassertheorie eine Reihe weiterer möglicher Fehlerquellen vorhanden. Diese umfassen den eigentlichen Bruchprozess der Talsperre, die mit den hohen Fließgeschwindigkeiten verbundenen hohen Sedimentfrachten in der Welle, den Lufteintrag in das Wasser und weitere Faktoren (CADAM, 2000). Es sei darauf hingewiesen, dass zur Zeit aufgrund von fehlender Alternativen vor allem empirische Gesetzmäßigkeiten auf extrem instationäre Dammbruchwellen angewendet werden, die eigentlich für stationäre oder quasi-stationäre Strömungsverhältnisse hergeleitet wurden. Als Beispiel sei das Reibungsgesetz nach Manning-Strickler genannt. Eine Verifizierung dieser Ansätze auf Dammbruchwellen gestaltet sich wegen fehlender Naturdaten als extrem schwierig. Die Forschung auf diesem Gebiet kann demnach weder bezüglich der Anwendung des Flachwasseransatzes, noch im Hinblick auf die Verwendung dreidimensionaler Modelle als abgeschlossen betrachtet werden.

2.3.2 Gerinne mit überkritischem Abfluss

Ein weiteres Anwendungsfeld der FWG ist die Simulation von Strömungen in technischen Bauwerken wie Gerinnen und Schussrinnen mit überkritischem Abfluss, freien Überfällen und Strukturen mit hydraulischen Wechselsprüngen wie Tosbecken. Sind ebene, horizontale Schussrinnen noch konform mit der Annahme eines hydrostatischen Wasserdrucks, wird diese Annahme bei stärkeren Sohlneigungen und Sohlneigungsänderungen mehr und mehr verletzt. Eine Lösung für dieses Problem ist die Herleitung von erweiterten Formen der FWG unter Berücksichtigung nicht-hydrostatischer Effekte und vertikal variierenden Geschwindigkeitsverteilungen. Erste Überlegungen zur

Modifizierung des Druckterms in den FWG finden sich z. B. in CHOW (1959). Eine neuere Herleitung und ihre numerische Umsetzung wurde von BERGER & CAREY (1998a, 1998b) untersucht. Eine Reihe von Veröffentlichungen über eine Erweiterung der FWG auf parabolische Druck- und lineare Geschwindigkeitsprofile findet sich in STEFFLER & JIN (1993) oder KHAN & STEFFLER (1996a). Die Anwendung eines modifizierten Flachwassermodells auf Schussrinnen wird von NÄF (1997), KRÜGER et al. (1998) oder KRÜGER & RUTSCHMANN (2000) beschrieben.

2.4 Analogie der tiefengemittelten Flachwassergleichungen und der Euler-Gleichungen für kompressible Fluide

Die tiefengemittelten Flachwassergleichungen weisen eine starke Analogie zu den ein- und zweidimensionalen Euler-Gleichungen für kompressible Fluide auf. Diese in der Gasdynamik oft als „hydraulic analogy" oder „Wasseranalogie", in der Hydraulik als „compressible flow analogy" bezeichnete Ähnlichkeit der physikalischen Phänomene und die Analogie ihrer Gleichungen wurden erstmals von JOUGUET (1920) erkannt und von RIABOUCHINSKY (1932), VON KÁRMAN (1938) und PREISWERK (1938) näher untersucht und beschrieben (SAUER, 1960). Erste Anwendungen dieser Analogie auf Probleme der Flachwasserströmung finden sich z. B. in PREISWERK (1938). Verschiedene Beispiele werden in STOKER (1959) vorgestellt. In der Vergangenheit war eine Hauptanwendung dieser Analogie die wesentlich einfachere und kostengünstigere Durchführung hydraulischer Experimente gegenüber Experimenten in Überschallströmung.

Die Euler-Gleichungen in ihrer eindimensionalen Version lauten:

Kontinuitätsgleichung:

$$\partial_t \rho + \partial_x (\rho\, u) = 0 \tag{2.62}$$

Impulsgleichung:

$$\partial_t (\rho\, u) + \partial_x (\rho\, u^2 + p) = 0 \tag{2.63}$$

Energiegleichung:

$$\partial_t (\rho\, e) + \partial_x (u(\rho\, e + p)) = 0 \tag{2.64}$$

mit der spezifischen Energie e. Unter der Annahme einer reibungsfreien, isentropischen Gasströmung kann die Zustandsgleichung für den Druck p ausgedrückt werden gemäß

$$p = K\rho^{\gamma} \tag{2.65}$$

mit dem Verhältnis der spezifischen Wärmen γ, das wegen der Form der Gleichung (2.65) auch Adiabatenexponent genannt wird, und der Proportionalitätskonstanten K, die für einen gegebenen Anfangszustand p_0, ρ_0 aus Gleichung (2.65) berechnet wird. Mit der Wahl von $\gamma = 2$ und Einsetzen von Gleichung (2.65) in die Gleichungen (2.62) und (2.63) werden diese bei Vernachlässigung der diffusiven Terme und der Quellterme (LIGGET, 1975) identisch mit den Flachwassergleichungen (2.39) - (2.41). Dabei entspricht die Dichte ρ der Wassertiefe h, die Konstante K der halben Erdbeschleunigung g. Es ergeben sich folgende analoge Größen gemäß Tabelle 2.1.

Tabelle 2.1: Analoge Größen der Euler- und Flachwassergleichungen

Euler-Gleichungen, $\gamma = 2$		Flachwassergleichungen	
Schall-geschwindigkeit	$a = \sqrt{\frac{\gamma\, p}{\rho}}$	$c = \sqrt{gh}$	Wellen-geschwindigkeit
Machzahl	$M = u/a$	$Fr = u/c$	Froudezahl
Dichtequotient	ρ/ρ_0	h/h_0	Tiefenquotient
Druckquotient	p/p_0	h^2/h_0^2	Quadrat des Tiefenquotienten
Temperaturquotient	T/T_0	h/h_0	Tiefenquotient

Einige Faktoren schränken die Anwendung dieser Analogie ein. So ist der Adiabatenexponent γ in Gasen zwar größer als 1, übertrifft aber nicht den Wert 5/3, der für einatomige Gase gilt. Für Luft ist $\gamma = 1{,}4$. Dagegen wird in der Analogie ein höherer Wert von $\gamma = 2$ angesetzt. Weiterhin können mit der Analogie nur Strömungen untersucht werden, die sowohl mit den Euler-Gleichungen als auch mit den FWG als ihrem mathematischen Modell korrekt beschrieben werden. Es können keine Experimente an Phänomenen durchgeführt werden, die nicht mit der Theorie und den damit verbundenen Annahmen dieser Gleichungen übereinstimmen. Dies ist jedoch das eigentliche Ziel der meisten Experimente. Die Analogie wird deshalb nur noch selten für die Untersuchung kompressibler Gasströmung genutzt; eine Ausnahme findet sich in FELLING et al. (1998). Die Autoren benutzen die Analogie zur Untersuchung instationärer Effekte, die in der Flachwasserströmung erheblich langsamer ablaufen als in Gasen und damit messtechnisch einfacher zu erfassen sind.

Der große Vorteil für die mathematische Analyse und die numerische Lösung der FWG ergibt sich allerdings aus der Übertragung von Forschungsergebnissen aus der Gasdynamik. Dieser Trend spiegelt sich im letzten Jahrzehnt besonders deutlich in der Adaptierung von ursprünglich für die Euler-Gleichungen entwickelten modernen Finite-Differenzen- und Finite-Volumen-Verfahren auf Probleme der Flachwasserströmung wieder (z. B. in MOREL & FEY, 1994). Auf diesen Umstand wird in Kapitel 4 noch näher bei der Vorstellung numerischer Verfahren eingegangen.

3 Physikalische und mathematische Eigenschaften der tiefengemittelten Flachwassergleichungen

Wurden im vorherigen Kapitel die tiefengemittelten Flachwassergleichungen (FWG) aus den dreidimensionalen Navier-Stokes-Gleichungen hergeleitet und die damit verbundenen Vereinfachungen und Annahmen untersucht, wird im folgenden Kapitel näher auf ihre physikalischen und mathematischen Eigenschaften eingegangen. Ihr Verständnis ist für die Beurteilung der zu ihrer Lösung eingesetzten numerischen Verfahren von einer zentralen Bedeutung und spiegelt sich in diesen in vieler Hinsicht wieder.

3.1 Reynoldszahl

Die Strömung in offenen Gerinnen basiert hauptsächlich auf den Auswirkungen von Viskosität und Schwerkraft auf die Trägheitskräfte der Strömung. Weitere Kräfte wie z. B. die Oberflächenspannung können bei Ingenieuranwendungen in offenen Gerinnen in der Regel vernachlässigt werden.

Abhängig von den viskosen Kräften relativ zur Massenträgheit kann sich eine Strömung in einem laminaren, turbulenten oder in einem Übergangszustand befinden (Abbildung 3.1). Eine Strömung ist laminar, wenn die viskosen Kräfte relativ zur Massenträgheit groß sind. Die Wasserpartikel bewegen sich in definierten glatten Pfaden oder Stromlinien, die sich nicht gegenseitig schneiden. Im Gegensatz dazu sind bei turbulenter Strömung die viskosen Kräfte schwach im Vergleich zur Massenträgheit. Die Wasserpartikel bewegen sich auf unregelmäßigen, nicht-glatten Bahnen, die sich in der Summe jedoch auch nach der Bewegung der gesamten Strömung richten.

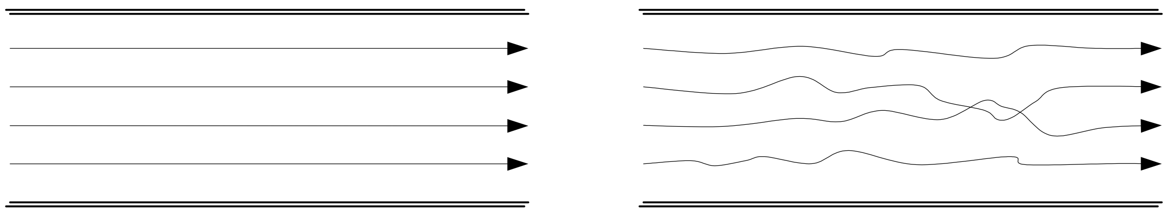

Abbildung 3.1: Laminare (links) und turbulente Strömung (rechts)

Das Verhältnis von Massenträgheit zu Viskosität kann durch eine dimensionslose Kennzahl, die Reynoldszahl Re , quantifiziert werden. Sie ist definiert durch

$$Re = \frac{uL}{\nu} \tag{3.1}$$

mit der Geschwindigkeit der Strömung u, einer charakteristischen Länge L und der kinematischen Scherviskosität ν ($= 1{,}01 \cdot 10^{-6}$ $m^2 s^{-1}$ bei einer Temperatur von 20°C). In offenen Gerinnen wird die charakteristische Länge durch den hydraulischen Radius r_{hy} gegeben. Bei entsprechend breiten Gerinnen strebt dieser Wert gegen die Wassertiefe h.

Auf Basis von experimentellen Daten nach CHOW (1959) bewegt sich der Übergangsbereich von laminarer zu turbulenter Strömung im Bereich von $500 < Re < 2000$. BOLLRICH (1996) gibt die untere Grenze des Übergangsbereichs, abgeleitet aus Versuchen mit Druckströmung, mit $Re = 580$ an. Die im Rahmen der Turbulenzmodellierung in Kapitel 2 getroffenen Annahmen über eine turbulente Strömung im Gerinne sind demnach gültig für eine Strömung mit einer Reynoldszahl

$$Re = \frac{uh}{\nu} > 2000 \tag{3.2}$$

Für den breitenbezogenen Durchfluss q ergibt dies umgeformt $q = uh > 0{,}002$ m^2/s. Eine Bedingung, die für alle im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Strömungen um Größenordnungen überschritten wird. Die Strömungen sind demnach alle turbulent.

3.2 Froudezahl und Eigenwerte

Der Quotient von Massenträgheit zu Schwerkraft kann in der dimensionslosen Froudezahl Fr repräsentiert werden. Diese Zahl ist definiert durch

$$Fr = \frac{u}{\sqrt{gL}} \tag{3.3}$$

mit der Erdbeschleunigung g. Bei Strömung in offenen Gerinnen wird die charakteristische Länge L gleich der Fließtiefe h gesetzt. Die Froudezahl ist damit definiert durch

$$Fr = \frac{u}{\sqrt{gh}} \tag{3.4}$$

Eine weitere Untersuchung der Froudezahl und ihres zentralen Stellenwertes für eine spätere numerische Lösung der FWG kann durch die folgende nähere mathematische

Analyse der Gleichungen erfolgen. Die FWG (2.39 - 2.41) werden dazu in eine allgemeinere vektorisierte Formulierung überführt, die in dieser Form allgemein für jedes beliebige System von Erhaltungsgleichungen gilt. Die FWG lauten bei Vernachlässigung der viskosen Terme

$$\partial_t U + \partial_x F(U) + \partial_y G(U) = S(U) \tag{3.5}$$

Der Matrix-Vektor U enthält die Erhaltungsgrößen Masse und Impuls, F und G stellen die Massen- und Impulsflüsse in x- und y-Richtung dar. S repräsentiert den Vektor der Quellterme. Für die FWG lauten die auftretenden Matrix-Vektoren bei Vernachlässigung der diffusiven Terme

$$U = \begin{pmatrix} h \\ uh \\ vh \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

$$F(U) = \begin{pmatrix} uh \\ u^2 h + \frac{1}{2} g h^2 \\ uvh \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad G(U) = \begin{pmatrix} vh \\ uvh \\ v^2 h + \frac{1}{2} g h^2 \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

$$S(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ gh(S_{x,z} - S_{x,f}) \\ gh(S_{y,z} - S_{y,f}) \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

Das Gleichungssystem (3.5) stellt die sogenannte konservative Form der Gleichungen dar. Die Ausführung der Flussdifferentationen führt auf ein System sogenannter quasilinearer Differenzialgleichungen erster Ordnung (Gleichung (3.9)), weil darin die höchsten Ableitungen der Unbekannten erster Ordnung sind und nur linear auftreten.

$$\partial_t U + A(U)\partial_x U + B(U)\partial_y U = S(U) \tag{3.9}$$

mit den Jacobimatrizen A und B, definiert durch

$$A(U) = \partial_U F(U) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -u^2 + gh & 2u & 0 \\ -uv & v & u \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

$$B(U) = \partial_U G(U) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -uv & v & u \\ -u^2 + gh & 0 & 2v \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

Die Eigenwerte dieser Matrizen lauten

$$\begin{aligned} \lambda_{A1} &= u - \sqrt{gh} & & \lambda_{B1} = v - \sqrt{gh} \\ \lambda_{A2} &= u & \text{und} \quad & \lambda_{B2} = v \\ \lambda_{A3} &= u + \sqrt{gh} & & \lambda_{B3} = v + \sqrt{gh} \end{aligned} \tag{3.12}$$

Die korrespondierenden Matrizen der Eigenvektoren sind

$$K_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ u - \sqrt{gh} & 0 & u + \sqrt{gh} \\ v & \sqrt{gh} & v \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

$$K_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ u & -\sqrt{gh} & u \\ v - \sqrt{gh} & 0 & v + \sqrt{gh} \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

Mit Hilfe der Matrizen der Eigenvektoren K und der Diagonalmatrix Λ der Eigenwerte können die Jacobimatrizen dargestellt werden als

$$A = K_A \Lambda_A K_A^{-1} \tag{3.15}$$

$$B = K_B \Lambda_B K_B^{-1} \tag{3.16}$$

mit

$$\Lambda_A = diag\{\lambda_{Ai}\} \quad \text{und} \quad \Lambda_B = diag\{\lambda_{Bi}\} \qquad i = 1,2,3 \tag{3.17}$$

Eine wesentliche Bedeutung werden die Gleichungen (3.15) und (3.16) später im numerischen Verfahren (z. B. in der Limiterfunktion, Kapitel 5.7) haben. So kann unter Benutzung der Eigenvektormatrizen das gekoppelte Gleichungssystem durch eine Transformation in den charakteristischen Raum entlang seiner Charakteristiken C in ungekoppelte Gleichungen umgeformt werden. Es werden so numerische Methoden anwendbar, die ursprünglich für skalare Erhaltungsgleichungen entwickelt wurden. Da mit $h \geq 0$ alle Eigenwerte (3.12) der Jacobimatrizen (3.13) und (3.14) reell sind, ist das Gleichungssystem hyperbolisch. Die Charakteristiken C geben den Weg der endlich schnellen Informationsausbreitung an. Sie lauten für die zweidimensionalen Flachwassergleichungen

$$C_-: \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u - \sqrt{gh} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v - \sqrt{gh} \tag{3.18}$$

$$C_0: \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v \tag{3.19}$$

$$C_+: \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u + \sqrt{gh} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v + \sqrt{gh} \tag{3.20}$$

Da die Größen Geschwindigkeit und Wassertiefe bei nichttrivialen Problemen in Raum und Zeit variieren, sind die Charakteristiken gekrümmt. Definiert man in einer Raumdimension einen Punkt P mit den Koordinaten (x_0, t_0), grenzen die Charakteristiken nach Abbildung 3.2 den Einflussbereich einer Störung in P für die Zeit $t > t_0$ ein. Außerhalb der Charakteristiken bleibt die Strömung von der Störung unbeeinflusst. Für $t < t_0$ kann auf diese Weise ein Bestimmtheitsbereich für P festgelegt werden, von dem der Zustand in P abhängig ist.

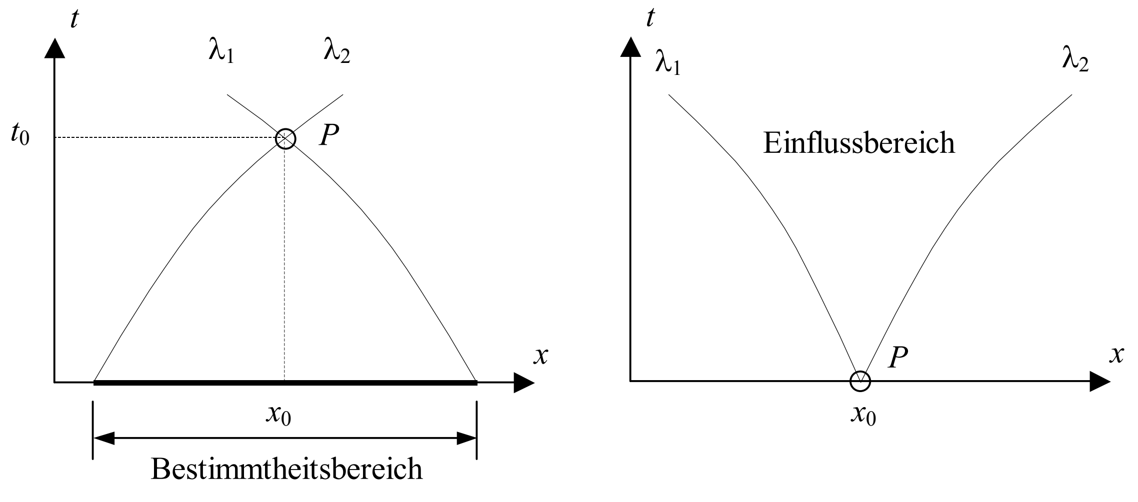

Abbildung 3.2: Bestimmtheitsbereich (links) und Einflussbereich (rechts)

Unter der Annahme konstanter Größen für Geschwindigkeit und Wassertiefe in zwei Raumdimensionen und Projektion der Charakteristiken in die x-y-Ebene lassen sich in Abbildung 3.3 die unterschiedlichen Fließzustände Strömen und Schießen, bzw. unter- und überkritischer Abfluss, unterscheiden.

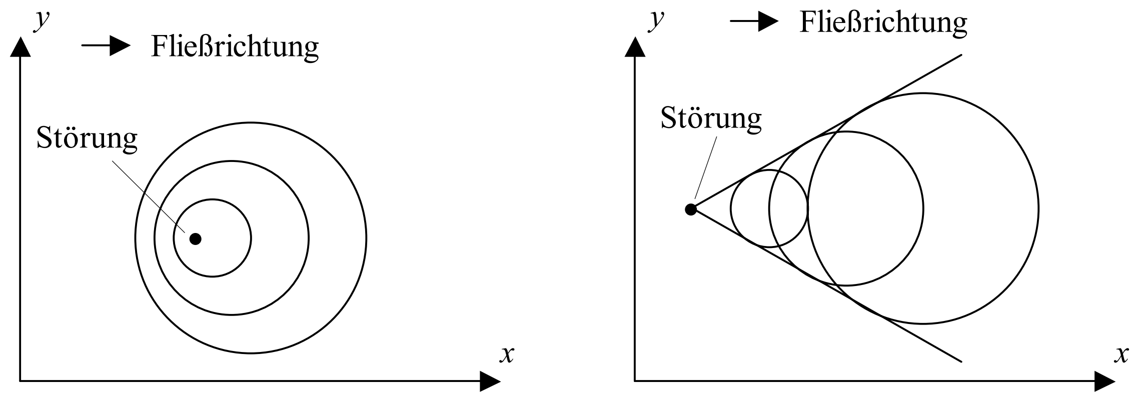

Abbildung 3.3: Projektion der Charakteristiken auf die horizontale Ebene, a) unterkritischer Abfluss, b) überkritischer Abfluss

Bei unterkritischer Strömung bzw. Strömen breitet sich eine Störung in alle Richtungen aus, die Eigenwerte haben unterschiedliche Vorzeichen und die Froudezahl ist kleiner als eins. Bei überkritischer Strömung bzw. Schießen pflanzen sich Störungen nur gerichtet fort. Alle Eigenwerte haben das gleiche Vorzeichen und die Froudezahl ist größer als eins.

3.2.1 Rotationsinvarianz der Impulsgleichungen

Eine weitere, für numerische Verfahren nützliche Eigenschaft der FWG ist die Rotationsinvarianz ihrer Impulsgleichungen. Dies gilt besonders bei der Berechnung von numerischen Flüssen über Ränder mit nicht kartesischen Richtungen.

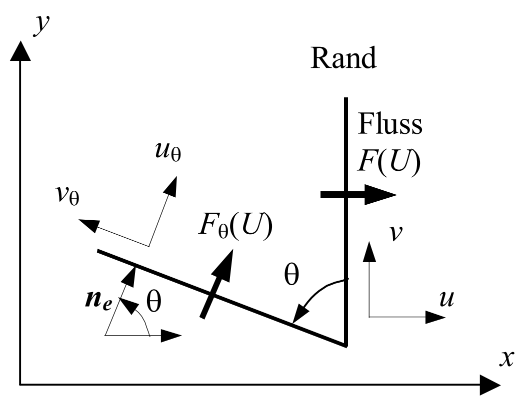

Abbildung 3.4: Rotationsinvarianz der tiefengemittelten Flachwassergleichungen

Zuerst sei in diesem Zusammenhang der senkrecht auf dem Rand stehende normierte Normalenvektor

$$n_e = (n_{e,x}, n_{e,y})^T = (\cos\theta, \sin\theta)^T \tag{3.21}$$

definiert (Abbildung 3.4). θ ist der Winkel zwischen der x-Achse und dem Normalenvektor im Gegenuhrzeigersinn. Analog mit den Euler-Gleichungen (TORO, 1999) genügen die FWG (3.5) der Rotationsinvarianz, definiert durch

$$Fn_{e,x} + Gn_{e,y} = T^{-1} F_\theta \tag{3.22}$$

mit

$$F_\theta = F(T(\theta)U) \tag{3.23}$$

Die Rotationsmatrix T und ihre Inverse T^{-1} sind gegeben durch

$$T(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad T^{-1}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

Die Eigenwerte einer beliebigen Koordinatenrichtung, hergeleitet aus Gleichung (3.23), lauten damit

$$\begin{aligned} \lambda_{\theta 1} &= n_{e,x}u + n_{e,y}v - \sqrt{gh} \\ \lambda_{\theta 2} &= n_{e,x}u + n_{e,y}v \\ \lambda_{\theta 3} &= n_{e,x}u + n_{e,y}v + \sqrt{gh} \end{aligned} \tag{3.25}$$

3.3 Schwache Lösungen

Bei der Betrachtung von ausschließlich unterkritischer Strömung sind die Lösungen der FWG glatt, d. h. stetig, differenzierbar und enthalten keine Diskontinuitäten. Die numerischen Näherungslösungen können aus diesem Grunde auf der bisher eingeführten Divergenzform der Erhaltungsgleichung basieren. Diese sei für ein eindimensionales homogenes System ohne die Berücksichtigung der viskosen Terme analog zu den Gleichungen (3.5) hier noch einmal in Vektorform zusammengefasst zu

$$\partial_t U + \partial_x F(U) = 0 \tag{3.26}$$

Durch die Erweiterung des Spektrums der zu untersuchenden Strömungen auf transkritische und überkritische Abflussbereiche, können die Lösungen der FWG Diskontinuitäten in Form von Wechselsprüngen und Stoßfronten enthalten. Diese Lösungen sind an den Diskontinuitäten weder stetig noch differenzierbar. Sie können aus diesem Grund keine Lösungen von Gleichung (3.26) sein.

Neben der Divergenzform kann eine Erhaltungsgleichung auch in ihrer Integralform formuliert werden. Diese Art der Formulierung stellt geringere mathematische Anforderungen an ihre Lösung und erlaubt Diskontinuitäten.

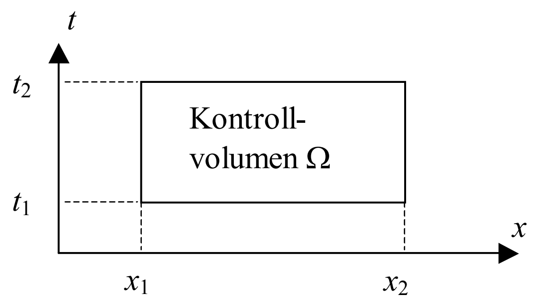

Abbildung 3.5: Rechteckiges Kontrollvolumen einer eindimensionalen Erhaltungsgleichung

Die Integralform einer eindimensionalen Erhaltungsgleichung kann gemäß CUNGE et al. (1980) für ein rechteckiges Kontrollvolumen $\Omega = [x_1, x_2] \times [t_1, t_2]$ (siehe Abbildung 3.5) definiert werden durch

$$\int_{x1}^{x2} \int_{t1}^{t2} \partial_t U + \partial_x F(U)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = 0 \tag{3.27}$$

Ausgehend von Gleichung (3.27) lässt sich durch einige einfache Umformungen

$$\int_{x1}^{x2} \int_{t1}^{t2} \partial_t U \,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x + \int_{t1}^{t2} \int_{x1}^{x2} \partial_x F(U)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 0 \tag{3.28}$$

$$\int_{x1}^{x2} U(x,t)\,|_{t1}^{t2}\,\mathrm{d}x + \int_{t1}^{t2} F(U(x,t))\,|_{x1}^{x2}\,\mathrm{d}t = 0 \tag{3.29}$$

eine weitere Integralform am Kontrollvolumen herleiten:

$$\int_{x1}^{x2} U(x,t_2)\,\mathrm{d}x = \int_{x1}^{x2} U(x,t_1)\,\mathrm{d}x + \int_{t1}^{t2} F(U(x_1,t))\,\mathrm{d}t - \int_{t1}^{t2} F(U(x_2,t))\,\mathrm{d}t \tag{3.30}$$

Offensichtlich stellt Gleichung (3.30) keine Anforderungen mehr an die Differenzierbarkeit und die Stetigkeit einer möglichen Lösung. Die Lösung muss nur noch integrierbar sein. Sie wird auch als eine schwache Lösung der Erhaltungsgleichung bezeichnet. Sie enthält als Teilmenge die Lösungen der Divergenzform und erlaubt zusätzlich diskontinuierliche Lösungen. Die Integralform (3.30) ist eine besonders anschauliche Formulierung und Grundlage einer Reihe von numerischen Verfahren auf Basis der Finite-Volumen-Methode. Auf dieses Verfahren wird in Kapitel 4 näher eingegangen.

Eine Reihe weiterer Integralformen für Erhaltungsgleichungen findet sich in TORO (1999). Mit höherem mathematischen Aufwand kann eine allgemeine schwache Lösung für beliebige Kontrollvolumina hergeleitet werden (SMOLLER ,1994; CHORIN & MARSDEN ,1993). Diese Integralform lautet

$$\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[\partial_t\phi\, U + \partial_t\phi\, F(U)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{\infty}\phi\,(x,0)U(x,0)\,\mathrm{d}x = 0 \tag{3.31}$$

mit der stetig differenzierbaren Testfunktion $\phi(x,t)$, die in einem kompakten Gebiet um den Koordinatenursprung beschränkt ist.

3.4 Sprungbedingung an Diskontinuitäten

Aus Gleichung (3.31) lässt sich nach einigen mathematischen Umformungen eine Bedingung für die Geschwindigkeit einer Diskontinuität bzw. Stoßfront ableiten (SMOLLER, 1994).

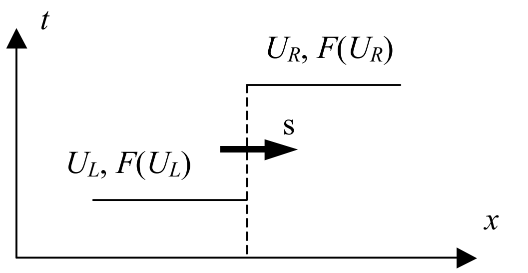

Abbildung 3.6: Sprungbedingung an einer Diskontinuität bzw. Stoßfront

Die Bedingung bezeichnet man als Sprungbedingung (Abbildung 3.6) oder in Anlehnung an die theoretische Gasdynamik als Rankine-Hugoniot Bedingung. Sie ist definiert durch

$$s[U] = [F(U)] \tag{3.32}$$

mit der Geschwindigkeit der Diskontinuität s, $[U] = U_L - U_R$ und $[F(U)] = F(U_L) - F(U_R)$. Der Index L bezeichnet die linke, der Index R die rechte Seite der Diskontinuität. Bei einer stationären Diskontinuität mit $s = 0$ lässt sich aus Gleichung (3.32) das Massen- und Impulsgleichgewicht an der Stoßfront herleiten:

$$F(U_L) = F(U_R) \tag{3.33}$$

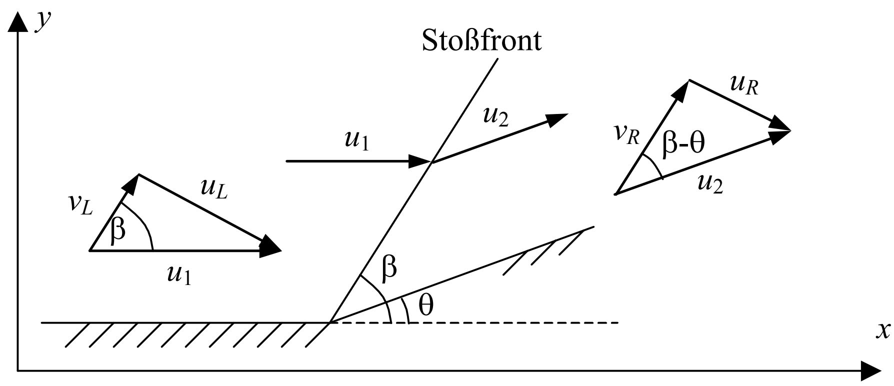

Abbildung 3.7 Schräger Stoß

Die Geschwindigkeitskomponenten beziehen sich auf die Schnittebene entlang der Diskontinuität, wobei u gemäß Abbildung 3.7 senkrecht und v parallel zur Diskontinuität definiert sind. Bei einer positiven Wandänderung θ und dem Winkel der Stoßfront β ergibt sich für den sogenannten anliegenden schrägen Verdichtungsstoß der folgende Zusammenhang

$$\begin{pmatrix} u_L \\ v_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \sin\beta \\ u_1 \cos\beta \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} u_R \\ v_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \sin(\beta - \theta) \\ u_2 \cos(\beta - \theta) \end{pmatrix} \tag{3.34}$$

der Geschwindigkeitenkomponenten u und v zu u_1 und u_2. Bei überkritischem Abfluss mit einer Froudezahl in Normalenrichtung zur Schockfront von $Fr_n > 1$ und gegebenen Werten für die Wassertiefe h_L, die Geschwindigkeit u_1 und den Winkel der Wandänderung θ können mit Hilfe der Gleichungen (3.33) und (3.34) die unbekannten Größen h_R, u_2 und β bestimmt werden.

Ab einem von der Froudezahl abhängigen Winkel θ_{max} entspringt die Stoßfront nicht mehr an der Richtungsänderung der Wand, sondern an einem weiter in der negativen x-Richtung liegenden Punkt. Man spricht von einem abgelösten Stoß. Beim abgelösten Stoß oder dem Auftreffen und der Reflektion einer instationären Schwallwelle an einer positiven Wandänderung treten erheblich kompliziertere Stoßstrukturen auf, die in

Analogie zur Gasströmung z. B. einer Machschen Reflexion entsprechen. Eine Diskussion dieser Phänomene in Anwendung auf Tsumanis findet sich in TORO (2001).

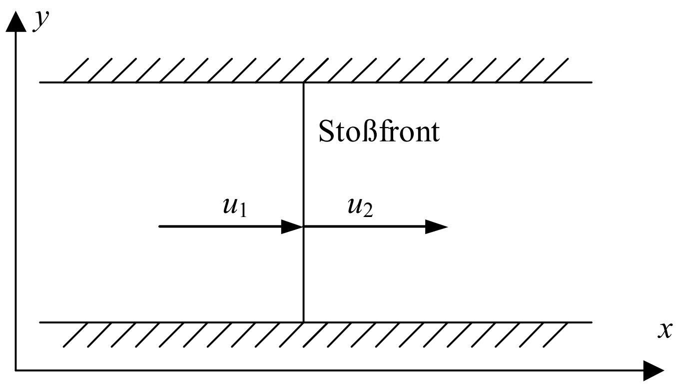

Abbildung 3.8 Senkrechter Stoß

Der sogenannte senkrechte Stoß (Abbildung 3.8) stellt einen Sonderfall der Gleichungen (3.32) und (3.33) für $\theta = 0$ und $\beta = 90°$ dar. Der senkrechte und der schräge Stoß werden in den Kapiteln 6 und 7 zur Verifizierung des numerischen Verfahrens und zur Validierung der FWG für die Berechnung überkritischer Strömung dienen.

Sowohl die oben vorgestellte Sprungbedingung, als auch die weiter unten in Kapitel 3.7 beschriebene Entropiebedingung schränken die zur Verfügung stehenden diskontinuierlichen Lösungen der Erhaltungsgleichung ein und führen zu mathematisch und physikalisch eindeutigen Lösungen der FWG. Sie sind beide bei der Erstellung eines numerischen Verfahrens zu berücksichtigen, wenn dieses zur Berechnung von transkritischer Flachwasserströmung verwendet werden soll.

3.5 Vergleich zwischen konservativer und nicht-konservativer Formulierung

Die konservative (Gleichungen (2.39) - (2.41)) und die nicht-konservative Formulierung (Gleichungen (2.46) - (2.48)) der FWG liefern für glatte, d. h. stetige und differenzierbare Lösungen, identische Ergebnisse. Anders verhält es sich bei Lösungen, die Diskontinuitäten enthalten. So kann nach SMOLLER (1994) die gleiche Differentialgleichung, geschrieben in unterschiedlichen Divergenzformen, verschiedene Mengen schwacher Lösungen haben. Zur Verdeutlichung sei ein kurzes Beispiel für die Burgers-Gleichung[3] nach SMOLLER (1994) angegeben:

Stetige und differenzierbare Lösungen u der Gleichung $\partial_t u + u\partial_x u = 0$ sind gleichzeitig Lösungen der folgenden Gleichungen:

$$\partial_t u + \partial_x (\frac{1}{2} u^2) = 0 \tag{3.35}$$

und

$$\partial_t (\frac{1}{2} u^2) + \partial_x (\frac{1}{3} u^3) = 0 \tag{3.36}$$

Dies ist für diskontinuierliche Lösungen nicht der Fall. Die erste Gleichung (3.35) genügt der Sprungbedingung $s(u_L - u_R) = (u_L^2 - u_R^2)/2$ oder $s = (u_L + u_R)/2$. Die Anwendung dieser Bedingung auf die zweite Gleichung (3.36) ergibt $s = 2(u_L^2 + u_L u_R + u_R^2)/3(u_L + u_R)$. Sind offensichtlich die Stoßgeschwindigkeiten unterschiedlich, verhält es sich genauso mit den diskontinuierlichen Lösungen. Analoge Beispiele für die FWG finden sich in ABBOT (1979) und CUNGE et al. (1980).

Eine Benutzung der nicht-konservativen Gleichungen (2.46) - (2.48) bei dem Vorhandensein von Diskontinuitäten wie Wechselsprüngen in der Lösung führt, physikalisch interpretiert, zwar zu einer Erhaltung der Masse im System, verletzt aber die Impulserhaltung. Diese Gleichungen sollten deshalb im Rahmen der Behandlung von transkritischen und überkritischen Strömungen nicht verwendet werden. Einen möglichen Lösungsweg zur Umgehung dieser Problematik und der Einführung eines Korrekturterms für die nicht-konservativen Gleichungen beschreibt ARNOLD (1996).

3.6 Reversibilität

Eine weitere interessante Aussage über diskontinuierliche Lösungen kann bezüglich ihrer Reversibilität gemacht werden. Glatte Lösungen homogener, hyperbolischer Differentialgleichungen (z. B. die FWG ohne Berücksichtigung viskoser Effekte und Quellterme) sind generell reversibel in der Zeit. Ist die Lösung zu einem bestimmten Zeitpunkt bekannt, kann die Lösung sowohl in der Vergangenheit als auch in der Zukunft bestimmt werden. Treten Diskontinuitäten in der Lösung auf, impliziert dies

[3] Die Burgers-Gleichung ist eine der einfachsten nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen. Sie wird häufig zur Verdeutlichung von Eigenschaften komplizierterer Differentialgleichungen wie den FWG oder den Navier-Stokes Gleichungen benutzt, die ähnliche nichtlineare advektive Terme besitzen.

jedoch einen hohen Grad von Irreversibilität. Eine Lösung kann nur in der Zukunft bestimmt werden. Eine Lösung in der Vergangenheit ist nicht eindeutig. Zur Verdeutlichung sei wieder ein kurzes Beispiel für die Burgers-Gleichung nach SMOLLER (1994) gegeben:

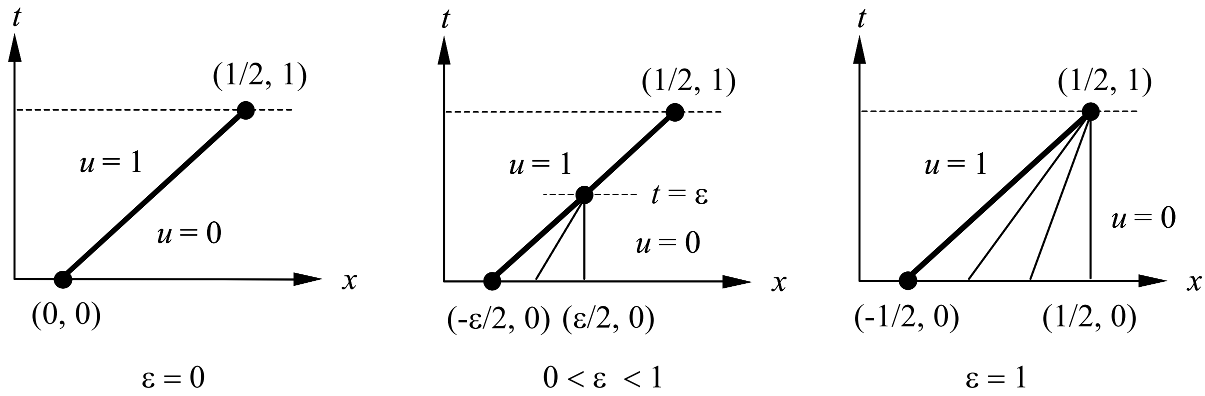

Abbildung 3.9: Die Entstehung einer Stoßfront in einer Lösung der Burgers-Gleichung

Für $0 \leq \varepsilon \leq 1$ sei $u_\varepsilon(t,x)$ (Abbildung 3.9) Lösung der Gleichung

$$\partial_t u + \partial_x (\frac{1}{2} u^2) = 0 \tag{3.37}$$

Für $t \leq \varepsilon$ sei $u_\varepsilon(t,x)$ gegeben durch

$$u_\varepsilon(t,x) = \begin{cases} 1 & x < t - \varepsilon/2 \\ \dfrac{x - \varepsilon/2}{1-\varepsilon}, & t - \varepsilon/2 < x < \varepsilon/2 \\ 0 & x > \varepsilon/2 \end{cases} \tag{3.38}$$

für $t > \varepsilon$ gegeben durch

$$u_\varepsilon(t,x) = \begin{cases} 1 & x < t/2 \\ 0, & x > t/2 \end{cases} \tag{3.39}$$

Alle $u_\varepsilon(t,x)$ erfüllen sowohl die Gleichung (3.37), als auch die Sprungbedingung (3.32). Sie alle sind damit mathematisch und physikalisch korrekte Lösungen. Alle Lösungen führen zum Zeitpunkt $t = 1$ auf

$$u_\varepsilon(1,x) = \begin{cases} 1 & x < 1/2 \\ 0, & x > 1/2 \end{cases} \tag{3.40}$$

Es lässt sich damit zeigen, dass bei einer bekannten Lösung mit einem Stoß zum Zeitpunkt $t = 1$ weder darauf geschlossen werden kann, wann der Stoß entstanden ist, noch wie er entstanden ist. Eine eindeutige Lösung der Gleichung existiert nur in Richtung der positiven Zeitachse. Zwei Lösungen, die zum Zeitpunkt $t = t_0$ identisch sind, sind also gleich für $t > t_0$, müssen aber nicht gleich sein für $t < t_0$.

Der Impulsentzug aus dem System aus Reibung (Sohlreibung und turbulente kinematische Viskosität) ist ebenfalls ein irreversibler Prozess.

3.7 Entropiebedingung an Diskontinuitäten

Im Rahmen der Lösung von Erhaltungsgleichungen ist die Entropie, anlehnend an die Theorie der Gasdynamik, ein Maß für die Unordnung in einem System. Der Wert dieser Größe bleibt bei reversiblen Prozessen gleich und nimmt bei irreversiblen Prozessen über die Zeit zu. Durch Stöße wächst die Entropie, da dort Information über die Vergangenheit verloren geht und der Prozess ist wie in Kapitel 3.6 gezeigt irreversibel.

Im Rahmen der numerischen Simulation von diskontinuierlichen Lösungen ist es wichtig nur Lösungen zuzulassen, die der Entropiebedingung genügen. Erst damit kann das Anfangswertproblem, zusätzlich mit der Sprungbedingung, eindeutig gelöst werden. Die folgenden Überlegungen bezüglich der Einhaltung der Entropiebedingung sind später bei der Approximation der numerischen Flüsse im numerischen Verfahren von großer Bedeutung.

Zur Verdeutlichung dieser Bedingung sei folgendes Anfangswertproblem wiederum für die Burgers-Gleichung

$$\partial_t u + \partial_x (\frac{1}{2} u^2) = 0 \tag{3.41}$$

mit den Anfangswerten

$$u(x,0) = u_o(x) = \begin{cases} u_L & \text{falls}\, x < 0 \\ u_R & ,\text{falls}\, x > 0 \end{cases} \tag{3.42}$$

vorgestellt. Die Charakteristiken der Gleichung (3.41) berechnen sich aus

$$F(u) = \frac{1}{2} u^2 \tag{3.43}$$

zu $\lambda(u) = u$.

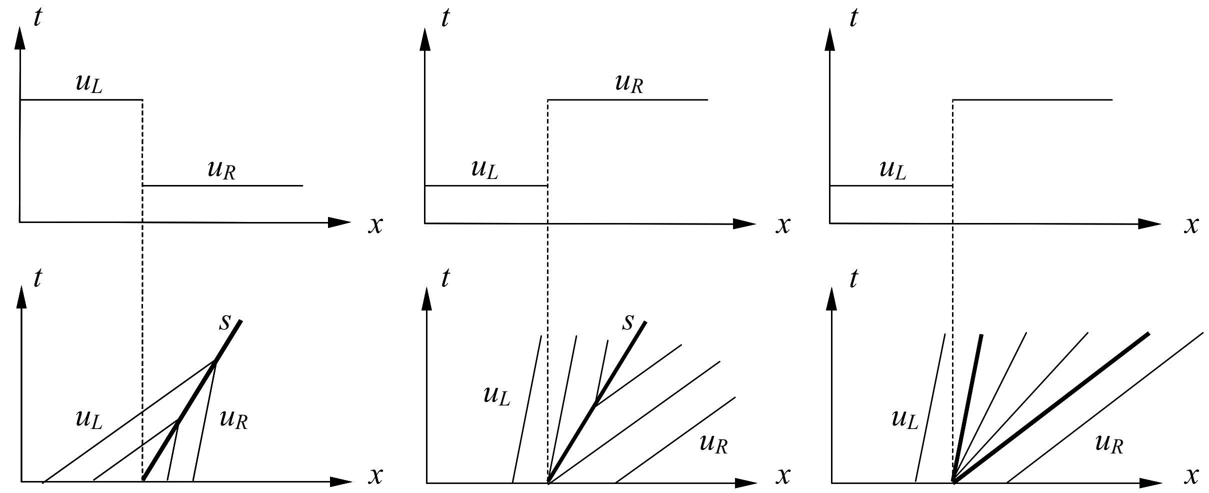

Abbildung 3.10: a) Verdichtungsstoß b) Verdünnungsstoß c) Verdünnungsfächer für die Burgers-Gleichung

Durch die Annahme von $u_L > u_R$ gemäß Abbildung 3.10a ergeben sich die Eigenwerte in den von der Diskontinuität getrennten Bereichen konstant zu $\lambda(u_L) > \lambda(u_R)$. Unter Berücksichtigung der Sprungbedingung (3.32) ist die diskontinuierliche Lösung des Problems

$$u(x,t) = \begin{cases} u_L & \text{falls}\, x/t < s \\ u_R, & \text{falls}\, x/t > s \end{cases} \tag{3.44}$$

mit der Stoßgeschwindigkeit s gemäß der Sprungbedingung (3.41), gegeben durch

$$s = \frac{1}{2}(u_L + u_R) \tag{3.45}$$

Gilt die Bedingung $u_R > u_L$, gibt es anscheinend zwei mathematisch richtige Lösungen des Anfangswertproblems (3.41) und (3.42). Sowohl die diskontinuierliche Lösung

$$u(x,t) = \begin{cases} u_L & \text{falls}\, x/t < s \\ u_R, & \text{falls}\, x/t > s \end{cases} \tag{3.46}$$

der sogenannte Verdünnungsstoß b), als auch die als Verdünnungsfächer c) bezeichnete kontinuierliche Lösung

$$u(x,t)=\begin{cases} u_L & \text{falls} \quad x/t \le \lambda(u_L) \\ x/t\,, & \text{falls}\,\lambda(u_L) < x/t < \lambda(u_R) \\ u_R & \text{falls} \quad x/t \ge \lambda(u_L) \end{cases} \tag{3.47}$$

lösen das Anfangswertproblem für die schwache Erhaltungsform unter Einhaltung der Sprungbedingung. Erst die zusätzliche Berücksichtigung der Entropiebedingung, eine physikalische Restriktion, löst das Problem eindeutig. Sie unterscheidet auf der Basis der mathematisch richtigen Lösungen zwischen physikalisch korrekten und inkorrekten Lösungen. Die Entropie als das Maß für die Unordnung in einem System darf dabei über die Zeit nur zunehmen.

Für eine skalare Erhaltungsgleichung wie Gleichung (3.26) mit einem konvexen Flussterm $F''>0$ lautet die mathematische Formulierung der Entropiebedingung nach SMOLLER (1994)

$$\frac{u(x+a,t)-u(x,t)}{a} \le \frac{E}{t}, \quad a>0, \quad t>0 \tag{3.48}$$

mit der von *x*, *t* und *a* unabhängigen Größe der Entropie *E*. Eine ausführliche Herleitung der Entropiebedingung findet sich in SMOLLER (1994) oder CHORIN & MARSDEN (1993). Mit Hilfe dieser Bedingung lässt sich nun eine eindeutige Lösung für das Anfangswertproblem finden. Offensichtlich impliziert

$$\lim_{a\to 0}(u(x+a,t)-u(x,t)) = u_R - u_L \tag{3.49}$$

am Ort der Diskontinuität, dass ein Sprung der Variablen *u* in *x*-Richtung nur auf einen kleineren Wert möglich ist. Der gesamte Term der linken Seite in Ungleichung (3.48) strebt dann gegen -∞, und die Ungleichung (3.48) ist eingehalten. Ein Sprung auf einen größeren Wert verletzt dagegen die Entropiebedingung, da der Wert gegen ∞ strebt und offensichtlich größer ist als die rechte Seite der Ungleichung (3.48). Der Verdünnungsstoß ist damit unphysikalisch. Der Verdünnungsfächer ist die einzige physikalisch richtige Lösung. Interessanterweise ist damit eine kontinuierliche Funktion Lösung eines diskontinuierlichen Anfangswertproblems.

Graphisch interpretiert sagt die Entropiebedingung aus, dass Charakteristiken nur in eine Stoßfront hineinlaufen, nicht aber aus dieser heraus gelangen können. Da Charakteristiken den Weg der Informationsausbreitung beschreiben, nimmt bei einem Verdichtungsstoß gemäß Abbildung 3.10a die Unordnung im System bzw. die Entropie über die Zeit zu. Bei einem Verdünnungsstoß gemäß Abbildung 3.10b würde sich die Entropie über die Zeit verringern. Dieser Umstand widerspricht den physikalischen Beobachtungen.

4 Numerische Verfahren zur Lösung der tiefengemittelten Flachwassergleichungen

Numerische Verfahren zur Lösung partieller Differentialgleichungen wie der FWG überführen diese durch eine Diskretisierung in lösbare algebraische Gleichungen. Um für einen definierten Anwendungsfall aus der Vielzahl der vorhandenen numerischen Verfahren ein geeignetes auszuwählen, bedarf es einer Reihe von Entscheidungs- und Bewertungskriterien. Im Folgenden seien einige der allgemeineren Begriffe, mit denen numerische Verfahren klassifiziert werden können, kurz erläutert. Danach wird auf einige verschiedene Arten einer Diskretisierung eingegangen. Auf speziellere Entwicklungen zur Behandlung von konvektionsdominierten Problemen wie der Benutzung von Upstream- und Total-Variation-Diminishing- (TVD-) Techniken wird in den folgenden Unterkapiteln anhand von Literatur im Detail eingegangen. Beide Techniken finden sich auch im nächsten Kapitel in der Herleitung der RKDG-Methode wieder.

4.1 Eigenschaften numerischer Verfahren

Eine wesentliche und grundlegende Forderung an ein numerisches Verfahren ist seine Konvergenz und Konvergenzordnung. Ein optimales numerisches Verfahren für die FWG sollte dabei mindestens eine Konvergenz zweiter Ordnung besitzen. Eng verbunden mit der Konvergenz sind die Konsistenz und die Stabilität der Methode. Bezüglich der Reproduktion physikalischer Charakteristika der Gleichungen ist die Einhaltung der Erhaltungseigenschaften für Masse und Impuls sowie der Positivitätseigenschaft von Variablen wie der Wassertiefe zu nennen. Einige mehr technische, der numerischen Methode zuzuordnenden Kriterien, beziehen sich auf die möglichst geringe Komplexität und hohe Effizienz des Algorithmus, seine Adaptivität auf die Strömung und komplexe Geometrien und seine guten Parallelisierungseigenschaften. Die letzte Eigenschaft ist hauptsächlich von der Kompaktheit des Verfahrens abhängig. Für eine detailliertere, weiterführende Diskussion dieser Begriffe sei der Leser auf DVWK (1999) oder FERZIGER & PERIC (1999) verwiesen.

4.1.1 Konsistenz

Ein numerisches Verfahren löst nur in Ausnahmefällen ein Problem exakt. Die Differenz zwischen der diskretisierten und der exakten Gleichung wird als Abbruchfehler bezeichnet. Die Konsistenzordnung *n* gibt an, mit welcher minimalen Potenz der Abbruchfehler mit feiner werdenden Diskretisierungen gegen 0 strebt. Dieser Fehler wird üblicherweise für stetig differenzierbare Funktionen durch eine Taylorreihenentwicklung bestimmt. Die Funktion lässt sich um den Punkt x_i entwickeln, gegeben durch die Reihe

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_i) + (x - x_i)(\partial_x f(x))_i \\ &\quad + \frac{(x - x_i)^2}{2!}(\partial_x^2 f(x))_i + \frac{(x - x_i)^3}{3!}(\partial_x^3 f(x))_i + \ \dots \end{aligned} \tag{4.1}$$

Mit der Wahl von $x = x_{i+1}$ kann z. B. aus Gleichung (4.1) der Abbruchfehler für den vorderen Differenzenquotienten eines Finite-Differenzen-Verfahrens

$$(\partial_x f(x))_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \tag{4.2}$$

durch eine Umformung von Gleichung (4.1) zu

$$\begin{aligned} (\partial_x f(x))_i &= \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} - \frac{x_{i+1} - x_i}{2}(\partial_x^2 f(x))_i \\ &\quad - \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{6}(\partial_x^3 f(x))_i - \ \dots \end{aligned} \tag{4.3}$$

erhalten werden. Der vordere Differenzenquotient (4.2) hat entsprechend der minimalen Potenz eins der räumlichen Schrittweite $\Delta x^1 = x_{i+1} - x_i$ (Gleichung (4.3)) eine Konsistenzordnung von 1. Ein Verfahren wird als konsistent mit den Grundgleichungen bezeichnet, wenn alle Fehlerterme von der Schrittweite abhängig sind und bei einer Verringerung der Schrittweite kleiner werden. Die Konsistenz ist ein formales Kriterium auf der Basis der gewählten Diskretisierung und gibt noch keinen Aufschluss über die weiter unten vorgestellte Konvergenz und Konvergenzordnung.

4.1.2 Stabilität

Ein Verfahren wird nach FERZINGER & PERIC (1999) als stabil bezeichnet, wenn sich im Prozess der numerischen Lösung der Diskretisierungsfehler nicht vergrößert. Für zeitabhängige Probleme garantiert die Stabilität begrenzte Lösungen, wenn die exakte Lösung der Gleichung ebenfalls begrenzt ist.

Die Analyse nach VON NEUMANN ist eine der am weitesten verbreiteten Methoden zur Untersuchung der Stabilität von linearen Problemen. Basierend auf einer Linearisierung von nichtlinearen Gleichungen kann sie auch auf nichtlineare Probleme angewendet werden, hat dort allerdings nur eine bedingte Aussagekraft. Generell ist der formale Nachweis der Stabilität für gekoppelte, nichtlineare Gleichungssysteme unter der zusätzlichen Berücksichtigung von Randbedingungen sehr schwierig zu führen und wird bevorzugt über eine Konvergenzuntersuchung auf der Basis von numerischen Experimenten durchgeführt.

4.1.3 Konvergenzordnung

Strebt für ein Verfahren der Diskretisierungsfehler, d. h. die Differenz zwischen der exakten und der numerischen Lösung, bei der Verringerung der räumlichen und zeitlichen Schrittweite gegen Null, wird es konvergent genannt. Neben der Konsistenz des Verfahrens ist Stabilität eine Voraussetzung für Konvergenz. Lax formuliert diesen Zusammenhang für FD-Verfahren in einem Satz (RICHTMYER & MORTON, 1967):

Lax's Equivalence Theorem: *Given a properly posed initial-value problem and a finite-difference approximation to it that satisfies the consistency condition, stability is the necessary and sufficient condition for convergence.*

Halbiert sich z. B. der Fehler bei einer Halbierung der Elementgröße, spricht man, analog zur Konsistenzordnung, von einem Verfahren erster Ordnung. Viertelt sich der Fehler, liegt ein Verfahren zweiter Ordnung vor. Verfahren einer Konvergenz zweiter oder höherer Ordnung werden Verfahren höherer Ordnung genannt.

Der formale Nachweis der Konvergenz ist, genauso wie der Nachweis der Stabilität, für nichtlineare Gleichungssysteme unter zusätzlicher Beachtung der Randbedingungen äußerst schwierig zu führen. In der Praxis, so auch bei der Verifizierung der RKDG-Methode in Kapitel 6 dieser Arbeit, werden in der Regel numerische Experimente mit uniform verfeinerten Berechnungsnetzen bzw. Zeitschrittweiten durchgeführt. Ist die Konvergenz für ein Testproblem nachgewiesen, kann gleichzeitig auf Stabilität und Konsistenz des numerischen Verfahrens in Anwendung auf dieses Problem geschlossen werden.

4.2 Allgemeine Einführung in numerische Verfahren

Für die numerische Lösung der FWG steht eine große Anzahl verschiedener Verfahren zur Verfügung. Entsprechend vielfältig ist die vorhandene Literatur. Im Rahmen dieser Arbeit wird versucht, einige der Hauptentwicklungslinien dieser Verfahren zu erläutern und in einen Kontext zu stellen. Es erscheint daher sinnvoll, zuerst kurz auf die grundlegenden Typen numerischer Verfahren wie das Charakteristikenverfahren, die Methode der Finiten-Elemente, der Finiten-Differenzen und der Finiten-Volumen einzugehen. Auf einige, in diesen Methoden vorkommenden Techniken zur Behandlung konvektionsdominierter Probleme, wird genauer in eigenen Unterkapiteln eingegangen. Dies beinhaltet zum einen den Begriff des Upwinding, zum anderen die sogenannten TVD-Verfahren. Weiterhin wird die Berücksichtigung des Quellterms aufgrund von Sohlneigung in den FWG genauer beleuchtet. Die vorgestellte Literatur, besonders bei der Berücksichtigung aktueller Veröffentlichungen, konzentriert sich auf Verfahren, die in der Lage sind, transkritische und überkritische Strömung zu berechnen. Detaillierte Diskussionen von numerischen Verfahren für die Berechnung von Dammbruchwellen und eine Zusammenfassung bis dahin durchgeführter Forschung auf Grundlage der FWG findet sich in ALMEIDA & FRANCO (1994) oder CADAM (2000). Einen generellen und ausführlichen Überblick gibt weiterhin WEIYAN (1992).

4.2.1 Charakteristikenverfahren

Charakteristikenverfahren lösen ihre zu Grunde liegenden Gleichungen durch eine Verfolgung der auf den Charakteristiken konstanten Invarianten der Gleichungen. Zur kurzen Darstellung des Verfahrens werden die eindimensionalen FWG (3.9) in eine entkoppelte charakteristische Form überführt. Mit der Ersetzung der Jacobimatrix $A = K\Lambda K^{-1}$ (siehe Gleichung (3.15)) und Multiplikation der inversen Matrix der rechten Eigenvektoren K^{-1} ergibt sich:

$$K^{-1}\partial_t U + \Lambda K^{-1}\partial_x U = K^{-1}S \tag{4.4}$$

mit

$$\Lambda = diag\{\lambda_i\} \qquad i = 1,2 \tag{4.5}$$

Aufgrund der Nichtlinearität der FWG und der damit verbundenen Abhängigkeit der Matrix K von U kann der Vektor der charakteristischen Variablen bzw. der Riemann Invarianten W nicht wie bei linearen Problemen über $W = K^{-1}U$ (TORO, 1999) bestimmt werden. Aus

$$K^{-1}\partial_t U = \partial_t W \qquad \text{bzw.} \qquad K^{-1}\partial_x U = \partial_x W \tag{4.6}$$

ergeben sich jedoch nach einigen Umformungen[4] mit

$$U = \begin{bmatrix} u \\ uh \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

und

$$K = \frac{h}{2c}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ u-c & u+c \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

mit der Wellenfortpflanzungsgeschwindigkeit $c = \sqrt{gh}$, die charakteristischen Variablen W zu

$$W = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u-2c \\ u+2c \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

Die charakteristische Form der Gleichungen lautet damit

$$\partial_t W + \Lambda \partial_x W = K^{-1} S \tag{4.10}$$

oder umgeformt und ausgeschrieben (CUNGE et al., 1980):

$$\{\partial_t + (u-c)\partial_x\}(u-2c) = -g(S_f - S_0) \tag{4.11}$$

$$\{\partial_t + (u+c)\partial_x\}(u+2c) = -g(S_f - S_0) \tag{4.12}$$

Durch ein Ersetzen des Operators $\{\partial_t + \lambda_i \partial_x\}$ mit $\lambda_i = u \pm c$ durch die totale Ableitung d/dt wird leicht ersichtlich, dass die charakteristische Variable w_1 auf der negativen Charakteristik mit

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u - c \tag{4.13}$$

und w_2 auf der positiven Charakteristik gemäß

[4] Alternative Herleitungen der charakteristischen Form aus der nicht-konservativen Flachwassergleichung finden sich in STOKER (1957), ABBOT (1979) oder CUNGE et al. (1980).

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u + c \tag{4.14}$$

für die homogenen Gleichungen konstant sind.

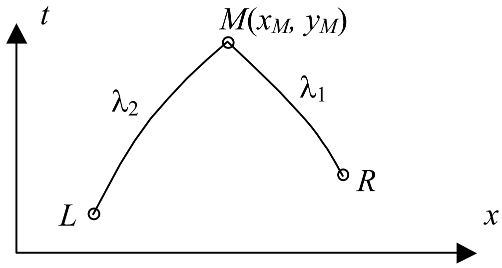

Abbildung 4.1: Grundlagen des Charakteristikenverfahrens

Unter der Annahme von zwei Punkten L und R (Abbildung 4.1) mit bekannten Daten $u_{L,R}$ und $c_{L,R}$, treffen sich die Charakteristiken dieser Punkte im Punkt M mit den noch unbekannten Koordinaten (x_M, y_M) und den Unbekannten u_M und c_M. Durch Integration entlang der Charakteristiken ergeben sich aus den Gleichungen (4.11) - (4.14):

$$\int_{t_R}^{t_M} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u - 2c)\,\mathrm{d}t = u_M - 2c_M - (u_R - 2c_R) = \int_{t_R}^{t_M} g(S_0 - S_f)\,\mathrm{d}t \tag{4.15}$$

$$\int_{t_L}^{t_M} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u + 2c)\,\mathrm{d}t = u_M - 2c_M - (u_L - 2c_L) = \int_{t_L}^{t_M} g(S_0 - S_f)\,\mathrm{d}t \tag{4.16}$$

$$\int_{t_R}^{t_M} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x\,\mathrm{d}t = x_M - x_R = \int_{t_R}^{t_M} u + c\,\mathrm{d}t \tag{4.17}$$

$$\int_{t_L}^{t_M} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x\,\mathrm{d}t = x_M - x_L = \int_{t_L}^{t_M} u - c\,\mathrm{d}t \tag{4.18}$$

Mit Hilfe dieser vier Gleichungen lassen sich die vier Unbekannten am Punkt M iterativ bestimmen. Die einzige noch zu treffende Approximation in diesem Prozess ist die Auswertung der verbleibenden Integrale. Sie können beispielsweise unter Anwendung der Trapezregel angenähert werden.

Das klassische Charakteristikenverfahren wurde von MUSSAU (1889) erstmals in der Hydraulik angewendet und war zu diesem Zeitpunkt eine graphische Lösungsmethode.

Das Verfahren liefert mit einem vertretbaren Diskretisierungsaufwand nur ausreichend genaue Lösungen, wenn mit variablen Berechnungspunkten in Raum und Zeit gearbeitet wird. Wird das Verfahren auf Computern mit konstanten Raum- und Zeitschrittweiten diskretisiert, stimmen die Berechnungsknoten selten mit den Endpunkten der Charakteristiken überein. Die dann notwendige Interpolation kann bei trans- oder überkritischer Strömung zu unscharfen Stoßfronten und einer Verschmierung der Lösung mit einer entsprechend geringen Konvergenzordnung führen. Die Charakteristikenverfahren haben nach CUNGE et al. (1980) auf konstanten Netzen keine Vorteile gegenüber FD-Verfahren, sind schwieriger zu implementieren und weniger effizient. Sie wurden und werden jedoch häufig zur Formulierung von Randbedingungen in FD-Verfahren eingesetzt (TERZIDIS & STRELKOFF, 1970).

In Anwendung auf Dammbruchprobleme sei der Beitrag von SAKKAS & STRELKOFF (1973) erwähnt. Eine Zusammenfassung zu verschiedenen Charakteristikenverfahren und ihrer Anwendung findet sich in den Standardwerken von STOKER (1957) und CHOW (1959). ABBOTT (1979) liefert außerdem eine Reihe von Informationen zur numerischen Implementierung von Charakteristikenverfahren.

Der Aufwand für diese Implementierung nimmt in einem zweidimensionalen Berechnungsgebiet stark zu, weshalb ein großer Teil der in der Literatur bekannten Verfahren nur die eindimensionalen Gleichungen löst. Als eine der wenigen zweidimensionalen Referenzen für klassische Charakteristikenverfahren sei das Verfahren von KATOPODES & STRELKOFF (1978) auf einem bewegten Berechnungsnetz erwähnt.

Neben reinen Charakteristikenverfahren gibt es eine Reihe von erfolgreich angewendeten hybriden Ansätzen zur Lösung der FWG, bei denen die konvektiven Terme über Charakteristikenverfahren diskretisiert werden. Unter diesen Ansätzen seien die Arbeiten von CASULLI (1990) und GALLAND et al. (1991) genannt.

4.2.2 Finite-Differenzen-Verfahren

Das FD-Verfahren ist wahrscheinlich das älteste, auf Computern zur numerischen Lösung der FWG eingesetzte Verfahren. Erste Anwendungen finden sich in STOKER (1957), ABBOTT & IONESCU (1967), MARTIN & DEFAZIO (1969) oder MARTIN & ZOVNE (1971). Das FD-Verfahren basiert auf der punktweisen Approximation der gesuchten Lösung und der Substitution der Ableitungen durch Differenzenquotienten (vgl. Gleichung (4.2)).

Aus der Vielzahl von Möglichkeiten, diese Differenzenquotienten in Raum und Zeit zu konstruieren, entstanden eine Reihe unterschiedlicher FD-Verfahren. Eines der wichtigsten Verfahren nach LAX & WENDROFF (1960) soll hier wegen seiner häufigen Anwendung auf die FWG und seiner im Vergleich zu anderen FD-Verfahren relativ stabilen Reproduktion von Stoßfronten beispielhaft erläutert werden.

Ausgehend von der homogenen Erhaltungsgleichung (3.26) können die Variablen des neuen Zeitschritts U^{n+1} durch eine Taylorreihenentwicklung gemäß

$$U_i^{n+1} = U_i^n + \Delta t \partial_t U + \frac{\Delta t^2}{2} \partial_t^2 U + O(\Delta t^3) \tag{4.19}$$

mit zweiter Ordnung in der Zeit approximiert werden. Durch das Ersetzen des dritten Terms der rechten Seite mit der räumlichen Ableitung

$$\partial_t^2 U = -\partial_x (\partial_t F) = -\partial_x (A \partial_t U) = \partial_x (A \partial_x F) \tag{4.20}$$

mit der Jacobimatrix A, kann das Lax-Wendroff-Verfahren in seiner FD-Formulierung auf einem äquidistanten Berechnungsnetz mit den räumlichen Stützstellen $x_i = i\,\Delta x$ wie folgt ausgedrückt werden:

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + \frac{F_{i+1}^n - F_{i-1}^n}{2\Delta x} - \frac{A_{i+1/2}^n (F_{i+1}^n - F_i^n) - A_{i-1/2}^n (F_i^n - F_{i-1}^n)}{2\Delta x^2} = 0 \tag{4.21}$$

Auf die FWG findet das Verfahren eine erste Anwendung in der von RICHTMYER & MORTON (1967) vorgeschlagenen 2-Schritt Variante, die auf die Berechnung der Jacobimatrix verzichtet. In TERZIDIS & STRELKOFF (1970) finden sich Beispiele für die Simulation diskontinuierlicher Strömung.

Das von MACCORMACK (1971) eingeführte und nach ihm benannte MacCormack-Verfahren ist eine weitere 2-Schritt Variante des Lax-Wendroff-Verfahrens. Aufgrund einer guten, allerdings auch leicht oszillierenden Abbildung von Stoßfronten wurde es in seiner später vorgestellten TVD-Version vielfach angewendet. In seiner Standardversion seien die Beiträge von FENNEMA & CHAUDHRY (1986), JIMENÉZ & CHAUDHRY (1988), FENNEMA & CHAUDHRY (1990), GHARANGIK & CHAUDHRY (1991), BELLOS et al. (1991), GARCIA-NAVARRO & SAVIRON (1992) und RAHMAN & CHAUDHRY (1995) in Anwendung auf transkritische Strömung erwähnt.

Eine Beschreibung und Diskussion der Lax-Wendroff- und MacCormack-Verfahren sowie anderer Schemata stellt MESEHLE (1994) vor. Weitere FD-Verfahren, wie die

Verfahren von Gabutti und Beam-Warming, benutzen FENNEMA & CHAUDHRY (1987, 1989).

4.2.3 Finite-Elemente-Verfahren

Das Verfahren der Finiten-Elemente basiert auf einer Formulierung der Erhaltungsgleichungen in einer schwachen Form. Dabei werden die zu Grunde liegenden Gleichungen mit einer stetig differenzierbaren Testfunktion ϕ multipliziert und über die Berechnungselemente K integriert:

$$\int_K \phi\,(\partial_t U + \partial_x F(U))\,\mathrm{d}x = 0 \qquad (4.22)$$

Die Variable U kann im Element durch eine Linearkombination von i diskreten Werten U^i multipliziert mit den dazugehörigen Ansatzfunktionen $\varphi_i(x)$ ausgedrückt werden durch

$$U_h = \sum_i U^i \varphi_i(x) \qquad (4.23)$$

Bei dem Standardverfahren der Finiten-Elemente, dem *Galerkin*-Verfahren, sind Testfunk-
tion ϕ und Ansatzfunktion φ identisch. Reine Galerkin-Verfahren mit einer Zeitintegration durch einen Crank-Nicholson Ansatz wurde von NORTON et al. (1973), KING et al. (1975) und KING & NORTON (1978)[5] zur Simulation der FWG benutzt. Allerdings liefert dieser recht aufwendige Ansatz nur bei unterkritischer Strömung Ergebnisse. Weitere Beispiele für frühe FE-Verfahren auf der Basis des Galerkin-Ansatzes finden sich in GROTKOP (1973), TAYLOR & DAVIS (1975a, 1975b) oder CONNOR & WANG (1974) und WANG & CONNOR (1975). Die Anwendung dieser FE-Verfahren wurde in den 70er Jahren besonders für zweidimensionale Berechnungsgebiete wegen ihrer guten Adaptivität auf komplexe Geometrien vorangetrieben. Einen Überblick und eine kritische Diskussion über bis zum Ende der 70er Jahre vorhandene FE-Verfahren gibt GRAY (1980). Die Simulation von transkritischer oder überkritischer Strömung war mit keinem dieser Verfahren möglich. Der reine Galerkin-Ansatz liefert aufgrund seiner zentralen Diskretisierung keine befriedigenden Ergebnisse und wird zur Zeit in Anwen-

[5] Die Arbeiten von Norton, King und Orlob mündeten in einem Softwarepaket, das noch heute als RMA in Gebrauch ist. Die zweidimensionale tiefengemittelte Version RMA2 war außerdem Grundlage einer Reihe von modifizierten FE-Verfahren, siehe STEIN (1990).

dung auf die FWG nur noch benutzt, wenn die konvektiven Terme vernachlässigt werden können (ARONICA et al., 1998).

Einen interessanten Ausweg aus der schlechten Anwendbarkeit des Standardverfahrens nach Galerkin bieten die sogenannten Taylor-Galerkin-Verfahren. Bei diesen Verfahren wird analog zum Lax-Wendroff-Verfahren eine Taylorreihenentwicklung des Terms der zeitlichen Ableitung durchgeführt. Anwendungen auf die FWG finden sich in KATOPODES (1986) und VENUTELLI (1998). Taylor-Galerkin-Verfahren beruhen auf einer expliziten Zeitintegration, die allerdings wegen der gewählten FE-Formulierung und der sich daraus ergebenden gekoppelten Massenmatrix in diesen Verfahren die Lösung linearer Gleichungssysteme notwendig werden lässt. Obwohl die Verfahren generell hohe Konsistenzordnungen in Raum und Zeit ermöglichen, haben sie sich wegen ihrer komplizierten Implementierung und geringen Effizienz nicht durchsetzen können. Wesentlich erfolgreicher sind dagegen die im folgenden Unterkapitel vorgestellten Petrov-Galerkin-Verfahren.

4.3 Upwinding-Eigenschaften

Ein Schlüsselbegriff für die Simulation konvektionsdominierter Probleme ist das Upwinding. Wächst die Geschwindigkeit der Strömung, verschiebt sich der Bestimmtheitsbereich (Kapitel 3.2) eines Berechnungspunktes P in die Gegenrichtung der Fließgeschwindigkeit. Beim Übergang von unter- zu überkritischer Strömung hat dieser Effekt zur Folge, dass der Wert von Punkt P im neuen Zeitschritt ausnahmslos über seinen stromaufwärts gelegenen Bereich bestimmt wird. Numerische Verfahren zur Simulation von konvektionsdominierten Problemen sollten diese Eigenschaft reproduzieren können. Verfahren, die ihre Punktebasis dem Bestimmtheitsbereich auf diese Weise anpassen, werden als Upwinding-Verfahren bezeichnet. Die weiter oben vorgestellten Charakteristikenverfahren beinhalten aufgrund der Lösung anhand der Charakteristiken implizit die Idee des Upwindings. Aus diesem Grund werden sie oft für den advektiven oder konvektiven Operator in gemischten Gleichungen angewendet.

Bei den FE-Verfahren dauerte es einige Zeit länger, die Idee des Upwindings numerisch umzusetzen. Liefert das Standard-Galerkin FE-Verfahren für eine Vielzahl von physikalischen Problemstellungen sehr gute Resultate, war es, wie schon oben beschrieben, wegen der zentralen räumlichen Diskretisierung nur schlecht für konvektionsdominierte und vor allem transkritische und überkritische Strömungen geeignet. Erst die Benutzung von modifizierten Testfunktionen, die die stromaufwärts gelegenen Werte höher wichteten, machten die FE-Verfahren als sogenannte Petrov-Galerkin-Verfahren wieder konkurrenzfähig. Die grundlegenden Arbeiten auf diesem Gebiet in Anwendung auf die FWG wurden von KATOPODES (1984) und AKANBI & KATOPODES (1988) durchgeführt. HICKS & STEFFLER (1992, 1995, 1997) stellen eine Reihe von verschiedenen Petrov-Galerkin-Verfahren für die eindimensionalen FWG vor. Weitere Arbeiten auf diesem Gebiet wurden von KHAN & STEFFLER (1996b, 1996c) durchgeführt. In der Anwendung auf Schussrinnen wurden von BERGER & STOCKSTILL (1995) und BERGER & CAREY (1998a, 1998b) ein zweidimensionales Petrov-Galerkin-Verfahren auf Basis der klassischen und der erweiterten konservativen FWG vorgestellt. Auf Grundlage dieses Verfahrens stellen BURG et al. (2001) einen Optimierungsalgorithmus zur Geometrieoptimierung von Schussrinnen vor.

Die oben aufgeführten Beispiele beschäftigen sich zum größten Teil mit stationärer transkritischer und überkritischer Strömung. Die in der Regel implizite Zeitintegration mit einer theoretisch unbeschränkten Stabilität der Petrov-Galerkin-Verfahren stellt in diesem Falle eine gute Möglichkeit dar, in der Berechnung schnell zu einem stationären Endzustand zu gelangen. Ihre Anwendung erfordert allerdings die Ausführung von mindestens einer Lösung eines linearen Gleichungssystems pro Iterations- oder Zeitschritt.

In Anwendung auf stark instationäre Probleme kommt der Zeitintegration eine hohe Bedeutung zu. Trotz der unbeschränkten Stabilität muss eine entsprechend kleine CFL-Zahl mit dadurch bedingten kleinen Zeitschrittweiten gewählt werden, um die Strömung auch mit einer ausreichenden Genauigkeit in der Zeit abzubilden. Aus diesem Grund ist das Petrov-Galerkin-Verfahren in Anwendung auf stark instationäre Probleme gegenüber den weiter unten vorgestellten modernen FD- und FV-Verfahren in seiner Effizienz nicht konkurrenzfähig.

Eine weitere Schwierigkeit beim Gebrauch von Petrov-Galerkin-Verfahren ist die Wahl und der Aufbau der modifizierten Testfunktion. Diese beeinflusst nach KATOPODES (1984) entscheidend die in das Verfahren eingebrachte Dispersion und Diffusion. Da dieser Effekt generell die Konsistenz und damit die Konvergenzordnung des Verfahrens beeinträchtigt, ist er auf die Bereiche der Lösung zu beschränken, in denen er aus Stabilitätsgründen unbedingt notwendig ist. Ein Vorgehen, den Dissipationsgrad über die Variation der Energiehöhe in einem Element zu bestimmen und diesen Effekt zu minimieren, beschreibt BERGER & STOCKSTILL (1995). Die Anwendung dieser Technik ist allerdings auf stationäre Strömungen beschränkt.

In FD-Verfahren ist die Idee des Upwindings für skalare Erhaltungsgleichungen sehr einfach umsetzbar. So kann entsprechend der Advektions- oder Konvektionsrichtung der gegen diese Richtung diskretisierte Differenzenquotient benutzt werden. Für Systeme von Erhaltungsgleichungen ist dieses Vorgehen nicht direkt übertragbar, da die Eigenwerte der Gleichungen gleichzeitig sowohl positiv als auch negativ sein können und damit Informationen in beide Richtungen transportiert werden. Ein Ausweg aus dieser Problematik ist die Aufteilung des Differenzenquotienten in einen positiven und einen negativen Anteil, der der jeweiligen Richtungen der Informationsausbreitung zugeordnet wird. Eine Anwendung dieses sogenannten Flux Difference Splittings (FDS) auf die FWG benutzt GLAISTER (1988, 1994) zur Simulation ein- und zweidimensionaler Dammbruchprobleme. ALCRUDO et al. (1992) stellen ein FD-Verfahren mit FDS für die homogenen FWG vor.

4.3.1 Finite-Volumen-Verfahren

Die Methode der Finiten-Volumen tritt in Anwendung auf die FWG besonders in den letzten Jahren in den Vordergrund. Hauptgründe dafür dürften ihre relativ einfache Anwendbarkeit auf unstrukturierte Netze und ihre direkte Berücksichtigung der Erhaltungseigenschaften ihrer Gleichungen sein. Entgegen den FD-Verfahren, die eine Lösung punktweise approximieren, basieren die FV-Verfahren auf der Diskretisierung in Kontrollvolumina. Die Benutzung einer Integralform der Grundgleichungen (3.30) erlaubt zudem die unkomplizierte Berücksichtigung von Diskontinuitäten in der Lösung.

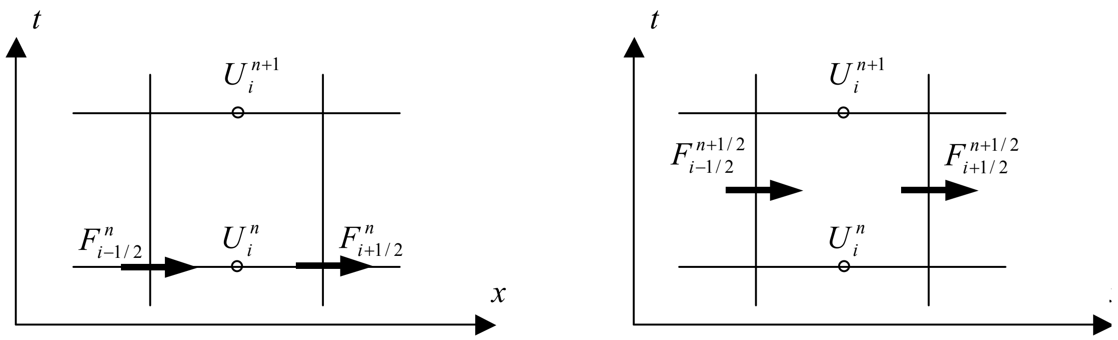

Abbildung 4.2: Finite-Volumen-Verfahren erster Ordnung nach Godunov (links), WAF-Verfahren zweiter Ordnung (rechts)

GODUNOV gilt mit seiner Veröffentlichung aus dem Jahr 1959 als Pionier eines Typs von FV-Methoden. Heute werden auf diesem Grundansatz beruhende Verfahren, die im

Gegensatz zu den verwendeten exakten Riemannlösern in der klassischen Godunov-Methode approximierte Riemannlöser benutzen, als Godunov-Typ-Verfahren bezeichnet. Unter der Annahme elementweise konstanter Daten ergibt eine aus Gleichung (3.30) hergeleitete Bilanz der in das Element ein- und austretender Flüsse F_i zu

$$U^{n+1} = U^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(F_{i+1} - F_i) \tag{4.24}$$

Durch die Auswertung der Flüsse F_i zum Zeitpunkt n (Abbildung 4.2) erhält man das klassische Godunov-Verfahren erster Ordnung. Aufgrund der Annahme elementweise konstanter Daten in den Berechnungselementen tritt auf den Elementrändern eine Diskontinuität auf, für die ein Fluss bestimmt werden muss. Die Lösung dieses Anfangswertproblems mit konstanten Daten auf beiden Seiten wird auch als Riemannproblem bezeichnet:

$$U(x,0) = \begin{cases} U_L & \text{falls}\, x < 0 \\ U_R & ,\text{falls}\, x > 0 \end{cases} \tag{4.25}$$

Da die analytische Lösung des Riemannproblems (4.25) für die FWG recht aufwendig sein kann und je nach Strömungszustand ein iteratives Vorgehen erfordert (TORO, 1992), wurden die Godunov-Verfahren erst mit der Entwicklung leistungsfähiger und effektiver angenäherter Riemannlöser als Godunov-Typ-Verfahren populär. Die Schwierigkeit bei der Konstruktion dieser Riemannlöser besteht hauptsächlich darin, einerseits die Konsistenz mit dem Flussterm zu gewährleisten und andererseits die Entropiebedingung einzuhalten (Kapitel 3.7). Für die FWG sind die Löser nach ROE (1981) und der HLL-Riemannlöser von HARTEN et al. (1993) von besonderer Bedeutung.

Bei der Berechnung des numerischen Flusses über die Elementkanten berücksichtigen FV-Verfahren auf der Grundlage des Ansatzes nach Godunov implizit ein Upwinding. Ist die Strömung überkritisch, benutzt sowohl der HLL-Riemannlöser als auch der Löser nach Roe nur die entsprechend stromaufwärts gelegene Größe U_L bzw. U_R. Bei unterkritischem Abfluss wird der numerische Fluss entsprechend den Eigenwerten gewichtet. Auf den HLL-Riemannlöser wird im Rahmen der RKDG-Methode näher in Kapitel 5 eingegangen.

Das Standardverfahren nach Godunov hat eine Konsistenzordnung von eins in Raum und Zeit. Da es aufgrund dieser niedrigen Ordnung sehr dispersiv ist, wurde eine Vielzahl von Erweiterungen vorgeschlagen, die eine Diskretisierung höherer Ordnung erlauben. Diese Verfahren sind, ebenso wie FD- und FE-Verfahren einer höheren Ordnung, besonders in der Nähe großer Diskontinuitäten anfällig für Oszillationen. Die meisten FV-Verfahren sind aus diesem Grunde mit Limiter-Funktionen ausgestattet, um diese unphysikalischen Schwingungen zu unterdrücken. Sie sind Gegenstand des folgenden Unterkapitels.

4.4 TVD-Verfahren

Die Grundidee der TVD-Verfahren ist die Begrenzung der *Totalen Variation*. Diese Technik kann prinzipiell auf alle numerische Verfahren angewendet werden, ist aber speziell bei FV- und FD-Verfahren sehr populär und vermeidet dort unphysikalische Oszillationen in der numerischen Lösung.

Die Totale Variation einer skalaren, homogenen Erhaltungsgleichung (3.26) ist definiert durch

$$TV(u(t)) = \lim_{\delta \to 0} \sup \frac{1}{\delta} \int_{\Omega} \left| u(t, x + \delta) - u(t, x) \right| \mathrm{d}x \qquad (4.26)$$

Nach SMOLLER (1994) darf sich die Totale Variation einer exakten Lösung einer Erhaltungsgleichung nicht vergrößern. Es gilt damit

$$TV(u(t)) \leq TV(u_0) \qquad (4.27)$$

Aus dieser Eigenschaft können für die Lösung einer skalaren, homogenen Erhaltungsgleichung folgende Aussagen abgeleitet werden:

- Es dürfen keine neuen Extrema im Lösungsgebiet erzeugt werden.
- Der Wert eines lokalen Minimums in *u* darf nicht kleiner werden, und der Wert eines lokalen Maximums in *u* darf nicht größer werden.

Diese Aussage kann auf Systeme von Erhaltungsgleichungen übertragen werden, wenn diese komponentenweise in ihren charakteristischen Variablen betrachtet werden. Numerische Verfahren, die diese Eigenschaft reproduzieren, werden als TVD-Verfahren bezeichnet. Monotone Verfahren erster Ordnung halten diese Bedingung grundsätzlich ein. Sie führen jedoch, wie oben diskutiert, zu einer unscharfen Abbildung von Stoßfronten und zu einer geringen Approximationsgüte der Lösung. Verfahren höherer Ordnung liefern für glatte Lösungen wesentlich bessere, d. h. genauere Lösungen, können jedoch in der Nähe steiler Gradienten und Diskontinuitäten unphysikalische Oszillationen verursachen. Sie verletzen an diesen Stellen die TVD-Bedingung. TVD-

Verfahren sind mit einem geeigneten Mechanismus ausgestattet, um in den Bereichen glatter Lösungen das Verfahren höherer Ordnung zu nutzen und an den Orten mit großen Gradienten oder Diskontinuitäten die Ordnung des Verfahrens so weit zu verringern, bis die TVD-Bedingung eingehalten ist und sich keine Oszillationen bilden. Verfahren, die nur eine geringe kontrollierte Verletzung der TVD-Bedingung zulassen, werden in diesem Zusammenhang als TVB-Verfahren (Total Variation Bounded) bezeichnet.

In der Literatur finden sich verschiedene Techniken, um TVD-Verfahren zu konstruieren:

a) Flux Limiter Methoden
b) Slope Limiter Methoden
c) (Weighted) Essentially Non-Oscillating (ENO/WENO) Verfahren

Verfahren mit Flux Limitern sind von den oben genannten Verfahren in Anwendung auf die FWG zur Zeit am weitesten verbreitet. Sie nutzen eine Kombination eines monotonen Flusses erster Ordnung zusammen mit einem Fluss höherer Ordnung. Der Flux Limiter hat die Aufgabe, zwischen diesen beiden Flüssen unter dem Gesichtspunkt einer optimalen Konsistenz und Stabilität zu wichten.

TORO (1992) und FRACCAROLLO & TORO (1995) stellen eine WAF (Weighted Averaged Flux) FV-Methode mit verschiedenen Riemannlösern und Limiter-Funktionen in Anwendung auf ein- und zweidimensionale Flachwasserströmungen infolge von Dammbrüchen vor. Die WAF-Methode kann nach TORO (1999) als ein am Kontrollvolumen hergeleitetes Lax-Wendroff-Verfahren interpretiert werden.

Eine Vielzahl von Literatur findet sich weiterhin zu TVD-Versionen der vom Lax-Wendroff-Verfahren abgeleiteten MacCormack-Methode. Als Referenz seien die Arbeiten von GARCIA-NAVARRO et al. (1992, 1995), LOUAKED & HANICH (1998), TSENG & CHU (2000), WANG et al. (2000) und VINCENT et al. (2001) angegeben.

Slope Limiter Methoden basieren auf einer Rekonstruktion der Variablen innerhalb eines Elementes durch lineare oder auch quadratische Funktionen. Da in einem Element der FV-Methode nur jeweils ein Mittelwert einer Variablen gespeichert ist, werden die Mittelwerte der Nachbarzellen zur Rekonstruktion mit hinzugezogen. ALCRUDO & GARCIA-NAVARRO (1993) stellen eine FV-Methode auf Basis eines MUSCL Slope Limiters mit einem Roe-Riemannlöser für die Berechnung überkritischer Gerinneströmungen und zweidimensionaler Dammbruchprobleme vor.

Flux und Slope Limiter Verfahren sind die klassischen TVD-Verfahren. Eine ausführliche Diskussion dieser Methoden findet sich in TORO (1999). Im Gegensatz dazu vermeiden ENO- und WENO-Verfahren Oszillationen über die geeignete adaptive Wahl einer Rekonstruktion der Variablen im Element oder die Auswahl eines geeigneten Differenzenquotienten. Sie können damit sowohl als FD-, als auch als FV-Verfahren formuliert werden. Als Schlüsselveröffentlichung gilt die Arbeit von HARTEN et al. (1997). ENO-Verfahren basieren auf der optimalen Auswahl einer Rekonstruktion mit der geringsten Totalen Variation. WENO-Verfahren wichten die möglichen Rekonstruktionen und erzeugen so relativ einfach sehr hohe Konvergenzordnungen für glatte Lösungen. Die Zeitintegration erfolgt über spezielle Runge-Kutta-Verfahren.

Eine Einführung in ENO- und WENO-Verfahren findet sich in SHU (1999). In Anwendung auf die FWG finden sich erste ENO-Verfahren zweiter und dritter Ordnung in YANG et al. (1993a, b). Die Autoren vergleichen die Ergebnisse für einen eindimensionalen Dammbruch mit einem Petrov-Galerkin-FE-Verfahren. In der zweiten Veröffentlichung werden Testprobleme zu instationären zweidimensionalen Schwallwellen vorgestellt. NUJIC (1995, 1998) stellt ein ENO-Verfahren zweiter Ordnung in Anwendung auf Dammbruchprobleme vor. Neben anderen Methoden diskutiert TSENG (1998) ENO-Verfahren zweiter und dritter Ordnung in Anwendung auf verschiedene Dammbruchprobleme. Im Rahmen dieser Arbeit wurden Vergleichsrechnungen mit WENO-Verfahren dritter und fünfter räumlicher Ordnung und dem für die FWG neuen RKDG-Ansatz durchgeführt.

Verfahren für die FWG auf Basis der FE-Methode erlauben bis jetzt nur eine implizite Einhaltung der TVD-Bedingung über die recht unkontrollierte Einführung einer geeignet großen Dispersion oder Diffusion in das Verfahren und gelten nicht als eigentliche TVD-Verfahren. Das im Kapitel 5 vorgestellte RKDG-Verfahren ist in Anwendung auf die FWG (SCHWANENBERG & KÖNGETER, 2000) die erste FE-Methode mit einem expliziten Slope Limiter. Es kann damit als TVD-Verfahren im engeren Sinne bezeichnet werden.

4.5 Diskretisierung der Quellterme

Die im letzten Abschnitt vorgestellten TVD-Verfahren wurden hauptsächlich im Hinblick auf Probleme kompressibler Gasströmung entwickelt. Aufgrund der Homogenität die Euler-Gleichungen wurden vielfach auch die FWG nur in ihrer homogenen Form untersucht, d. h. ohne die Berücksichtigung von Bodenneigung und Sohlreibung

(ALCRUDO et al., 1992). Dabei stellte sich bei der Anwendung der Verfahren auf praktische Problemstellungen mit nichtkonstanten Sohlhöhen heraus, dass besonders für eigentlich triviale Testprobleme mit konstantem oder Nullabfluss die Verfahren die trivialen Lösungen nicht reproduzieren konnten (GARCIA-NAVARRO & VAZQUEZ-CENDON, 1998). Die aktuelle Forschung konzentriert sich aus diesem Grund auf die korrekte Berücksichtigung der Quellterme, besonders des Quellterms aufgrund von Sohlneigung. GARCIA-NAVARRO & VAZQUEZ-CENDON (1998) stellen eine Methode vor, bei der der Quellterm aus Sohlneigung analog zu den Flusstermen über eine Upwind-Wichtung modifiziert wird. NUJIC (1995, 1998) stellt ähnliche Untersuchungen im Hinblick auf die bessere Berücksichtigung dieses Quellterms in ENO-Verfahren an.

Insgesamt scheint die Berücksichtigung der Gerinneneigung oder der im eindimensionalen Fall zusätzlichen Breitenänderung in FV-Verfahren noch nicht befriedigend gelöst bzw. untersucht zu sein. Die vorhandenen Verfahren zur Lösung der FWG erreichen aufgrund ihrer Inhomogenität bei weitem noch nicht die hohen Konvergenzraten von Verfahren zur Lösung der Euler-Gleichungen (YEE, 1997).

5 Diskretisierung der tiefengemittelten Flachwassergleichungen nach einer Finite-Elemente-Methode

5.1 Allgemeines

Das in diesem Kapitel vorgestellte numerische Verfahren zur Lösung der tiefengemittelten Flachwassergleichungen (FWG) basiert auf der Runge-Kutta-Discontinuous-Galerkin (RKDG) Methode für hyperbolische Systeme von Erhaltungsgleichungen und seiner Erweiterung auf konvektionsdominierte Probleme, der Local-Discontinuous-Galerkin (LDG) Methode. Das Verfahren wurde zur numerischen Lösung von Erhaltungsgleichungen wie der Euler-Gleichungen (BEY & ODEN, 1991; BASSI & REBAY, 1997; BAUMANN, 1997; BAUMANN & ODEN, 1998) und der Navier-Stokes-Gleichungen für kompressibe Fluide (LOMTEV & KARNIADAKIS, 1997; LOMTEV et al., 1998) oder der Maxwell-Gleichungen (WARBURTON & KARNIADAKIS, 1999) benutzt. Einen ausführlichen, allgemeinen Überblick über das Verfahren geben COCKBURN (1999) und COCKBURN et al. (2000). Eine erste Anwendung auf die FWG wurde von SCHWANENBERG & KÖNGETER (2000) vorgestellt.

Die RKDG-Methode verwendet ein klassisches Galerkin-Verfahren zur räumlichen Diskretisierung. Die Besonderheit der Methode liegt dabei in der Abbildung von Diskontinuitäten der Variablen an den Elementrändern. Werden in gewöhnlichen FE-Verfahren die Variablen dort von nur einer Variablen mit einem stetigen Übergang über den Elementrand repräsentiert, approximiert die Discontinuous-Galerkin (DG-) Methode die Variable mit jeweils einem Wert pro Element (Abbildung 5.1). Sind diese Werte in den Elementen nicht gleich, können Diskontinuitäten in der Variablen abgebildet werden.

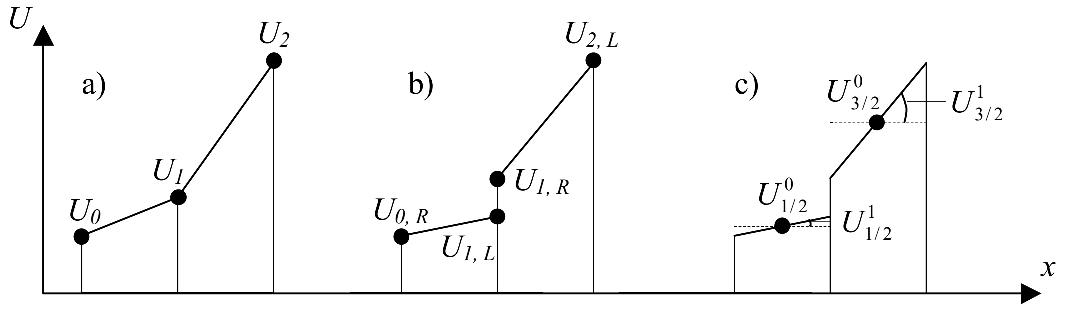

Abbildung 5.1: a) Kontinuierliche Ortsdiskretisierung (links), b) Diskontinuierliche nodale Ortsdisretisierung (mittig), c) Diskontinuierliche modale Ortsdiskretisierung (rechts)

Die diskontinuierliche räumliche Diskretisierung hat gegenüber der kontinuierlichen eine Reihe von Vorteilen. So ist die Wahl der Ansatzfunktion nicht mehr durch die Konformitätsbedingung bzw. die Voraussetzung von Stetigkeit an den Elementrändern eingeschränkt und erlaubt eine höhere Flexibilität. Besonders attraktiv wird das Verfahren bei der Verwendung orthogonaler Funktionen, die bei einer kontinuierlichen Diskretisierung nicht zu realisieren sind. Die Massenmatrix lässt sich so vollständig entkoppeln. Dies erlaubt die Formulierung eines expliziten FE-Verfahrens, das ohne die sonst notwendige Lösung eines Gleichungssystems aufgrund der gekoppelten Massenmatrix bei z. B. Taylor- oder Petrov-Galerkin FE-Verfahren auskommt. Das RKDG-FE-Verfahren arbeitet damit bei einer expliziten Zeitintegration wesentlich effizienter als vergleichbare explizite FE-Ansätze mit einer kontinuierlichen Ortsdiskretisierung. Es ist in seiner Recheneffizienz vergleichbar mit modernen FV-Verfahren. Auch bei der Verwendung nicht-orthogonaler Ansatzfunktionen erhält man zusammen mit der DG-Ortsdiskretisierung ein elementweise entkoppeltes Gleichungssystem, das sich leicht einmalig lösen lässt.

Die Diskontinuität zwischen den Elementen wird, analog zum Vorgehen in FV-Verfahren, als Riemannproblem formuliert. Neben den Riemannlösern nach ROE (1981) oder dem HLL-Löser (HARTEN et al., 1983; TORO, 1992; FRACCAROLLO & TORO, 1995), findet das besonders einfache Verfahren nach Lax-Friedrichs im Rahmen der RKDG-Methode eine breite Anwendung (COCKBURN et al., 2000). Die RKDG-Methode kann sowohl auf strukturierten als auch unstrukturierten Berechnungsnetzen diskretisiert werden. Aus der Sicht einer späteren praktischen Anwendung auf wasserbauliche Probleme mit komplexen Geometrien erscheint die Verwendung von unstrukturierten Dreiecksnetzen im Hinblick auf eine automatische Netzgenerierung und eine einfache Netzadaptierung optimal.

Das nach der räumlichen Diskretisierung vorhandene System entkoppelter, gewöhnlicher Differentialgleichungen wird mit Hilfe von Runge-Kutta-Verfahren zeitlich explizit integriert. Grundsätzlich ist auf Basis der DG-Methode auch eine implizite Zeitintegration möglich. BASSI & REBAY (2000a, b) stellen implizite DG-Methoden für die NSG vor. Diese Verfahren sind jedoch noch nicht vollständig analysiert, stellen allerdings, besonders für stationäre Fragestellungen, mögliche Alternativen zu der im Rahmen dieser Arbeit benutzten Runge-Kutta Zeitintegration dar.

Bei rein hyperbolischen Problemstellungen können durch geeignete Slope Limiter für die RKDG-Methode Total Variation Diminishing (TVD) oder Total Variation Bounded (TVB) Eigenschaften nachgewiesen werden. Die Zugabe der durch den Slope Limiter in das Verfahren eingebrachten Dispersion und Diffusion ist im Vergleich zu Petrov-Galerkin-Verfahren wesentlich geringer und selektiver. Die hohe Konvergenzordnung des Verfahrens wird deshalb in Bereichen ohne Diskontinuitäten in der Lösung nicht beeinträchtigt. Werden die viskosen Terme in den FWG berücksichtigt, kann im Rahmen der LDG-Methode auf die Anwendung des Slope Limiters verzichtet werden. Die LDG-Methode basiert auf einer speziellen Zerlegung des Systems der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung in ein System von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung durch die Einführung von Hilfsvariablen. Die weitere Diskretisierung verläuft parallel zur RKDG-Methode.

Das RKDG-Verfahren kann wie folgt zusammengefasst werden:

1. Eine räumliche DG-Diskretisierung mit Ansatzfunktionen eines Polynomgrades k entkoppelt die partielle Differentialgleichung in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen. Für nicht-orthogonale Ansatzfunktionen ist dazu eine einmalige Matrixinvertierung auf Elementebene notwendig. Bei orthogonalen Ansatzfunktionen wird die Massenmatrix diagonal.
2. Das System gewöhnlicher Differentialgleichungen wird in der Zeit mit einer TVD-Runge-Kutta-Methode der Ordnung k+1 integriert.
3. Für rein hyperbolische Probleme wird ein TVD oder TVB Slope Limiter auf jeden Zwischenzeitschritt der Runge-Kutta-Methode angewendet. Dieser garantiert Stabilität an Stoßfronten. Auf die Anwendung des Slope Limiter kann im Rahmen der LDG-Methode bei vorhandener Viskosität verzichtet werden.

Die RKDG- oder LDG-Methode kann sowohl auf ein- als auch mehrdimensionale Gleichungen und Gleichungssysteme angewendet werden. Im Folgenden sei für die FWG die zweidimensionale Diskretisierung im Detail dargestellt. Eine eindimensionale

Diskretisierung der FWG auf Basis von orthogonalen Legendrepolynomen als Ansatzfunktionen findet sich in SCHWANENBERG & KÖNGETER (2000) und wird im Rahmen der Verifizierung eindimensionaler Testprobleme benutzt.

5.2 Räumliche Diskretisierung

Die räumliche und die zeitliche Diskretisierung können in der RKDG-Methode sehr gut voneinander getrennt werden. Als erster Schritt sei die zweidimensionale räumliche Diskretisierung der FWG vorgestellt, deren Ergebnis ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen sein wird. Zur einfacheren Handhabung werden die FWG in Vektorform dargestellt. Das zu lösende Anfangs- und Randwertproblem für die instationären Gleichungen mit Viskosität kann so im Gebiet Ω wie folgt formuliert werden:

$$\partial_t U + \nabla \cdot (F(U,\nabla U), G(U,\nabla U)) = S(U), \quad x, y \in \Omega, \quad t > 0 \tag{5.1}$$

$$U(x,y,t=0) = U_0(x,y), \quad x, y \in \Omega \tag{5.2}$$

Auf die Anfangbedingung zum Zeitpunkt $t = 0$ und die Randbedingungen auf dem Rand des Berechnungsgebietes Γ(Ω) wird gesondert in den Kapiteln 5.5 und 5.6 eingegangen.

Die Matrix-Vektoren U, F, G und S lauten auf Grundlage der konservativen FWG (2.39) - (2.41) und unter Benutzung des Wirbelviskositätsprinzips nach Boussinesq (2.49) - (2.51):

$$U = \begin{pmatrix} h \\ q_x \\ q_y \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

$$F = \begin{pmatrix} q_x \\ \frac{q_x^2}{h} + \frac{1}{2} g h^2 - 2\nu_t h \partial_x \frac{q_x}{h} \\ \frac{q_x q_y}{h} - \nu_t h (\partial_x \frac{q_y}{h} + \partial_y \frac{q_x}{h}) \end{pmatrix}, \; G = \begin{pmatrix} q_y \\ \frac{q_x q_y}{h} - \nu_t h (\partial_y \frac{q_x}{h} + \partial_x \frac{q_y}{h}) \\ \frac{q_y^2}{h} + \frac{1}{2} g h^2 - 2\nu_t h \partial_y \frac{q_y}{h} \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ gh(S_{0x} - S_{fx}) \\ gh(S_{0y} - S_{fy}) \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

mit der Wassertiefe h, den breitenbezogenen Durchflüssen q_x und q_y in x- und y-Richtung, der tiefengemittelten turbulenten kinematischen Viskosität ν_t und den Quelltermen aus Sohlneigung S_0 und Sohlreibung S_f. Gemäß der LDG-Methode kann durch Einführung der Hilfsvariablen Q, gegeben durch

$$Q - \nabla \cdot R(U) = 0 \tag{5.6}$$

mit

$$Q = \begin{pmatrix} \partial_x u \\ \partial_y u \\ \partial_x v \\ \partial_y v \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

$$R = \begin{pmatrix} \frac{q_x}{h} & 0 \\ 0 & \frac{q_x}{h} \\ \frac{q_y}{h} & 0 \\ 0 & \frac{q_y}{h} \end{pmatrix} \tag{5.8}$$

das System der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung (5.1) in ein System partieller Differentialgleichungen erster Ordnung umgewandelt werden:

$$\partial_t U + \nabla \cdot (F(U,Q), G(U,Q)) = S(U) \tag{5.9}$$

$$Q - \nabla \cdot R(U) = 0 \tag{5.10}$$

Die Wahl der Variablen Q ist hier nicht vollständig mit der von COCKBURN (1999) vorgestellten LDG-Methode konform. Das Vorgehen ist allerdings an vorgestellte Diskretisierungen der Euler- und Navier-Stokes-Gleichungen angelehnt und führte dort zu sehr guten Ergebnissen. Ein theoretischer Stabilitätsbeweis wie für die klassische LDG-Methode ist für dieses Verfahren nicht vorhanden. Der Umstand hat jedoch für die praktische Implementierungen und Benutzung der in dieser Arbeit leicht modifizierten LDG-Methode nach COCKBURN (1999) keine Auswirkungen.

Das Gleichungssystem (5.9) und (5.10) wird durch die Multiplikation einer Testfunktion ϕ und Integration über die Berechnungselemente K in die Gleichungen (5.11) und (5.12) überführt. Die Variable U wird durch die Näherungslösung U_h ersetzt.

$$\frac{d}{dt}\int_K U_h \phi \, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y + \int_K \nabla \cdot (F(U_h, Q_h), G(U_h, Q_h))\phi \, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_K S(U_h)\phi \, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \tag{5.11}$$

$$\int_K Q_h \phi \, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y - \int_K \nabla \cdot R(U_h)\phi \, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = 0 \tag{5.12}$$

Durch eine partielle Integration können die Gleichungen (5.11) und (5.12) in ihre schwache Form umgewandelt werden. Man erhält die Gleichungen (5.13) und (5.14)

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\int_K U_h \phi \, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y + \sum_{e\in\partial K}\int_e (F(U_h, Q_h)n_{e,x} + G(U_h, Q_h)n_{e,y})\phi \; \mathrm{d}\Gamma \\ &- \int_K (F(U_h, Q_h), G(U_h, Q_h))\nabla\phi \, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_K S(U_h)\phi(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \end{aligned} \tag{5.13}$$

$$\int_K Q_h \phi \; \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y - \sum_{e\in\partial K}\int_e R(U_h)\, n_e \phi \, \mathrm{d}\Gamma + \int_K R(U_h)\nabla\phi \, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = 0 \tag{5.14}$$

mit den Elementrändern e und den darauf nach außen gerichteten normierten Normalenvektoren $n_e = (n_{e,x}, n_{e,y})$. Bei Betrachtung der Linienintegrale über die Elementränder in den Gleichungen (5.13) und (5.14) fällt auf, dass der Flussterm dort nicht eindeutig definiert ist. Aufgrund der diskontinuierlichen Diskretisierung ist an dieser Stelle jeweils elementweise eine Variable vorhanden. Der Term wird deshalb durch einen numerischen Fluss H ersetzt, auf den im nächsten Abschnitt genauer eingegangen wird:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\int_K U_h \phi \; \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y + \sum_{e\in\partial K}\int_e H_U \phi \; \mathrm{d}\Gamma \\ &- \int_K (F_v(U_h, Q_h), G(U_h, Q_h))\nabla\phi \; \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_K S(U_h)\phi \; \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \end{aligned} \tag{5.15}$$

$$\int_K Q_h \phi \; \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y - \sum_{e\in\partial K}\int_e H_Q \phi \; \mathrm{d}\Gamma + \int_K R(U_h)\nabla\phi \; \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = 0 \tag{5.16}$$

Eine räumlich ausdiskretisierte Form der Gleichungen lautet nach Ersetzen der Linien- und Flächenintergrale mittels numerischer Integration (siehe Anhang B):

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\int_K U_h\phi \;\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \sum_{e\in\partial K}\sum_{l=1}^{L}\omega_l H_U(x_{el},y_{el})\phi(x_{el},y_{el})\left|e\right| \\ &-\sum_{j=1}^{J}\omega_j[F(U_h,Q_h)(x_{Kj},y_{Kj}),G(U_h,Q_h)(x_{Kj},y_{Kj})]\nabla\phi(x_{Kj},y_{Kj})\left|K\right| \\ &=\sum_{j=1}^{J}\omega_j S(U_h(x_{Kj},y_{Kj}))\phi(x_{Kj},y_{Kj})\left|K\right|\end{aligned} \tag{5.17}$$

$$\begin{aligned}&\int_K Q_h\phi \;\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \sum_{e\in\partial K}\sum_{l=1}^{L}\omega_l H_Q(x_{el},y_{el})\phi(x_{el},y_{el})\left|e\right| \\ &+\sum_{j=1}^{J}\omega_j R(U_h(x_{Kj},y_{Kj}))\nabla\phi(x_{Kj},y_{Kj})\left|K\right| = 0\end{aligned} \tag{5.18}$$

Darin bezeichnen $|K|$ und $|e|$ die Fläche des Elementes K und die Länge der Elementkante e, ω_i die Wichtungsfaktoren der Stützstellen und x_i, y_i die Koordinaten der Stützstellen l bzw. j der numerischen Integration. L und J geben die Anzahl der Stützstellen der Linien bzw. Flächenintegrale an.

Die Näherungslösungen für U_h und Q_h können in den Berechnungselementen als ein Produkt von diskreten Werten U^i und den von den Koordinatenrichtungen abhängigen Ansatzfunktionen $\varphi_i(x,y)$ ausgedrückt werden. Abhängig vom Polynomgrad der Ansatzfunktionen k haben die Variablen für eine konstante Ansatzfunktion ($k = 0$) eine Stützstelle $I = 1$, für lineare Ansatzfunktionen ($k = 1$) $I = 3$ Stützstellen und für quadratische Ansatzfunktionen ($k = 2$) $I = 6$ Stützstellen. Die Näherungslösungen U_h und Q_h können so allgemein ausgedrückt werden durch

$$U_h(x,y) = \sum_{i=0}^{I} U^i\varphi_i(x,y) \tag{5.19}$$

$$Q_h(x,y) = \sum_{i=0}^{I} Q^i\varphi_i(x,y) \tag{5.20}$$

Die Diskretisierung der Gleichungen (5.17) und (5.18) kann in einer Operatorenschreibweise zusammengefasst werden zu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(M_U U^i) = L_U(U_h,Q_h) \tag{5.21}$$

$$M_Q Q^i = L_Q(U_h) \tag{5.22}$$

mit den Termen der räumlichen Diskretisierung L und der Massenmatrix M. Da bei einem Galerkin-Verfahren die Ansatzfunktion φ und die Testfunktion ϕ identisch sind, ist die Massenmatrix gegeben durch

$$M_{ij} = \int_K v_i v_j \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \tag{5.23}$$

5.2.1 Konstante Ansatzfunktion für Dreiecke

Durch die oben angesprochene Wahl von Dreiecken als Elemente der räumlichen Diskretisierung kann die Näherungslösung im einfachsten Fall als elementweise konstant mit dem Polynomgrad $k = 0$ abgebildet werden. Damit lauten U_h und Q_h

$$U_h(x, y) = U^0 \varphi_0(x, y) \tag{5.24}$$

$$Q_h(x, y) = Q^0 \varphi_0(x, y) \tag{5.25}$$

mit der Ansatzfunktion

$$\varphi_0(x, y) = 1 \tag{5.26}$$

Die Massenmatrix berechnet sich mit der Wahl dieser Funktion zu

$$M = \int_K \varphi_0(x, y)\varphi_0(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_K 1 \cdot 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = |\, K \,| \tag{5.27}$$

Wegen $\partial_{x,y}(\varphi_0(x, y)) = 0$ entfallen die Flächenintegrale. Die ausdiskretisierten entkoppelten Gleichungen (5.17) und (5.18) lassen sich vereinfachen und lauten

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U^0 |K| + \sum_{e \in \partial K} H_U \,|\, e| = S(U^0)|K| \tag{5.28}$$

$$Q^0 |K| - \sum_{e \in \partial K} H_Q \,|\, e| = 0 \tag{5.29}$$

Die mittlere Änderung eines Variablenwertes in einem Element ist damit alleine über die Randflüsse definiert. Das RKDG-Verfahren mit konstanten Ansatzfunktionen entspricht so dem in Kapitel 4 angesprochenen Gudunov-Typ-Verfahren erster Ordnung.

5.2.2 Lineare Ansatzfunktion für Dreiecke

Zur Konstruktion einer linearen Ansatzfunktion mit dem Polynomgrad $k = 1$ sind $I = 3$ Stützstellen in Dreiecken notwendig. Durch die Wahl der Freiheitsgrade U^i und Q^i der

Näherungslösungen (5.19) und (5.20) auf den drei Seitenmittelpunkten der Dreiecke sind die Ansatzfunktionen zueinander orthogonal. Die Funktion $\varphi_i(x,y)$ nimmt am Seitenmittelpunkt m_i der Dreiecksseite i den Wert 1, an den beiden anderen Mittelpunkten den Wert 0 an. Eine exakte Formulierung der Ansatzfunktion ist in Anhang A beschrieben. Die Massenmatrix M wird mit der Wahl dieser Ansatzfunktion diagonal, gegeben durch

$$M = |K|\, diag\,(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}) \tag{5.30}$$

Die ausdiskretisierten entkoppelten Gleichungen können damit umgeformt werden zu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{3}U^i\right) = L_{U,i}(U_h, Q_h) \tag{5.31}$$

$$\frac{1}{3}Q^i = L_{Q,i}(U_h) \quad \text{mit} \quad i = 0,1,2 \tag{5.32}$$

Für die Flächenintegrale wird eine 3-Punkt-Integration verwendet. Die Linienintegrale werden mit einer 2-Punkt-Gaußintegration ausgewertet (Anhang B).

5.2.3 Quadratische Ansatzfunktion für Dreiecke

Zur Konstruktion einer quadratischen Ansatzfunktion mit dem Polynomgrad $k = 2$ sind $I = 6$ Stützstellen in Dreiecken notwendig. Dabei liegen die Freiheitsgrade U^i und Q^i der numerischen Lösung auf den Eckpunkten und den drei Seitenmittelpunkten der Dreiecke. Die Ansatzfunktion $\varphi_i(x,y)$ ist quadratisch und nimmt am Punkt i den Wert 1, an allen anderen Punkten den Wert 0 an. Für eine quadratische Ansatzfunktion gibt es keine orthogonale nodale Basis. Die in KARDIADAKIS & SHERWIN (2000) vorgestellten modalen orthogonalen Ansatzfunktionen zweiter und höherer Ordnung machen eine Transformation der Dreiecksfunktionen notwendig. Auf ihre Implementierung wird im Rahmen dieser Arbeit verzichtet, da nur maximal quadratische Ansatzfunktionen für Dreiecke untersucht werden. Eine elementweise einmalige Invertierung der Massenmatrix M erscheint hier in der Umsetzung effektiver. Im Rahmen der räumlichen Diskretisierung muss pro Zwischenzeitschritt der Runge-Kutta Zeitintegration eine Multiplikation der invertierten Massenmatrix mit den Vektoren $L_{U,Q}$ durchgeführt werden. Da es sich bei M um eine blockdiagonale Matrix handelt, kann die Multiplikation elementweise durchgeführt werden. Die Invertierung der Massenmatrix erfolgt in der Berechnung einmalig, da M nicht, wie z. B. bei Petrov-Galerkin-Verfahren, vom

Strömungszustand abhängt. Für die Flächenintegrale wird eine 7-Punkt-Integration verwendet. Die Linienintegrale werden mit einer 3-Punkt-Gaußintegration ausgewertet (Anhang B).

5.3 Der numerische Fluss

Der numerische Fluss $H(U_L, Q_L, U_R, Q_R)$ stellt, physikalisch interpretiert, den Austausch der im System konservativen Größen Masse und Impuls zwischen den Berechnungselementen dar. Im Rahmen der RKDG-Methode werden für ihn folgende Stabilitätsbedingungen gefordert:

- Konsistenz mit dem Fluss $F(U, Q)$, d. h. $H(U,Q,U,Q) = F(U,Q)$,
- eine monoton steigende Funktion für die ersten beiden Argumente U_L und Q_L,
- eine monoton fallende Funktion für die letzten beiden Argumente U_R und Q_R.

Die Berechnung des numerischen Flusses kann, wie in Kapitel 3 vorgestellt, mathematisch als ein Riemannproblem aufgefasst werden. Für Gleichung (5.9) ist dieses Anfangswertproblem definiert durch

$$\partial_t U + \partial_x F(U,Q) = 0 \tag{5.33}$$

mit

$$U,Q(t=0,x) = \begin{cases} U_L, Q_L & \text{für } x < 0 \\ U_R, Q_R & \text{für } x > 0 \end{cases} \tag{5.34}$$

Aufgrund des unterschiedlichen Charakters der konvektiven und diffusiven Anteile im numerischen Fluss werden diese getrennt berechnet. Die Flüsse der Gleichungen (5.9) und (5.10) können auf diese Weise aufgeteilt werden in

$$H_U = H_U^{konv} + H_U^{diff} \tag{5.35}$$

$$H_Q = H_Q^{diff} \tag{5.36}$$

Der konvektive Anteil H_U^{konv} stellt aufgrund seiner Nichtlinearität das wesentlich aufwendigere Problem dar. Im Zusammenhang mit den FWG wurden für ihn eine Reihe verschiedener approximierter Flüsse benutzt: die Ansätze nach Lax-Friedrichs (LF), Harten-Lax-van Leer (HLL) (HARTEN et al., 1983; TORO, 1992; FRACCAROLLO & TORO, 1995) und ROE (1981). Die in das numerische Verfahren eingebrachte Dissipation nimmt dabei vom Lax-Friedrichs-Fluss bis hin zum Fluss nach Roe ab, die

Komplexität des Riemannlösers steigt. Da nach COCKBURN (1999) die Ergebnisse der RKDG-Methode mit Ansatzfunktionen steigender Polynomgrade weniger stark von der Qualität des Riemannlösers abhängig sind, ist im Rahmen dieser Methode besonders der Fluss nach Lax-Friedrichs populär. Zu Vergleichszwecken wird außerdem der HLL-Fluss in dieser Arbeit näher vorgestellt und in die numerische Methode implementiert.

5.3.1 Lax-Friedrichs-Riemannlöser für den konvektiven Fluss

Der einfachste, die oben vorgestellten Bedingungen einhaltende, numerische Fluss ist der Lax-Friedrichs-Fluss. Bei der Annahme einer Diskontinuität parallel zur y-Achse ist er definiert durch

$$H_U^{LF}(U_L,U_R) = \frac{1}{2}(F_L^{konv} + F_R^{konv} - C(U_R - U_L)) \tag{5.37}$$

mit

$$C = \max_{\min(U_L,U_R)\leq S\leq\max(U_L,U_R)} \left|\partial_U F^{konv}(S)\right| \tag{5.38}$$

Die Variable F^{konv} bezieht sich hier nur auf den konvektiven Anteil des Flusses (5.4), gegeben ohne die viskosen Anteile durch

$$F^{konv} = \begin{pmatrix} uh \\ u^2h + \frac{1}{2}gh^2 \\ uvh \end{pmatrix} \tag{5.39}$$

Ist die Diskontinuität gegenüber der y-Achse gedreht, können die Variablen über die Gleichung (3.22) transformiert werden. Der Lax-Friedrichs-Fluss besitzt im Vergleich zu anderen numerischen Flüssen eine relativ hohe Dissipation. Diese kann durch eine Abminderung des Faktors C verringert werden (NUJIC, 1998). Das geschieht allerdings auf Kosten der vollständigen Einhaltung der Entropiebedingung und der Stabilität des Verfahrens, die mit der Formulierung gemäß Gleichung (5.38) gegeben sind.

5.3.2 HLL-Riemannlöser für den konvektiven Fluss

Der HLL-Riemannlöser basiert auf Vereinfachungen des exakten Riemannproblems nach HARTEN et al. (1983) und wurde unter anderem von TORO (1992) und FRACCAROLLO & TORO (1995) auf die FWG angewendet. Im eindimensionalen Fall lautet der numerische Fluss über die Zellengrenze

$$H_U^{HLL}(U_L,U_R)=\begin{cases}F_L^{konv} & 0\le S_L\\ F^* &, S_L<0\le S_R\\ F_R^{konv} & S_R<0\end{cases} \tag{5.40}$$

mit den Wellengeschwindigkeiten S_L, S_R und den konvektiven Anteilen der Flüsse (5.4)

$$F_L^{konv}=\begin{pmatrix}u_L h_L\\ u_L^2 h_L+\frac{1}{2}gh_L^2\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F_R^{konv}=\begin{pmatrix}u_R h_R\\ u_R^2 h_R+\frac{1}{2}gh_R^2\end{pmatrix} \tag{5.41}$$

und dem Fluss F^* zwischen den Charakteristiken. Für die beiden überkritischen Fälle ist der numerische Fluss eindeutig definiert (Gleichung (5.40) und (5.41)). Für unterkritische Abflüsse kann der Fluss F^* über die Auswertung der Integralform (3.30) der FWG approximiert werden.

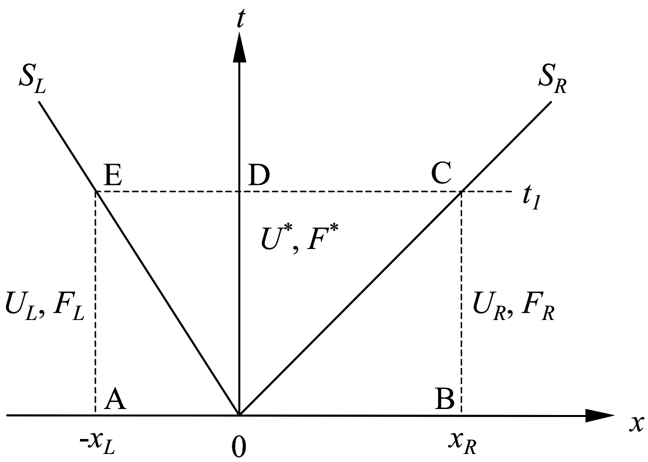

Abbildung 5.2: HLL-Ansatz für unterkritischen Abfluss

Die Auswertung der Integralform (3.30) im Kontrollvolumen A0DE (Abbildung 5.2) liefert

$$x_L(U_L-U^*)=t_1(F^*-F_L^{konv}) \tag{5.42}$$

Unter Benutzung der Wellengeschwindigkeit $S_L=x_L/t_1$ ergibt sich daraus

$$U^*=U_L+\frac{F^*-F_L^{konv}}{S_L} \tag{5.43}$$

Analog dazu liefert das Kontrollvolumen 0BCD

$$U^* = U_R + \frac{F_R^{konv} - F^*}{S_R} \tag{5.44}$$

Durch die Eliminierung von U^* aus (5.43) und (5.44) kann der numerische Fluss F^* aufgelöst werden nach

$$F^* = \frac{S_R F_L^{konv} - S_L F_R^{konv} + S_L S_R (U_R - U_L)}{S_R - S_L} \tag{5.45}$$

Mit der zusätzlichen Betrachtung der zweiten Raumdimension unter der Annahme einer Diskontinuität parallel zur y-Achse zeigt eine Analyse der Eigenwerte (Gleichung (3.12)) eine Änderung der Geschwindigkeitskomponente v an der mittleren Charakteristik mit der Wellengeschwindigkeit S_M. Die Lösung für v ist somit gegeben durch

$$v(t,x) = \begin{cases} v_L & \text{falls}\, x/t \le S_M \\ v_R & \text{falls}\, x/t > S_M \end{cases}, \tag{5.46}$$

Die Lösung der ersten zwei Komponenten von F^* im zweidimensionalen Raum ist unbeeinflusst von der Geschwindigkeitskomponente v^*. In der dritten Komponente ändert sich die Geschwindigkeit v an der mittleren Wellengeschwindigkeit S_M. Damit kann F^* in zwei Teile gemäß

$$F_L^* = \begin{pmatrix} F_1^* \\ F_2^* \\ F_1^* v_L \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F_R^* = \begin{pmatrix} F_1^* \\ F_2^* \\ F_1^* v_R \end{pmatrix} \tag{5.47}$$

aufgeteilt werden. Die Lösung des Riemannproblems ist damit in Erweiterung von Gleichung (5.45) gegeben durch

$$H_U^{HLL}(U_L, U_R) = \begin{cases} F_L^{konv} & 0 \le S_L \\ F_L^* & S_L < 0 \le S_M \\ F_R^* & S_M < 0 \le S_R \\ F_R^{konv} & S_R < 0 \end{cases}, \tag{5.48}$$

Ist die Diskontinuität zur y-Achse gedreht, können die Variablen wiederum über Gleichung (3.22) transformiert werden.

Die Wellengeschwindigkeiten S_L, S_M und S_R können unter der Annahme zweier Verdünnungsfächer (Kapitel 3.7) nach TORO (1992) ausgedrückt werden durch

$$S_L = \min(u_L - \sqrt{gh_L}, u^* - \sqrt{gh^*}) \tag{5.49}$$

$$S_M = u^* \tag{5.50}$$

$$S_R = \min(u_R + \sqrt{gh_R}, u^* + \sqrt{gh^*}) \tag{5.51}$$

mit

$$\sqrt{gh^*} = \frac{1}{2}(\sqrt{gh_L} + \sqrt{gh_R}) - \frac{1}{4}(u_R - u_L) \tag{5.52}$$

$$u^* = \frac{1}{2}(u_L + u_R) + \sqrt{gh_L} - \sqrt{gh_R} \tag{5.53}$$

Weitere mögliche Approximationen für die Wellengeschwindigkeiten, so wie die Annahme von Stoßfronten, finden sich in TORO (1992), halten aber nicht für alle Strömungszustände die Entropiebedingung ein.

Ist auf einer Seite des Berechnungsgebietes kein Wasser vorhanden, lauten die Wellengeschwindigkeiten bei trockener rechter Seite

$$S_L = u_R + 2\sqrt{gh_R} \tag{5.54}$$

$$S_M = S_L \tag{5.55}$$

$$S_R = u_L + 2\sqrt{gh_L} \tag{5.56}$$

und bei trockener linker Seite

$$S_L = u_L - \sqrt{gh_L} \tag{5.57}$$

$$S_M = S_R \tag{5.58}$$

$$S_R = u_R + \sqrt{gh_R} \tag{5.59}$$

5.3.3 Riemannlöser für den diffusiven Fluss

Der diffusive numerische Fluss kann durch eine zentrale Formulierung ausgedrückt werden. Dieser ist gegeben durch

$$H_U^{diff}(U_L, Q_L, U_R, Q_R) = \frac{1}{2}(n_{e,x} F_L^{diff} + n_{e,y} G_L^{diff} + n_{e,x} F_R^{diff} + n_{e,y} G_R^{diff}) \tag{5.60}$$

$$H_Q^{diff}(U_L, U_R) = \frac{1}{2}(n_e R_L + n_e R_R) \tag{5.61}$$

mit den diffusiven Anteilen der Flüsse

$$F^{diff} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2\nu_t h \partial_x \frac{q_x}{h} \\ -\nu_t h(\partial_x \frac{q_y}{h} + \partial_y \frac{q_x}{h}) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad G^{diff} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\nu_t h(\partial_y \frac{q_x}{h} + \partial_x \frac{q_y}{h}) \\ -2\nu_t h \partial_y \frac{q_y}{h} \end{pmatrix} \tag{5.62}$$

5.4 Zeitliche Diskretisierung

Um das in den Gleichungen (5.21) und (5.22) zusammengefasste System gewöhnlicher Differentialgleichungen in der Zeit zu integrieren, verwendet COCKBURN (1999) entsprechend der Ordnung des Polynomgrades der Ansatzfunktion k eine TVD-Runge-Kutta-Methode der Ordnung k+1. Die Zeitintegration vom alten Zeitschritt n auf den neuen Zeitschritt n+1 lässt sich schematisiert zusammenfassen zu

1. $$U_h^{(0)} = U_h^n \tag{5.63}$$

2. $$Q_h^{(l)} = L_Q(U_h^{(l)}), \quad U_h^{(i)} = \sum_{l=0}^{i-1} \alpha_{il} U_h^{(l)} + \beta_{il} \Delta t^n L_U(U_h^{(l)}, Q_h^{(l)}), \quad i = 1,\ldots,k+1 \tag{5.64}$$

3. $$U_h^{n+1} = U_h^{(k+1)} \tag{5.65}$$

Die optimalen Parameter für die Runge-Kutta-Verfahren erster bis dritter Ordnung finden sich in Tabelle 5.1. Der Parameter γ_i gibt darin den Zeitpunkt von Termen im Operator L_U an, die wie die Randbedingungen von der Zeit abhängen können. Die Zeit t eines Zwischenzeitschritts ist damit gegeben durch

$$t = t^n + \gamma_i \Delta t \tag{5.66}$$

Tabelle 5.1: Optimale Parameter für TVD-Runge-Kutta-Verfahren

Ordnung	α_{il}	β_{il}	γ_i	$\max\{\beta_{il}/\alpha_{il}\}$
1	1	1	0	1
2	1 $\frac{1}{2}\quad\frac{1}{2}$	1 $0\quad\frac{1}{2}$	0 1	1
3	1 $\frac{3}{4}\quad\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}\quad 0\quad\frac{2}{3}$	1 $0\quad\frac{1}{4}$ $0\quad 0\quad\frac{2}{3}$	0 1 $\frac{1}{2}$	1

Die TVD-Runge-Kutta-Verfahren erfüllen für die nicht negativen Parameter α_{il} aus Stabilitätsgründen (COCKBURN, 1999) die Bedingungen

$$\sum_{l=0}^{i-1} \alpha_{il} = 1 \tag{5.67}$$

und

$$\max\{\beta_{il}/\alpha_{il}\} \leq 1 \tag{5.68}$$

Runge-Kutta-Methoden mit diesen Eigenschaften bis zu einer Ordnung von fünf finden sich in SHU & OSHER (1989).

Explizite numerische Verfahren sind aus Stabilitätsgründen in der Wahl der Zeitschrittweite Δt begrenzt. Eine auf das Berechnungsnetz bezogene Kenngröße ist das nach Courant, Friedrichs und Levy benannte CFL-Kriterium. Diese Größe gibt das Verhältnis der Zeitschrittweite Δt zur charakteristischen Konvektionszeit $S/\Delta x$ durch ein Berechnungselement an. Für Dreieckselemente kann die CFL-Zahl definiert werden durch

$$CFL = \frac{2\Delta t}{|K|} \int_{\partial K} |\, S(e)\,| \mathrm{d}\Gamma \tag{5.69}$$

Die Größe $|S(e)|$ entspricht darin der absolut größten der drei Wellengeschwindigkeiten über den Rand e. Eine Abschätzung des maximalen Wertes der CFL-Zahl bei der Benutzung verschiedener Polynomgrade k der Ansatzfunktion wird wegen fehlender analytischer Untersuchungen numerisch durchgeführt.

5.5 Anfangsbedingung

Als Anfangsbedingung seien die Größen $U_0(x,y)$ zum Zeitpunkt t = 0 gegeben. Die Freiheitsgrade U^i der approximierten Variablen U_h genügen dann der Gleichung

$$MU^i(t=0) = \int_K U_0(x,y)\varphi_i(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{5.70}$$

Die Größen U^i lassen sich somit bei der Benutzung orthogonaler Ansatzfunktionen direkt, bei nicht-orthogonalen Funktionen nach einer Invertierung der Massenmatrix M und Multiplikation mit ihrer Inversen M^{-1} berechnen.

5.6 Randbedingungen

Die Implementierung der Randbedingungen in den numerischen Algorithmus erfolgt bei der RKDG-Methode relativ problemlos während der Berechnung des Operators L, d. h. in jedem Zwischenzeitschritt des Runge-Kutta-Verfahrens. Bei zeitlich veränderlichen Randbedingungen ist darauf zu achten, den jeweiligen Wert gemäß Tabelle 5.1 dem Zeitpunkt des entsprechenden Zwischenzeitschritts des Runge-Kutta-Verfahrens anzupassen. Damit erfolgt eine Berücksichtigung der Randbedingungen analog zur Ordnung k+1 der zeitlichen und räumlichen Ordnung des Verfahrens.

5.6.1 Einlaufrandbedingung

Der Einlaufrand ist durch einen Massenfluss in das Berechnungsgebiet definiert. Die Anzahl der anzusetzenden Randbedingungen ist direkt von dem dort vorhandenen Strömungszustand abhängig (Tabelle 5.2). Pro in das Berechnungsgebiet gerichteter Charakteristik muss ein Wert vorgegeben werden. Dabei ist die Charakteristik gemäß den Eigenvektoren in Gleichung (3.25) in Normalenrichtung zum Rand maßgebend.

Tabelle 5.2: Anzahl der Ein- und Auslaufrandbedingungen für tiefengemittelte Berechnungen

	1D		2D	
	$Fr < 1$	$Fr > 1$	$Fr < 1$	$Fr > 1$
Einlauf	1	2	2	3
Auslauf	1	0	1	0

Am Einlaufrand werden bei unterkritischem Abfluss typischerweise die breitenbezogenen Durchflüsse $q_{x,RB}$ und $q_{y,RB}$ in x- und y-Richtung als Randbedingungen vorgegeben. Der konvektive numerische Fluss über den Einlaufrand kann damit berechnet werden zu

$$H_{Einlauf}^{konv} = F(h_{\text{int}}, q_{x,RB}, q_{y,RB}) \tag{5.71}$$

mit der Wassertiefe h_{int} aus dem Berechnungsgebiet. Bei praktischen Berechnungen wird die Durchflusskomponente parallel zum Rand häufig zu Null gesetzt. Für überkritischen Abfluss wird die Wassertiefe zusätzlich als Randbedingung vorgegeben

$$H_{Einlauf}^{konv} = F(h_{RB}, q_{x,RB}, q_{y,RB}) \tag{5.72}$$

Wird in der Berechnung Viskosität berücksichtigt, kann der diffusive Fluss über die Ränder des Berechnungsgebiets durch die inneren Werte im Gebiet definiert werden. Dieses Vorgehen gilt auch für die Auslauf- und Wandrandbedingung.

5.6.2 Auslaufrandbedingung

Am Auslaufrand, der durch einen Massenfluss aus dem Berechnungsgebiet definiert ist, wird bei unterkritischem Abfluss ein Wasserspiegel bzw. die Wassertiefe h_{RB} vorgegeben. Mit der Randbedingung h_{RB} ergibt sich der konvektive Fluss zu

$$H_{Auslauf}^{konv} = F(h_{RB}, q_{x,\text{int}}, q_{y,\text{int}}) \tag{5.73}$$

mit den breitenbezogenen Durchflüssen $q_{x,int}$ und $q_{y,int}$ aus dem Berechnungsgebiet. Bei überkritischem Abfluss braucht am Auslaufrand keine Randbedingung vorgegeben zu werden, da sämtliche Charakteristiken aus dem Berechnungsgebiet heraus zeigen (Kapitel 3.2). Der Fluss über den Rand ist definiert durch

$$H_{Auslauf}^{konv} = F(h_{\text{int}}, q_{x,\text{int}}, q_{y,\text{int}}) \tag{5.74}$$

5.6.3 Wandrandbedingung

Ein geschlossener Rand wird über eine Spiegelung der internen Variablen parallel zum Rand und die anschließende Berechnung des numerischen Flusses implementiert. Ist die Wand reibungsbehaftet, können die Schubspannungen entsprechend der Gleichung (5.4) gesetzt werden. Alternativ kann die Wandreibung nach MOLLS et al. (1998) bei schmalen Gerinnen über ihre Verteilung über den Fließquerschnitt realisiert werden.

5.7 Limiter-Funktionen

Der in der RKDG-Methode verwendete Slope Limiter hat eine große Ähnlichkeit mit dem von ALCRUDO & GARCIA-NAVARRO (1993) für die FWG verwendeten MUSCL-Limiter. Er ist jedoch weniger restriktiv und erlaubt zusätzlich durch die begrenzte

Verletzung der TVD-Bedingung, d. h. eine geringe Vergrößerung der Totalen Variation, qualitativ bessere Ergebnisse an Extrema und Diskontinuitäten. Das Prinzip des Slope Limiters der RKDG-Methode ist, verglichen mit dem MUSCL-Limiter, beispielhaft für eine skalare eindimensionale Größe u in Abbildung 5.3 skizziert. Für eine lineare Elementfunktion ist die Begrenzung des Gradienten einer Variablen unter Berücksichtigung der Elementmittelwerte der Nachbarzellen dargestellt.

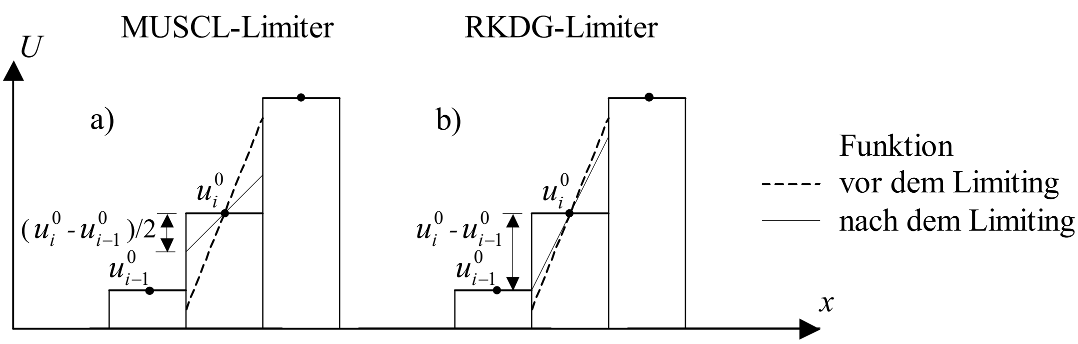

Abbildung 5.3: Slope Limiter für eindimensionale Elemente, a) MUSCL-Limiter, b) RKDG-Limiter

Der RKDG Slope Limiter kann für zweidimensionale Dreiecksnetze auf die gleiche Weise formuliert werden. Er erfordert allerdings wegen der komplexeren Dreiecksgeometrie einige Erweiterungen. Zusätzlich muss berücksichtigt werden, dass es sich gegenüber dem oben vorgestellten Limiter für skalare Probleme bei den FWG um ein System gekoppelter Differentialgleichungen handelt.

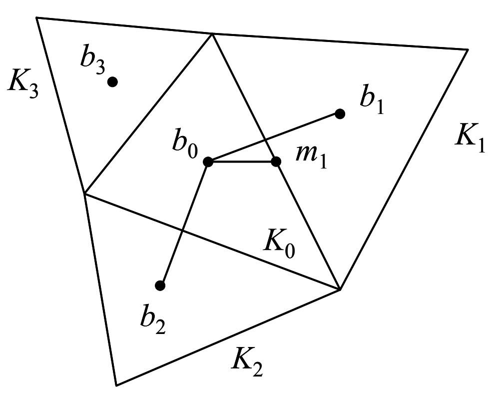

Abbildung 5.4: Slope Limiter am Dreieck

Aus der Geometrie in Abbildung 5.4 können über die Aufstellung der Gleichung

$$m_1 - b_0 = \alpha_1(b_1 - b_0) + \alpha_2(b_2 - b_0) \tag{5.75}$$

die nicht-negativen Parameter $\alpha_1 \geq 0$ und $\alpha_2 \geq 0$ berechnet werden. Für eine durchgängige, lineare Funktion U_h über alle betrachteten Dreiecke gilt somit ebenfalls

$$\Delta\overline{U}(m_1, K_0) = \alpha_1(U_h(b_1) - U_h(b_0)) + \alpha_2(U_h(b_2) - U_h(b_0)) \tag{5.76}$$

Mit den Elementmittelwerten

$$\overline{U}_{Ki} = \frac{1}{|K_i|}\int_{K_i} U_h \,\mathrm{d}\Omega \tag{5.77}$$

ergibt sich daraus der mittlere Gradient zum Punkt m_1 auf Grundlage der Elementmittelwerte

$$\Delta\overline{U}(m_1, K_0) = \alpha_1(\overline{U}_{K1} - \overline{U}_{K0}) + \alpha_2(\overline{U}_{K2} - \overline{U}_{K0}) \tag{5.78}$$

Berücksichtigt man alleine die Ansatzfunktionen im Dreieck K_0, lautet der Gradient vom Elementmittelpunkt zu Punkt m_1

$$\widetilde{U}_h(m_1, K_0) = U_h(m_1) - U_{K0} \tag{5.79}$$

Diese Berechnung kann analog für die weiteren Seiten m_i durchgeführt werden. Das Slope Limiting wird, da es sich um ein System von partiellen Differentialgleichungen handelt, in den charakteristischen Variablen V durchgeführt. Die Transformation in den charakteristischen Raum wird, jeweils entsprechend der betrachteten Dreiecksseite, mit folgender Jacobimatrix durchgeführt

$$\partial_U[F(\overline{U}_{K0}), G(\overline{U}_{K0})] \cdot \frac{m_i - b_0}{|m_i - b_0|} \tag{5.80}$$

Die Transformationsmatrizen ergeben sich daraus analog zu den in Kapitel 3 und 4 durchgeführten Überlegungen. Für die lokal entkoppelte Variablen V kann nun komponentenweise der Gradient $\Delta_{c,i}$ der Variablen in Richtung der Seitenmittelpunkte m_i bestimmt werden

$$\Delta_{c,i} = \widetilde{m}(\widetilde{V}_h(m_i, K_0), \nu_L\, \Delta\overline{V}(m_i, K_0)) \tag{5.81}$$

mit $\nu_L > 1$. Der Parameter ν_L wird nach COCKBURN (1999) zu $\nu_L = 1{,}5$ gesetzt. Die Funktion $\widetilde{m}$ ist eine TVB korrigierte *minmod* Funktion, gegeben durch

$$\widetilde{m}(a_1, a_2) = \begin{cases} a_1 & \text{falls} |a_1| \leq M_L(\Delta x)^2 \\ m(a_1, a_2), & \text{sonst} \end{cases} \tag{5.82}$$

mit dem Parameter M_L und der *minmod* Funktion

$$m(a_1, a_2) = \begin{cases} s \min_{1\le n\le 2} |a_n| & \text{falls } s = sign(a_1) = sign(a_2) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{5.83}$$

Der strikte TVD-Limiter kann so durch einen TVB-Limiter ersetzt werden. Dieser erlaubt eine begrenzte Verletzung der TVD-Bedingung und damit eine durch den Parameter M_L kontrollierte Vergrößerung der Totalen Variation. Die Qualität der Lösungen kann damit besonders an Diskontinuitäten und Extremwerten gesteigert werden. Wie in Kapitel 6 noch näher vorgestellt wird, erlaubt der TVB-Limiter im Gegensatz zum klassischen TVD-Limiter die Erhaltung der vollen Konvergenzordnung an Extrema der Lösung.

Gilt nach dem Ausführen des Limiters (Gleichung (5.81)) die Bedingung

$$\sum_{i=1}^{3} \Delta_{c,i} = 0 \tag{5.84}$$

wurde kein Limiting durchgeführt. Ist der Wert der linken Seite von Gleichung (5.84) ungleich Null, fand ein Limiting statt, und die noch unveränderten Gradienten $\Delta_{c,i}$ müssen zur Erhaltung von Masse und Impuls im Element modifiziert bzw. ebenfalls abgemindert werden. Nach der Berechnung von

$$pos = \sum_{i=1}^{3} \max(0, \Delta_{c,i}) \quad \text{und} \quad neg = \sum_{i=1}^{3} \max(0, -\Delta_{c,i}) \tag{5.85}$$

und der Definition von

$$\theta^+ = \min(1, \frac{neg}{pos}) \quad \text{und} \quad \theta^- = \min(1, \frac{pos}{neg}) \tag{5.86}$$

können die korrigierten Differenzen $\hat{\Delta}_{c,i}$ der charakteristischen Variablen berechnet werden durch

$$\hat{\Delta}_{c,i} = \theta^+ \max(0, \Delta_{c,i}) - \theta^- \max(0, -\Delta_{c,i}) \tag{5.87}$$

Nach der Rücktransformation dieser Werte aus dem charakteristischen Raum ergeben sich die Variablen der korrigierten Seitenmittelpunkte zu

$$U_{mi} = U_{K0} + \hat{\Delta}_i \tag{5.88}$$

Für quadratische Ansatzfunktionen mit einem Polynomgrad von $k = 2$ können die Werte der Dreieckseckpunkte unter Ansatz einer linearen Funktion im Dreieck extrapoliert werden, wenn ein Limiting durchgeführt wurde.

5.7.1 Einfluss der Sohlneigung

Der oben beschriebene Slope Limiter kann in Verbindung mit starken Sohlneigungen, insbesondere mit starken Sohlneigungsänderungen, zu unplausiblen Ergebnissen führen.

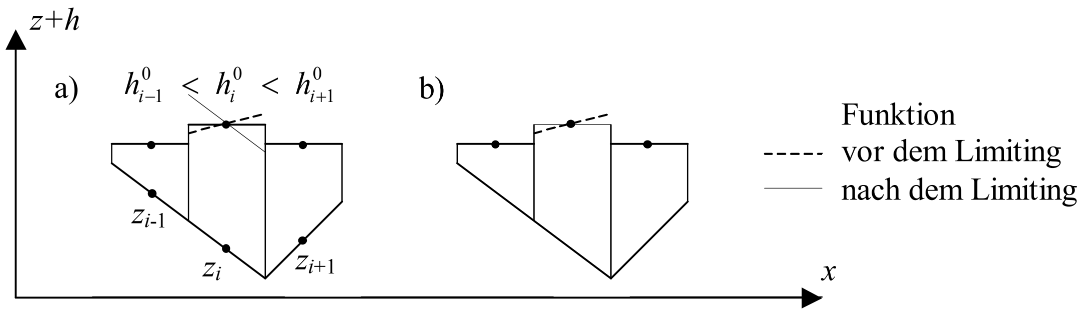

Abbildung 5.5: Slope Limiting bei Nullabfluss in einem Gerinne mit starker Sohlneigung, a) normaler RKDG-Limiter, b) modifizierter RKDG-Limiter

So liefert der beschriebene Slope Limiter (5.81) bei starken Sohlneigungsänderungen und Extrema der Wassertiefe im Gerinne nach dem Limiting der Variablen einen konstanten Wert für die Wassertiefe im Element und somit stark schwankende Wasserspiegel (Abbildung 5.5). Eine Korrektur auf einen konstanten Wasserspiegel wäre aber zumindest für

- Nullabfluss im Gerinne (der konstante Wasserspiegel stellt die analytische Lösung des Problems dar),
- langsamen Gerinneabfluss ($Fr < Fr_{Lim}$) mit starker ungleichförmiger Strömung aufgrund von starken Sohlneigungsänderungen,

eine bessere oder korrekte Näherung. Der Slope Limiter kann hier durch einen Austausch der Wassertiefe h mit einem lokalen Wasserspiegel ξ', definiert durch

$$h \rightarrow \xi' = z' + h \tag{5.89}$$

mit der lokalen Sohlhöhe $z'=0$ am Mittelpunkt des Elements realisiert werden. Die Transformation in die charakteristischen Variablen ist davon durch die Benutzung des lokalen Wasserspiegels nicht beeinflusst. Bei horizontaler Sohle sind die beiden Ansätze identisch.

6 Verifizierung des numerischen Algorithmus

Das folgende Kapitel behandelt die Verifizierung der RKDG-Methode in Anwendung auf die FWG. Die Untersuchung findet hauptsächlich über die Abschätzung des Diskretisierungsfehlers, d. h. die Quantifizierung der Differenz zwischen der numerischen Lösung und der analytischen Lösung des mathematischen Modells, statt. Anhand von systematisch verfeinerten Netzen kann so die Konvergenz und die Konvergenzordnung des numerischen Verfahrens für verschiedene Testprobleme nachgewiesen werden. Nach der Untersuchung der Effizienz der RKDG-Methode im Vergleich mit anderen numerischen Verfahren auf der Basis einer instationären, unterkritischen Strömung, werden schwerpunktmäßig transkritische und stark instationäre Testprobleme behandelt. Anhand des Diskretisierungsfehlers wird die Wahl unterschiedlicher Ansatzfunktionen und numerischer Flüsse diskutiert. Die ersten vier eindimensionalen Testprobleme, für die analytische Lösungen existieren, werden dabei mit einer eindimensionalen Version der im Kapitel 5 vorgestellten zweidimensionalen RKDG-Methode berechnet (vgl. SCHWANENBERG & KÖNGETER, 2000). Die Rotationssymmetrie des zweidimensionalen Testproblems 5, für das keine analytische Lösung existiert, erlaubt den Vergleich der zweidimensionalen Berechnungsergebnisse mit der numerischen Lösung des analogen quasi-eindimensionalen Problems. In sämtlichen Testproblemen wird aufgrund der untersuchten Strömungen der in Kapitel 5.6 vorgestellte Standardlimiter eingesetzt.

6.1 Testproblem 1: Effizienz des Verfahrens

Mit Testproblem 1 wird die Effizienz der RKDG-Methode im Hinblick auf Ansatzfunktionen verschiedener Polynomgrade k und im Vergleich zu anderen numerischen Verfahren untersucht. Die im Rahmen der eindimensional diskretisierten RKDG-Methode (SCHWANENBERG & KÖNGETER, 2000) verwendeten Ansatzfunktionen basieren auf konstanten ($k = 0$), linearen ($k = 1$), quadratischen ($k = 2$) und kubischen ($k = 3$) orthogonalen Legendrepolynomen und sind im Folgenden auch als RKDG0-, RKDG1-, RKDG2- und RKDG3-Methode bezeichnet. Alternativ wird ein Finite-Differenzen WENO- (Weighted-Essentially-Non-Oscillatory-) Verfahren mit einem Flux Splitting nach Roe (SHU, 1999) eingesetzt. Es besitzt eine räumliche Ordnung von drei oder fünf. Die zeitliche Integration erfolgt mit Hilfe von Runge-Kutta-Verfahren dritter oder vierter Ordnung. Weiterhin wird das klassische, schon in Kapitel 4 vorgestellte MacCormack-Verfahren zweiter Ordnung implementiert.

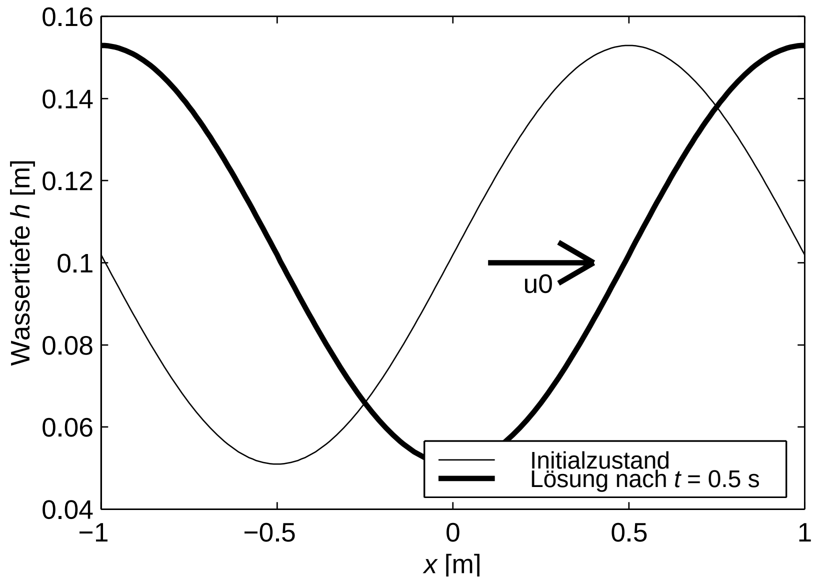

Abbildung 6.1: Testproblem 1, Initialzustand der Wassertiefe und Lösung nach t = 0,5 s

Mit dem eindimensionalen Testproblem 1 wird der advektive Transport einer Sinus-welle in einem Berechnungsinterval $x = [-1,1]$ mit periodischen Randbedingungen untersucht. Die Anfangsbedingungen für die Wassertiefe h_0 und den breitenbezogenen Durchfluss q_0 sind definiert durch

$$h_0(x) = \frac{1}{g}(1 - d\sin(\pi(x-1))) \tag{6.1}$$

$$q_0(x) = u_0 h_0(x) \tag{6.2}$$

mit der Amplitude der Wassertiefe d und der Transportgeschwindigkeit u_0. Unter der Voraussetzung eines zusätzlichen, künstlichen Quellterms in der Impulsgleichung gemäß

$$S = -d\pi\cos(\pi(x - u_0 t))gh(t,x) \tag{6.3}$$

kann die Funktion der Wassertiefe h und des breitenbezogenen Durchflusses q bis auf eine Verschiebung um den Wert u_0 in die positive x-Richtung erhalten bleiben. Die analytische Lösung des Testproblems lautet damit:

$$h(t,x) = \frac{1}{g}(1 - d\sin(\pi(x - 1 - u_0 t))) \tag{6.4}$$

$$q(t,x) = u_0 h(t,x) \tag{6.5}$$

Mit der analytischen Lösung kann der Diskretisierungsfehler L^n des numerischen Verfahrens über eine Integralnorm der Dimension n im Intervall $x \in [x1, x2]$ wie folgt bestimmt werden:

$$L^n = \left(\int_{x1}^{x2} \left| u_h - u_{an} \right|^n \mathrm{d}x \right)^{1/n} \tag{6.6}$$

Mit der Wahl von $n = 1$ entspricht L^1 so der absoluten Fläche zwischen der numerischen Lösung u_h und der analytischen Lösung u_{an}. Bei der Wahl von $n = 2$ ist L^2 gleich der Summe der Fehlerquadrate des Diskretisierungsfehlers. Mit $n = \infty$ liefert Gleichung (6.6) den größten absoluten Fehler im betrachteten Intervall. Die Konvergenzordnung p ist auf der Grundlage des Fehlers L^n einer Netzverfeinerung von Netz 1 zu Netz 2 um den Faktor r gegeben durch

$$p(n) = \frac{\log\left(L^n_{Netz1} / L^n_{Netz2}\right)}{\log r} \tag{6.7}$$

Bei einer Halbierung der Netzweite beträgt der Verfeinerungsfaktor $r = 2$.

Die numerische Lösung des Testproblems wird bis zum Zeitpunkt $t = 0{,}5$ s auf einem äquidistanten Netz mit N Berechnungselementen bestimmt und mit der analytischen Lösung verglichen. Als numerischer Fluss wird der HLL-Fluss verwendet. Dabei werden gemäß Tabelle 6.1 für die verschiedenen benutzten Polynomgrade k der Ansatzfunktion CFL-Zahlen verwendet, die in etwa 90 % der in numerische Experimenten ermittelten, maximal möglichen Zeitschrittweite entsprechen.

Tabelle 6.1: Maximale und verwendete CFL-Zahl für die RKDG-Methode mit Ansatzfunktionen unterschiedlicher Polynomgrade k

	maximale CFL-Zahl	verwendete CFL-Zahl
$k = 0$	1,00	0,90
$k = 1$	0,33	0,30
$k = 2$	0,20	0,18
$k = 3$	0,16	0,15

Die L^∞- und L^1-Fehler und die daraus errechneten Konvergenzraten für Testproblem 1 sind in den Tabellen 6.2 bis 6.5 für die Polynomgrade $k = 0$ bis $k = 3$ aufgeführt. Der Limiter-Parameter M_L wird für die Berechnungen mit Ansatzfunktionen $k > 0$ zu $M_L = 1$ gesetzt. Ein Limiting findet bei dieser Größenordnung des Parameters M_L nicht statt und ist hier wegen der vorhandenen glatten Lösung aus Stabilitätsgründen nicht notwendig. Sowohl der L^∞- als auch der L^1-Fehler verringern sich bei einer systematischen Netzverfeinerung um einen Faktor $r = 2$ mit der Konvergenzordnung k+1.

Tabelle 6.2: Testproblem 1, rel. Fehler der Wassertiefe, RKDG0 (k = 0), HLL-Fluss

N	$10^6 \cdot L^\infty$-Fehler	Ordnung p	$10^6 \cdot L^1$-Fehler	Ordnung p
10	29456,66	-	43762,73	-
20	16832,20	0,81	23046,83	0,93
40	8895,44	0,92	11868,80	0,96
80	4559,56	0,96	6023,35	0,98
160	2306,80	0,98	3037,46	0,99
320	1160,52	0,99	1525,08	0,99

Tabelle 6.3: Testproblem 1, rel. Fehler der Wassertiefe, RKDG1 (k = 1), HLL-Fluss, $M_L = 1$

N	$10^6 \cdot L^\infty$-Fehler	Ordnung p	$10^6 \cdot L^1$-Fehler	Ordnung p
10	2644,80	-	2376,14	-
20	753,07	1,81	579,54	2,04
40	199,27	1,92	140,55	2,04
80	50,79	1,97	34,43	2,03
160	12,78	1,99	8,51	2,02
320	3,20	2,00	2,12	2,01

Tabelle 6.4: Testproblem 1, rel. Fehler der Wassertiefe, RKDG2 (k = 2), HLL-Fluss, $M_L = 1$

N	$10^6 \cdot L^\infty$-Fehler	Ordnung p	$10^6 \cdot L^1$-Fehler	Ordnung p
10	221,04	-	133,86	-
20	29,66	2,90	16,47	3,02
40	3,75	2,99	1,92	3,10
80	0,46	3,03	0,22	3,10
160	0,056	3,04	0,027	3,04
320	0,0068	3,03	0,0033	3,02

Tabelle 6.5: Testproblem 1, rel. Fehler der Wassertiefe, RKDG3 (k = 3), HLL-Fluss, $M_L = 1$

N	$10^6 \cdot L^\infty$-Fehler	Ordnung p	$10^6 \cdot L^1$-Fehler	Ordnung p
10	9,80	-	5,00	-
20	0,57	4,10	0,29	4,13
40	0,037	3,94	0,017	4,07
80	0,0023	4,01	0,0010	4,02
160	-	-	-	-
320	-	-	-	-

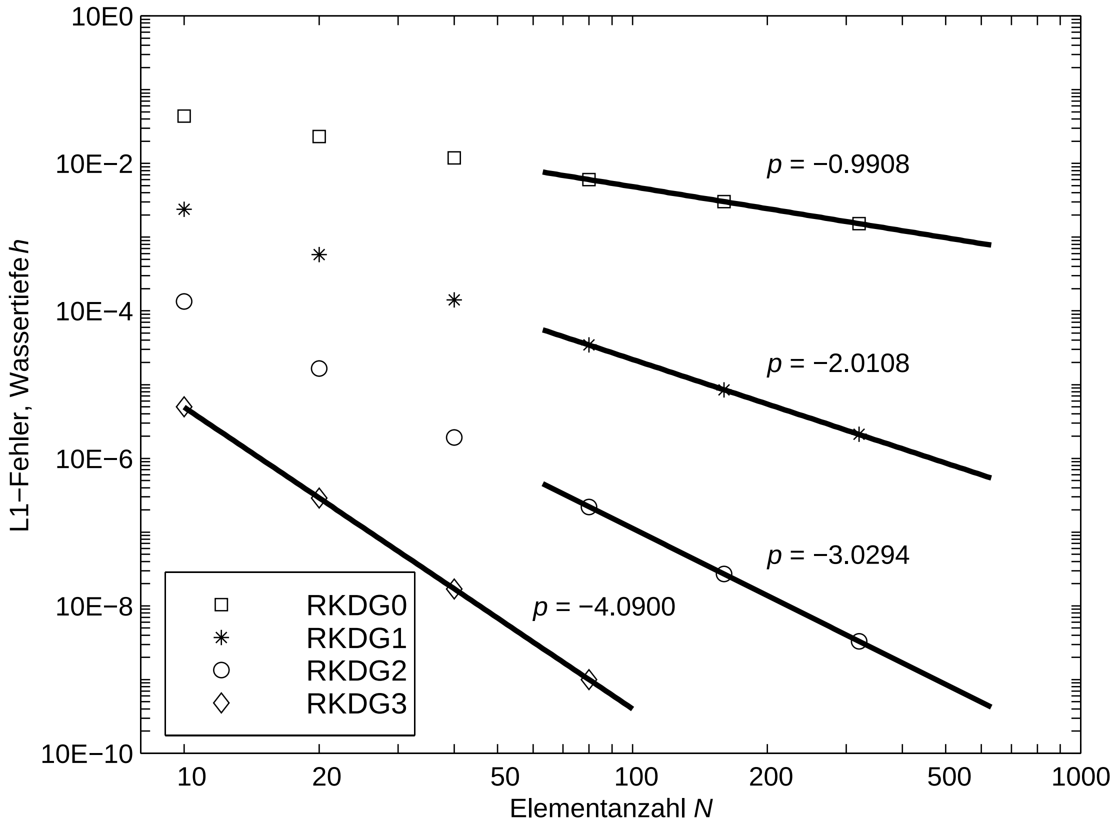

Abbildung 6.2: Testproblem 1, L^1-Fehler und Konvergenzverhalten der Wassertiefe für die RKDG-Methode mit konstanten bis kubischen Ansatzfunktionen

In Abbildung 6.2 ist der L^1-Fehler und seine Konvergenz graphisch aufbereitet. Die Konvergenzordnung p ist als Mittel über die jeweils drei am höchsten aufgelösten Netze dargestellt.

Betrachtet man bei einem Netz mit $N = 10$ Berechnungselementen die Verringerung des Diskretisierungsfehlers bei einer Erhöhung des Polynomgrads k im Element, verringert sich der L^{∞}- und L^1-Diskretisierungsfehler um einen Faktor f zwischen 11,14 und 8752,58 im Vergleich zum RKDG0-Verfahren mit $k = 0$ (Tabelle 6.6). Diese Faktoren vergrößern sich bei der Betrachtung feinerer Berechnungsnetze, da der Diskretisierungsfehler bei den Verfahren mit einer höheren Konvergenzordnung schneller gegen Null strebt als bei den Verfahren einer niedrigeren Ordnung.

Tabelle 6.6: Testproblem 1, L^{∞}- und L^1-Fehler mit $N = 10$, $k = 0, 1, 2, 3$

k	$10^6 \cdot L^{\infty}$-Fehler	Faktor f	$10^6 \cdot L^1$-Fehler	Faktor f
0	29456,66	-	43762,73	-
1	2644,80	11,14	2376,14	18,42
2	221,04	133,35	133,86	326,95
3	9,80	3008,28	5,00	8752,58

Die Verfahren mit den niedrigeren Ansatzfunktionen sind weniger komplex und benötigen auf dem gleichen Berechnungsnetz eine geringere Ausführungszeit. Unter der Annahme einer Konvergenzordnung von $p = 1$ für das Verfahren erster Ordnung (RKDG0, $k = 0$) kann über die Gleichung

$$N^* = N\, r^{\left(\frac{\lg(f)}{\lg(r^p)}\right)} \tag{6.8}$$

die Anzahl der Berechnungselemente N^* bestimmt werden, für die dieses Verfahren die gleiche Genauigkeit besitzt wie das entsprechende Verfahren mit einer höheren Ansatzfunktion auf einem Berechnungsnetz mit $N = 10$ Elementen. Bei der Halbierung der Elementweite kommt es wegen der Verdoppelung der Elementanzahl und der daraus resultierenden Halbierung der Zeitschrittweite unter Beibehaltung einer konstanten CFL-Zahl zu einer Vervierfachung der Ausführungszeit. Die relativen Ausführungszeiten für das RKDG0-Verfahren sind im Vergleich mit den höherpolynomialen Berechnungen auf einem Netz von $N = 10$ Elementen ebenfalls in Tabelle 6.7 aufgeführt.

Tabelle 6.7: Testproblem 1, Effizienz höherpolynomialer Ansatzfunktionen, $N = 10$, $M_L = 1$

k	Zeit [-]	N^* ($k = 1$)	Zeit (N^*) [-]	Effizienz [-]
0	1,00	-	-	-
1	8,60	111 / 182	124,10 / 339,27	14,43 / 39,45
2	35,75	1334 / 3270	$1{,}78\ 10^4$ / $1{,}07\ 10^5$	497,40 / 2990,11
3	52,48	30083 / 87526	$9{,}05\ 10^6$ / $7{,}66\ 10^7$	$1{,}72\ 10^5$ / $1{,}46\ 10^6$

Als Effizienz sei der Quotient der unterschiedlichen Ausführungszeiten zweier Verfahren bei einem gleich großen Diskretisierungsfehler definiert. Aus Tabelle 6.7 ist klar ersichtlich, dass die Benutzung von Ansatzfunktionen eines höheren Polynomgrades k bei glatten Lösungen wesentlich effizienter und damit schneller zu einem Ergebnis der gleichen Genauigkeit führt als die Verwendung einer konstanten Ansatzfunktion mit $k = 0$.

In Tabelle 6.8 und Tabelle 6.9 sind die L^∞- und L^1-Diskretisierungsfehler für einen Limiter-Parameter $M_L = 0$ angegeben. Der Limiter erfüllt mit dieser Parametrisierung die strengere TVD-Bedingung im Gegensatz zu der in den oben vorgestellten Berechnungen benutzten TVB-Bedingung. Eine Vergrößerung des Diskretisierungsfehlers ist besonders bei den gröberen Netzen deutlich zu erkennen. Der maximale Diskretisierungsfehler im Berechnungsgebiet steigt bei der Benutzung einer linearen Ansatzfunktion ($k = 1$) um einen Faktor von ungefähr drei. Die Konvergenzordnung bleibt mit zwei im Vergleich zum TVB-Limiter erhalten. Der L^1-Fehler ist bei den groben Netzen ebenfalls um einen Faktor von drei größer. Dieser Fehler verringert sich allerdings bei den feineren Netzen auf einen Faktor von nur noch 1,06. Die Konvergenzordnung ist aus diesem Grund höher als bei der Benutzung des TVB-Limiter; die Qualität der Ergebnisse insgesamt allerdings schlechter. Der größere Diskretisierungsfehler in der L^∞- und L^1-Fehlernorm ist durch die Anwendung des Limiters an den Extrema der Lösung und dem damit verbundenen Verlust an Genauigkeit begründet.

Tabelle 6.8: Testproblem 1, relativer Fehler der Wassertiefe, RKDG1 (k = 1), M_L = 0

N	$10^6 \cdot L^\infty$-Fehler	Ordnung p	$10^6 \cdot L^1$-Fehler	Ordnung p
10	6629,39	-	6440,79	-
20	1888,97	1,81	1278,73	2,33
40	474,99	1,99	226,39	2,50
80	117,04	2,02	44,21	2,36
160	29,22	2,00	9,62	2,20
320	7,37	1,99	2,25	2,09

Bei der Benutzung der RKDG2-Methode einer quadratischen Ansatzfunktion ($k = 2$) bewegt sich der L^∞-Fehler in etwa auf dem Niveau des RKDG1-Verfahrens. Die Konvergenzordnung liegt ebenfalls bei $p = 2$ und ist damit um eine Ordnung kleiner als bei der Verwendung des weniger restriktiven TVB-Limiters. Der L^1-Fehler entspricht bei einem Netz mit $N = 10$ Berechnungselementen dem Fehler des RKDG1-Verfahrens. Mit der Verfeinerung des Berechnungsnetzes strebt der Fehler aufgrund der höheren Konvergenzordnung von annähernd $p = 3$ schneller gegen Null. Er ist allerdings im Gegensatz zum RKDG2-Verfahren mit TVB-Limiter ($L^1 = 0{,}0033 \cdot 10^{-6}$) um einen Faktor 121 größer.

Tabelle 6.9: Testproblem 1, relativer Fehler der Wassertiefe, RKDG2 (k = 2), M_L = 0

N	$10^6 \cdot L^\infty$-Fehler	Ordnung p	$10^6 \cdot L^1$-Fehler	Ordnung p
10	6645,90	-	6429,20	-
20	1895,10	1,81	1249,82	2,36
40	474,12	2,00	183,00	2,77
80	119,52	1,99	23,22	2,98
160	29,82	2,00	3,10	2,91
320	7,42	2,01	0,40	2,94

Zusammengefasst ist die Benutzung von höherpolynomialen Ansatzfunktionen im Testproblem 1 mit einer glatten Lösung wesentlich effizienter als die Verwendung von Ansatzfunktionen mit einem niedrigen Polynomgrad. Eine Voraussetzung dafür ist die Anwendung des weniger restriktiven TVB-Limiters, der eine kontrollierte Verletzung der TVD-Bedingung zulässt.

Zum Vergleich der Leistungsfähigkeit der RKDG-Methode mit anderen modernen numerischen Verfahren werden für Testproblem 1 Vergleichsrechnungen mit einem WENO- (Weighted-Essentially-Non-Oscillatory-) Verfahren mit Flux Splitting nach Roe (SHU, 1999) durchgeführt. Das im Folgenden als W33 bezeichnete Verfahren besitzt eine Konsistenzordnung von drei in Raum und Zeit. Das mit W45 benannte Verfahren hat eine räumliche Konsistenz fünfter Ordnung und eine zeitliche Konsistenz vierter Ordnung.

Tabelle 6.10: Testproblem 1, relativer Fehler der Wassertiefe, W33

N	$10^6 \cdot L^\infty$-Fehler	Ordnung p	$10^6 \cdot L^1$-Fehler	Ordnung p
10	7942,92	-	10583,19	-
20	2144,10	1,89	2273,59	2,22
40	622,56	1,78	510,17	2,16
80	157,83	1,98	84,35	2,60
160	25,67	2,62	10,28	3,04
320	1,54	4,06	1,10	3,23

Tabelle 6.11: Testproblem 1, relativer Fehler der Wassertiefe, W45

N	$10^6 \cdot L^\infty$-Fehler	Ordnung p	$10^6 \cdot L^1$-Fehler	Ordnung p
10	1457,29	-	1520,86	-
20	131,61	3,47	81,74	4,22
40	6,06	4,44	2,88	4,83
80	0,13	5,56	0,084	5,11
160	-	-	-	-
320	-	-	-	-

In Tabelle 6.10 und Tabelle 6.11 sind die L^∞- und L^1-Diskretisierungsfehler der W33- und W45-Verfahren und ihre Konvergenzordnungen für das Testproblem 1 dargestellt. Sowohl W33 als auch W45 entsprechen bei einer feiner werdenden Diskretisierung in ihrer Konvergenz der räumlichen Konsistenz des jeweiligen Verfahrens.

Weiterhin wird das klassische, schon in Kapitel 4 vorgestellte MacCormack-Verfahren zweiter Ordnung in Raum und Zeit implementiert. Die L^∞- und L^1-Diskretisierungsfehler und die Konvergenzordnungen von konstant $p = 2$ sind in Tabelle 6.12 aufgetragen und entsprechen für die untersuchte glatte Lösung des Testproblems 1 ebenfalls der Konsistenzordnung des Verfahrens.

Tabelle 6.12: Testproblem 1, relativer Fehler der Wassertiefe, MacCormack

N	$10^6 \cdot L^\infty$-Fehler	Ordnung p	$10^6 \cdot L^1$-Fehler	Ordnung p
10	2927,32	-	2682,84	-
20	754,34	1,96	736,00	1,87
40	187,21	2,01	183,29	2,01
80	46,88	2,00	45,54	2,01
160	11,68	2,00	11,32	2,01
320	2,92	2,00	2,82	2,00

Das Konvergenzverhalten aller untersuchten Verfahren ist graphisch aufbereitet und in Abbildung 6.3 dargestellt. Da es sich bei der RKDG-Methode um ein FE-Verfahren mit mehreren Freiheitsgraden für eine Variable in einem Element handelt (z. B. vier Freiheitsgrade bei einer kubischen Ansatzfunktion $k = 3$) werden auf die Abszisse des Graphen zwecks eines besseren Vergleichs der Diskretisierungsfehler anstatt der Elementzahl die Freiheitsgrade aufgetragen. Die mittleren Konvergenzraten werden auf Grundlage der jeweils drei am höchsten aufgelösten Netze berechnet.

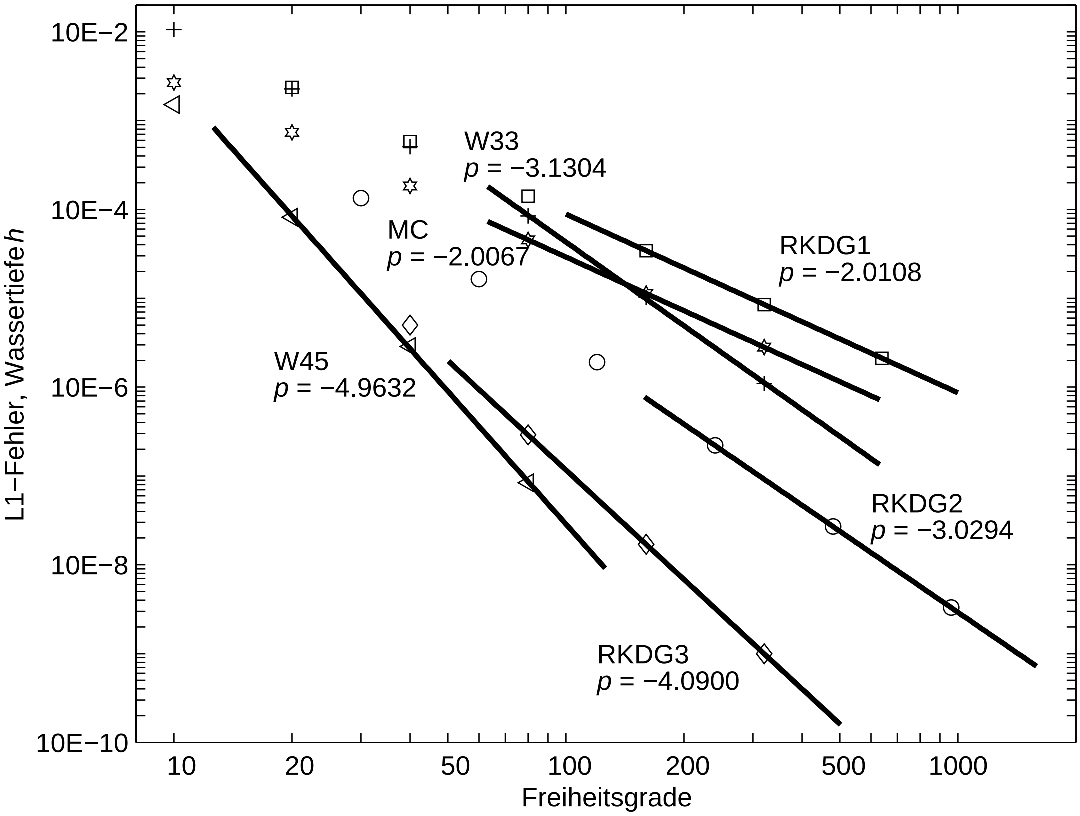

Abbildung 6.3: Testproblem 1, L^1-Fehler und Konvergenzverhalten der Wassertiefe für die RKDG-Methode mit konstanten bis kubischen Ansatzfunktionen, der W33- und W45-Methode und des MacCormack-Verfahrens

Das klassische MacCormack-Verfahren liegt bezüglich seiner Leistungsfähigkeit im L^1-Diskretisierungsfehler und der Konvergenzordnung p fast exakt bei den Werten von RKDG1. Da das MacCormack-Verfahren statt zwei nur einen Freiheitsgrad pro Variable im Element besitzt, wesentlich einfacher zu implementieren und schneller auszuführen ist, ist es gegenüber RKDG1 auf dem benutzten äquidistanten Berechnungsnetz im Vorteil. Mit der Benutzung höherpolynomialer Ansatzfunktionen in der RKDG-Methode ($k = 2$ und $k = 3$) verschiebt sich der Vorteil in Richtung des RKDG-Verfahrens. Um z. B. den L^1-Fehler der RKDG3-Methode bei einem Berechnungsnetz von $N = 10$ Elementen mit dem MacCormack-Verfahren zu reproduzieren, ist eine Elementzahl $N = 227$ notwendig, für die eine wesentlich höhere Berechnungsdauer erforderlich ist. Der Hauptvorteil der RKDG-Methode ist jedoch, neben der höheren Effizienz des Verfahrens, in der wesentlich höheren Flexibilität in Bezug auf die verwendeten Berechnungsnetze und die Implementierung der Randbedingungen zu sehen. Das MacCormack-Verfahren kann im zweidimensionalen Raum nur auf orthogonalen oder kurvilinearen Netzen diskretisiert werden, nicht jedoch auf unstrukturierten Dreiecksnetzen.

Die Leistungsfähigkeit von W33 liegt zwischen der von RKDG1 und RKDG2. Die Konvergenzordnung von $k = 3$ entspricht der von RKDG2. Aufgrund der einfachen Implementierung und schnellen Ausführung von W33 ist die Benutzung des WENO-Verfahrens effizienter als die der RKDG-Methode. Der Diskretisierungsfehler und die Konvergenzordnung von W45 sind mit denen der RKDG3-Methode vergleichbar. Bei der gleichen Anzahl von 40 Freiheitsgraden bewegt sich der L^1-Fehler mit $2{,}88\ 10^{-6}$ (W45) und $5{,}00 \cdot 10^{-6}$ (RKDG3) in etwa auf dem gleichen Niveau. Auch hier ist das WENO-Verfahren in Bezug auf seine Ausführungszeit effizienter.

Im Gegensatz zum MacCormack-Verfahren können WENO-Verfahren in ihrer Finite-Volumen Version auch auf unstrukturierten Netzen implementiert werden. Ihre Ausführung ist nach SHU (2000) rechenintensiver und aufwendiger als die im Rahmen dieser Arbeit benutzte Finite-Differenzen Version. Für Dreiecksnetze existieren WENO-Versionen dritter und vierter räumlicher Ordnung. Während das Verfahren dritter Ordnung sehr robust ist, bestehen beim Verfahren vierter Ordnung eine Reihe von Restriktionen an die Triangulierung. Eine ausführliche Untersuchung des Konvergenzverhaltens verschiedener RKDG- und WENO-Verfahren auf zweidimensionalen, unstrukturierten Dreiecksnetzen zur Berechnung von Lösungen mit und ohne Stoßfronten beschreibt SHU (2001). Für glatte Lösungen ist die RKDG-Methode leicht im Vorteil gegenüber den WENO-Verfahren. Die RKDG-Methode hat im Vergleich der unterschiedlichen Ansätze vor allem einen Vorteil in der flexibleren Triangulierung und in der unkomplizierteren Berücksichtigung von Randbedingungen. Als Nachteil der Methode wird die Wahl des Limiter-Parameters M_L gesehen. Parameterfreie Limiter für diese Methode sind Gegenstand aktueller Forschung.

6.2 Testproblem 2: Gerinne nach MACDONALD (1996)

Das stationäre und transkritische Testproblem 2 stammt aus MACDONALD (1996) und wurde zur Überprüfung eines Verfahrens zur Berechnung breitengemittelter Strömung entwickelt. Das Testproblem beinhaltet Bodenneigung und Sohlreibung. Es lässt sich leicht auch auf die eindimensionale tiefengemittelte Formulierung der FWG übertragen. Die stationäre Form der eindimensionalen FWG lässt sich analog zu MACDONALD (1996) für glatte Lösungen nach dem Sohlgefälle S_0 auflösen zu

$$S_0 = (1 - \frac{q^2}{gh^3})\partial_x h + S_f \tag{6.9}$$

Unter der Annahme des Reibungsgesetzes nach Manning (Gleichung (2.42)und (2.44)) ergibt sich daraus

$$S_0 = (1 - \frac{q^2}{gh^3})\partial_x h + \frac{n^2 q^2}{h^{10/3}} \tag{6.10}$$

Basierend auf der Wassertiefe h, dem breitenbezogenen Durchfluss $q = uh$ = konst. und dem Reibungskoeffizienten n lässt sich eine Gerinneneigung S_0 konstruieren. Die Wassertiefe im Gerinne wird in Testproblem 2 so definiert, dass ein kontinuierlicher Übergang vom Strömen zum Schießen bei $x = 50$ m stattfindet, dem ein Wechselsprung bei $x = 100$ m mit einem anschließenden strömenden Abfluss folgt. Die Wassertiefe h für $x \leq 100\,\mathrm{m}$ ist nach MACDONALD (1996) gegeben durch die Funktion

$$h(x) = 0{,}741617 - \frac{0{,}25}{\tanh(3)}\tanh\left(\frac{3(x-50)}{50}\right) \tag{6.11}$$

für $100\,\mathrm{m} < \mathrm{x} \leq 150\,\mathrm{m}$ gilt

$$h(x) = \exp(-p(x - x^*))\sum_{i=0}^{M} k_i \left(\frac{x - x^*}{x^{**} - x^*}\right)^i + \varphi(x) \tag{6.12}$$

mit $x^* = 100\,\mathrm{m}$, $x^{**} = 150\,\mathrm{m}$, $M = 4$, $k_0 = -0{,}258363$, $k_1 = -1{,}18214$, $k_2 = 5{,}99444$, $k_3 = 118{,}907$, $k_4 = 611{,}738$ und

$$\varphi(x) = 1{,}7\exp(0{,}005(x - 150)) \tag{6.13}$$

Der breitenbezogene Durchfluss beträgt $q = 2$ m^2/s, der Manning Beiwert $n = 0{,}031752$ s/m$^{1/3}$ und die Wassertiefe am Ausfluss $h_{out} = 1{,}700225$ m. Die Sohlneigung S_0 im Gerinne, die Wassertiefe h und die kritische Tiefe h_{krit} sind in Abbildung 6.4 dargestellt.

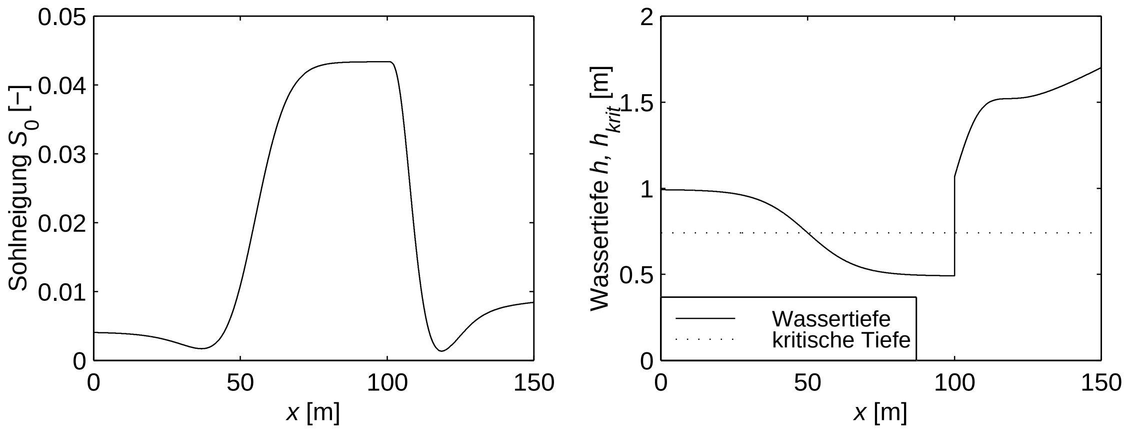

Abbildung 6.4: *Testproblem MacDonald (1996), a) Sohlneigung im Gerinne, b) Wassertiefe h und kritische Wassertiefe h_{krit} im Gerinne*

In Abbildung 6.5 und Abbildung 6.6 sind die Elementmittelwerte der Wassertiefe in den Berechnungselementen für eine Diskretisierung von $N = 10$, 20, 40 und 80 Elementen abgebildet. Die Berechnung erfolgt mit dem RKDG2-Verfahren dritter räumlicher und zeitlicher Ordnung. Schon bei nur $N = 10$ Elementen kann in den glatten Bereichen der Lösung eine hervorragende Übereinstimmung zwischen analytischer und numerischer Lösung festgestellt werden. Die Diskontinuität bzw. der Wechselsprung an der Stelle $x = 100$ m wird bei allen untersuchten Diskretisierungen in ein oder maximal zwei Berechnungselementen abgebildet.

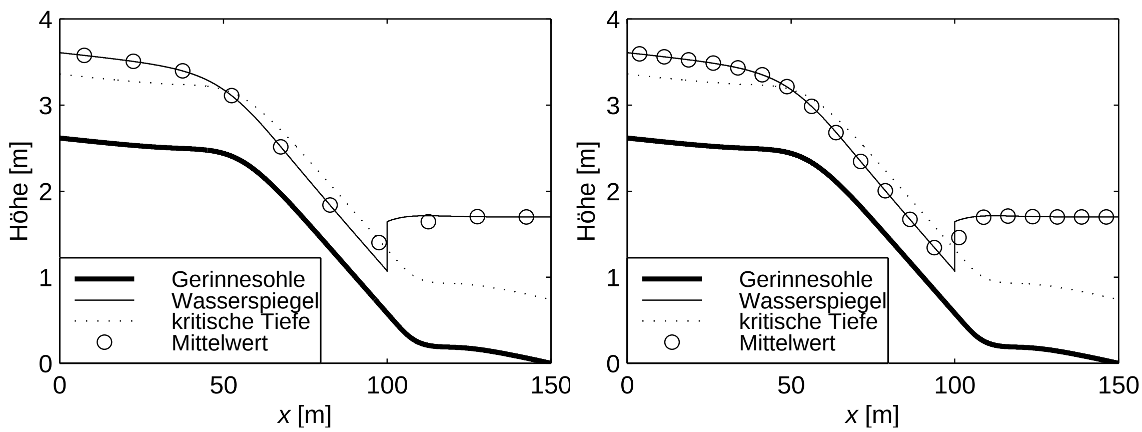

Abbildung 6.5: *Testproblem MacDonald (1996), Elementmittelwerte der RKDG2-Methode (k = 2), a) Diskretisierung mit N = 10 Elementen, b) Diskretisierung mit N = 20 Elementen*

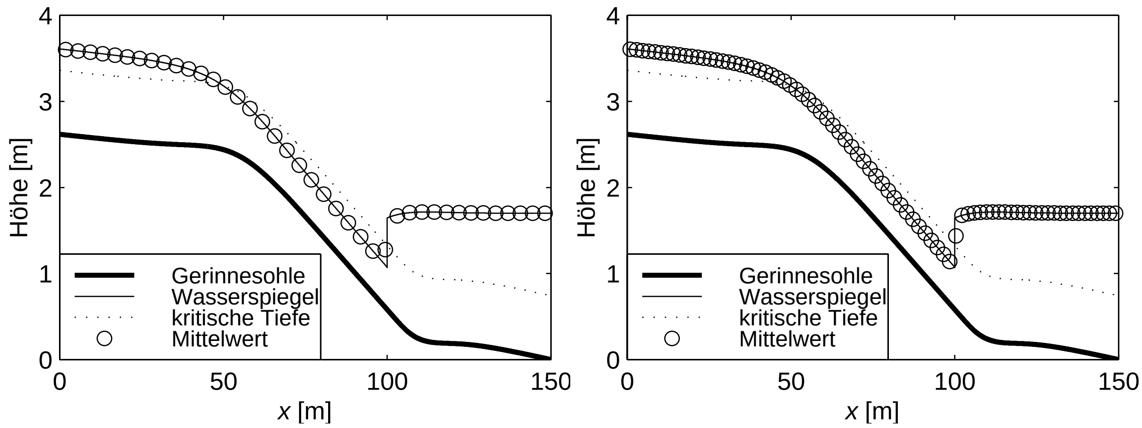

Abbildung 6.6: *Testproblem MACDONALD (1996), Elementmittelwerte der RKDG-Methode (k = 2), a) Diskretisierung mit N = 40 Elementen, b) Diskretisierung mit N = 80 Elementen*

Analog zum Vorgehen in Testproblem 1 wird in den glatten Bereichen der Lösung der L^{∞}- und L^{1}-Diskretisierungsfehler berechnet. Das Intervall $90\ \mathrm{m} < x < 120\ \mathrm{m}$ wird in dieser Betrachtung nicht berücksichtigt, da an der Diskontinuität der Lösung eine Konsistenz erster Ordnung und damit auch nur eine Konvergenz erster Ordnung erwartet wird. Diskontinuitäten in den numerischen Lösungen werden Gegenstand der folgenden Testprobleme sein. Gemäß Tabelle 6.13 und Tabelle 6.14 kann in den glatten Bereichen der Lösung sowohl im L^{∞}-Fehler als auch im L^{1}-Fehler der Wassertiefe eine Konvergenzordnung von $p = 2$ für das RKDG1-Verfahren und $p = 3$ für das RKDG2-Verfahren festgestellt werden. Die Konvergenzordnung hat somit wie in Testproblem 1 in den glatten Bereichen der Lösung die Ordnung k+1.

Tabelle 6.13: *Testproblem MACDONALD (1996), L^{∞}-Fehler der Wassertiefe h; HLL-Fluss, $M_L = 1,0$*

	$k = 1$		$k = 2$	
N	$10^6 \cdot L^{\infty}$-Fehler	Ordnung p	$10^6 \cdot L^{\infty}$-Fehler	Ordnung p
10	18644,34	-	3145,40	-
20	5812,23	1,68	432,62	2,86
40	1575,95	1,88	87,25	2,31
80	402,34	1,97	13,02	2,74
160	101,12	1,99	1,70	2,93
320	25,38	1,99	0,22	2,98

Tabelle 6.14: Testproblem MACDONALD (1996), L^1-Fehler der Wassertiefe h, HLL-Fluss, $M_L = 1{,}0$

	$k = 1$		$k = 2$	
N	$10^6 \cdot L^1$-Fehler	Ordnung p	$10^6 \cdot L^1$-Fehler	Ordnung p
10	725111,23	-	103615,87	-
20	176684,23	2,04	12293,44	3,08
40	44991,98	1,98	1348,62	3,19
80	11274,02	2,00	165,44	3,03
160	2822,38	2,00	20,45	3,02
320	705,79	2,00	2,54	3,01

Die Konvergenz dritter Ordnung aufgrund der quadratischen Ansatzfunktion der RKDG-Methode macht eine ebenfalls quadratische Abbildung der Sohle notwendig. Repräsentiert man die Sohle im Element nur linear, dominieren die Fehler aus der ungenau abgebildeten Sohle und führen trotz der Verwendung des RKDG2-Verfahrens zu einer Konvergenz von nur zweiter Ordnung.

6.3 Testproblem 3: Schwallwelle nach BERGER & STOCKSTILL (1995)

Testproblem 3, vorgeschlagen von BERGER & STOCKSTILL (1995), besteht aus einem rechteckigen Kanal mit einer ebenen, horizontalen Gerinnesohle von 100 m Länge und einer Breite von 1 m. Reibungseffekte werden in diesem Testproblem vernachlässigt. Die Strömung im Gerinne ist im Anfangszustand mit einer Froudezahl von $Fr_0 = 1{,}0234$ überkritisch. Bei einer Wassertiefe von h_0 = 1 m und der oben angegebenen Froudezahl berechnet sich die Wassergeschwindigkeit zum Zeitpunkt t_0 zu $u_0 = 3{,}2053\,\text{m/s}$ (Abbildung 6.7a). Am Einlauf des Gerinnes bei $x = 0\,\text{m}$ wird die Geschwindigkeit und die Wassertiefe gemäß der Anfangsbedingung als Randbedingung angesetzt. Am Auslaufrand x = 100 m wird ab der Zeit $t > t_0$ eine Wand angenommen, die einem plötzlichen Schließen eines Schützes entspricht. Im Gerinne wird damit ein instationärer Schwall ausgelöst, der sich in Form einer Diskontinuität bzw. eines Wechselsprungs in Richtung Oberwasser bewegt. Unter Benutzung der Sprungbedingung (3.32) errechnet sich die Wassertiefe h_1 im Unterwasser des Wechselsprungs und die Geschwindigkeit des Wechselsprungs s im Gerinne zu

$$s = -\left[g \frac{h_0}{h_1} \left(\frac{h_0 + h_1}{2} \right) \right]^{1/2} \tag{6.14}$$

$$u_0 = s\left(1 - \frac{h_1}{h_0}\right) \tag{6.15}$$

Es bilden sich somit zwei Bereiche mit jeweils konstanten Wassertiefen h_0 und h_1 und konstanten Geschwindigkeiten u_0 und $u_1 = 0$, die durch den sich stromaufwärts bewegenden Wechselsprung an der Stelle $x = 100\ \mathrm{m} - s\,t$ getrennt werden. Die Lösung des Testproblems wird bis zu einer Zeit von $t = 18{,}7192\ \mathrm{s}$ integriert. Die Stoßfront befindet sich zu diesem Zeitpunkt an der Stelle x = 50 m (Abbildung 6.7b).

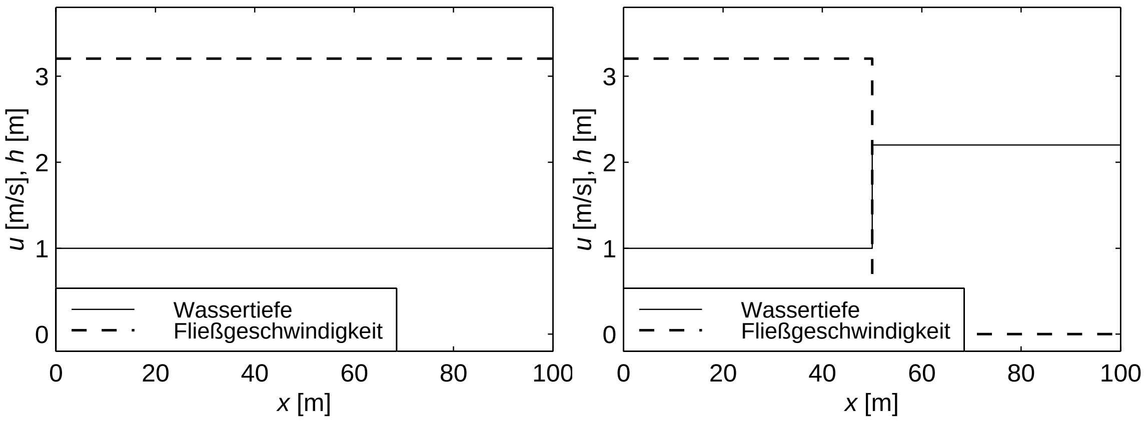

Abbildung 6.7: Testproblem BERGER & STOCKSTILL (1995), a) Anfangsbedingung für Wassertiefe und breitenbezogenen Durchfluss bei t = 0, b) Analytische Lösung für Wassertiefe und breitenbezogenen Durchfluss nach t = 18,7192 s

Analog zum Vorgehen in den glatten Bereichen der Lösungen der Testprobleme 1 und 2 werden für die Lösungen der verschiedenen Simulationsläufe die L^1-Fehler bestimmt. Die Diskontinuität wird hier in die Betrachtung mit einbezogen. Aufgrund der Sprünge der Variablen an der Diskontinuität wird auf die Berechnung der L^∞-Fehlernormen verzichtet.

In Tabelle 6.15 ist der L^1-Fehler der Wassertiefe für die RKDG0-Methode unter der Benutzung verschiedener numerischer Flüsse aufgeführt. Es fällt auf, dass mit der Verwendung des im Vergleich zum Lax-Friedrichs-Flusses weniger dispersiven HLL-Flusses oder des Flusses nach Roe die Qualität der Ergebnisse wesentlich verbessert werden kann. So beträgt der L^1-Fehler der Lösung der RKDG0-Methode zusammen mit dem Fluss nach Roe nur etwa ein Drittel des Fehlers dieser Methode unter der Verwendung des Lax-Friedrichs-Flusses. Die Genauigkeit des RKDG0-Verfahrens ist damit sehr sensitiv auf die Wahl des numerischen Flusses. Die Konvergenzordnung ist davon nicht beeinflusst und liegt, unabhängig von der Wahl des numerischen Flusses, bei einem nahezu konstanten Wert von eins.

Tabelle 6.15: Testproblem BERGER & STOCKSTILL (1995), RKDG0 (k = 0), L^1-Fehler der Wassertiefe für CFL = 0,9

	LF-Fluss		HLL-Fluss		Roe-Fluss	
N	L^1-Fehler	Ordnung p	L^1-Fehler	Ordnung p	L^1-Fehler	Ordnung p
10	32,71	-	18,08	-	11,43	-
20	17,18	0,93	9,07	1,00	5,81	0,98
40	8,54	1,01	4,52	1,01	2,89	1,01
80	4,26	1,00	2,26	1,00	1,46	0,99
160	2,11	1,01	1,12	1,01	0,71	1,05
320	1,06	1,00	0,56	0,99	0,36	0,98

In Tabelle 6.16 ist der L^1-Fehler der Wassertiefe für die RKDG1-Methode dargestellt. Die bei konstanten Ansatzfunktionen festgestellte hohe Sensitivität der Ergebnisse auf den verwendeten numerischen Fluss ist mit der Benutzung von linearen Ansatzfunktionen bei der RKDG1-Methode weit weniger ausgeprägt. Weiterhin liefert der Roe-Fluss vor dem HLL-Fluss die am wenigsten dispersive Lösung. Die geringste Genauigkeit besitzt wiederum das RKDG1-Verfahren in Verbindung mit dem Lax-Friedrichs-Fluss. Die Konvergenzordnung liegt wie beim RKDG0-Verfahren bei eins. Sie ist damit um eine Größenordnung kleiner, als bei glatten Lösungen, bei denen die Konvergenzordnung von $p = 2$ erreicht wird. Das Ergebnis entspricht der Erwartung, da die Abbildung einer reinen Diskontinuität in den Variablen nur mit einer Konsistenzordnung von ebenfalls eins erfolgen kann.

Tabelle 6.16: Testproblem B*ERGER* & S*TOCKSTILL* *(1995), RKDG1 (k = 1),* L^1*-Fehler der Wassertiefe für CFL = 0,3,* $M_L = 0$

	LF-Fluss		HLL-Fluss		Roe-Fluss	
N	L^1-Fehler	Ordnung p	L^1-Fehler	Ordnung p	L^1-Fehler	Ordnung p
10	10,33	-	8,38	-	7,12	-
20	4,99	1,05	4,08	1,00	3,47	1,04
40	2,54	0,97	2,08	1,01	1,77	0,97
80	1,26	1,02	1,03	1,00	0,87	1,02
160	0,63	1,00	0,51	1,01	0,44	1,00
320	0,31	1,00	0,26	0,99	0,22	0,98

Die Ergebnisse in Tabelle 6.15 und Tabelle 6.16 wurden mit einem Limiter-Parameter von $M_L = 0$ berechnet. Es stellt sich einerseits die Frage, wie sensitiv die Ergebnisse auf die Variation dieses Parameters sind und andererseits, ob die Genauigkeit des Ergebnisses durch die Benutzung höherpolynomialer Ansatzfunktionen gesteigert werden kann. Weiterhin werden die Ergebnisse im Hinblick auf unterschiedliche CFL-Zahlen untersucht.

Tabelle 6.17: Testproblem B*ERGER* & S*TOCKSTILL* *(1995),* L^1*-Fehler für unterschiedliche RKDG-Verfahren*

k	CFL	M_L	LF-Fluss	HLL-Fluss	Roe-Fluss
0	0,9	-	32,71	18,08	11,43
0	0,09	-	37,02	23,24	18,19
1	0,3	0	10,33	8,38	7,12
1	0,03	0	10,18	8,20	6,96
1	0,3	0,01	10,69	8,14	7,04
2	0,18	0	10,13	8,15	6,91
2	0,18	0,01	10,05	8,89	8,21

Aus Tabelle 6.17 geht hervor, dass der L^1-Fehler der Lösung des RKDG0-Verfahrens mit $N = 10$ Berechnungselementen sensitiv auf die benutzte Zeitschrittweite ist. Bei der Wahl eines Zeitschritts mit einer CFL-Zahl von 0,9, der im Rahmen der RKDG0-Methode 90 % der maximal möglichen Zeitschrittweite entspricht, ist der L^1-Fehler bei der Benutzung des Flusses nach Roe mit einem Wert von 11,43 wesentlich geringer als bei der Wahl einer CFL-Zahl von 0,09, für die der L^1-Fehler einen Betrag von 18,19 erreicht. Die Sensitivität auf die gewählte Zeitschrittweite ist beim RKDG1-Verfahren weitaus geringer ausgebildet. Die Ergebnisse verbessern sich sogar leicht mit den untersuchten kleineren Zeitschrittweiten.

Bei der Variation des Limiter-Parameters M_L kann keine eindeutige Tendenz zu einer Verbesserung oder Verschlechterung des L^1-Fehlers der Lösung festgestellt werden. Bei einem Parameter von $M_L = 0{,}01$ bewegt sich dieser auf dem gleichen Niveau wie mit einem Parameter von $M_L = 0$. Die Qualität der Lösung ist bei diesem Testproblem somit nicht negativ vom weniger restriktiven TVB-Limiter beeinflusst, kann jedoch zu einer geringen Verletzung der TVD-Bedingung führen. Bei der Wahl eines entsprechend großen Parameters $M_L = 1$ wird das Verfahren instabil.

Die Genauigkeit der Lösung kann mit quadratischen Ansatzfunktionen und dem vorgestellten Limiter nicht weiter gesteigert werden. Der L^1-Fehler bewegt sich für das RKDG2-Verfahren ebenfalls auf dem Niveau der Lösung mit linearer Ansatzfunktionen. Es fällt auf, dass das RKDG2-Verfahren etwas sensitiver auf die Wahl des Limiter-Parameters M_L reagiert.

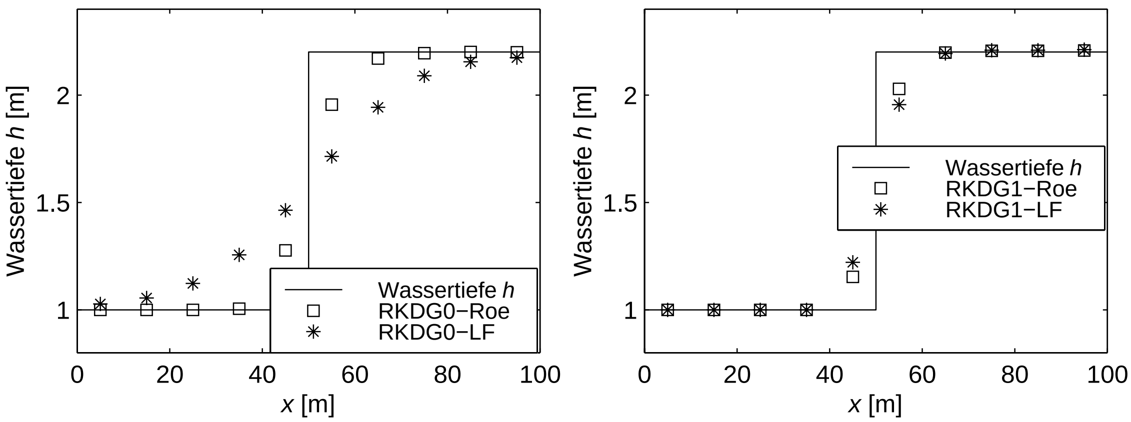

Abbildung 6.8: *Testproblem* Berger & Stockstill *(1995), a) Verfahren erster Ordnung mit Roe-Fluss, CFL = 0,9 und LF-Fluss, CFL = 0,09, b) Verfahren zweiter Ordnung mit Roe-Fluss, CFL = 0,3 und LF-Fluss, CFL = 0,03*

In Abbildung 6.8 sind die jeweils schlechtesten und besten Ergebnisse für die RKDG-Verfahren erster ($k = 0$) und zweiter Konsistenzordnung ($k = 1$) angegeben. Es ist ersichtlich, dass die RKDG0-Methode wesentlich sensitiver auf die untersuchten Parameter wie die Zeitschrittweite und den numerischen Fluss reagiert als die RKDG1-

Methode mit linearer Ansatzfunktion. Die Wahl des Parameters M_L hatte in den in diesem Beispiel untersuchten Grenzen keine nennenswerte Auswirkung auf die erzielten Ergebnisse.

Tabelle 6.18: Testproblem BERGER & STOCKSTILL (1995), relative Ausführungszeiten

	LF-Fluss	HLL-Fluss	Roe-Fluss
$k = 0$	0,75	1,00	1,18
$k = 1$	10,43	11,85	12,87
$k = 2$	43,18	46,71	51,01

Aus der Betrachtung der relativen Ausführungszeiten der unterschiedlichen Simulationsläufe mit den Ansatzfunktionen verschiedener Polynomgrade und numerischer Flüsse (Tabelle 6.18) wird ersichtlich, dass im Vergleich zur RKDG0-Methode die RKDG1-Methode eine um einen Faktor 11 größere und die RKDG2-Methode eine um den Faktor 46 größere Ausführungszeit benötigt. Bei der für Testproblem 3 nur geringen Genauigkeitssteigerung durch die höherpolynomialen Ansatzfunktionen ist das RKDG0-Verfahren mit der konstanten Repräsentation der Variablen effektiver als die RKDG1-Methode. Im Rahmen der RKDG0-Methode ist die Benutzung des numerischen Flusses nach Roe oder auch des HLL-Flusses vorzuziehen. Die mit diesen weniger dissipativen Flüssen im Gegensatz zum Lax-Friedrichs-Fluss erzielten höheren Genauigkeiten bzw. kleineren L^1-Fehlern wiegen die damit verbundene erhöhte Rechenzeit aufgrund der komplexeren Formulierung dieser Flüsse auf. So benötigt die RKDG0-Methode mit dem Fluss nach Roe eine um den Faktor 1,57 größere Ausführungszeit als zusammen mit dem LF-Fluss. Der L^1-Fehler verringert sich auf 35 %. Die Anwendung des Flusses nach Roe ist damit um einen Faktor 1,82 effektiver als die Benutzung des LF-Flusses. Bei den höherpolynomialen Methoden hat die Wahl des numerischen Flusses keine wesentliche Auswirkung auf die Effektivität des Verfahrens und die Genauigkeit der numerischen Lösung.

6.4 Testproblem 4: 1D-Dammbruch

Die eindimensionale Lösung des Dammbruchs nach RITTER (1892) und STOKER (1957) stellt einen weiteren Test für die RKDG-Methode in Anwendung auf instationäre und transkritische Strömungen dar. Die Abmessungen des horizontalen und reibungsfreien Gerinnes und die Anfangsbedingungen wuden analog zu denen der CADAM-Gruppe (vgl. Kapitel 7.2) gewählt (TORO et al., 1998). Der an der Stelle $x = 0$ vorhandene Damm mit infinitesimaler Dicke trennt den oberen und unteren Teil des Gerinnes mit der Wassertiefe h_1 im Bereich $x < 0$ und der Wassertiefe h_2 im Bereich $x > 0$. Der Damm wird zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ entfernt. Die allgemeine analytische Lösung bei einem trockenen Unterwasser stammt von RITTER (1892). Sie lautet für die Wassertiefe h und den breitenbezogenen Durchfluss q

$$h(t,x) = \begin{cases} h_1 & -1000\,\mathrm{m} \le x \le x_A(t) \\ (2c_1 - x/t)^2/9g \quad \text{für} & x_A(t) < x \le x_B(t) \\ 0 & x_B(t) < x \le 1000\,\mathrm{m} \end{cases} \tag{6.16}$$

$$q(t,x) = \begin{cases} 0 & -1000\,\mathrm{m} \le x \le x_A(t) \\ 2(c_1 + x/t)\,h(t,x)/3 \quad \text{für} & x_A(t) < x \le x_B(t) \\ 0 & x_B(t) < x \le 1000\,\mathrm{m} \end{cases} \tag{6.17}$$

mit $c_1 = \sqrt{gh_1}$. Die Punkte A und B sind definiert durch ihre x-Koordinaten gemäß

$$x_A(t) = -c_1 t \tag{6.18}$$

$$x_B(t) = 2c_1 t \tag{6.19}$$

Die Wassertiefen h für Testproblem 4a sind im Anfangszustand gegeben durch $h_1 = 6$ m und $h_2 = 0$ m (Abbildung 6.9a). Die analytische Lösung nach $t = 60$ s für Wassertiefe und breitenbezogenen Durchfluss ist in Abbildung 6.9b graphisch dargestellt.

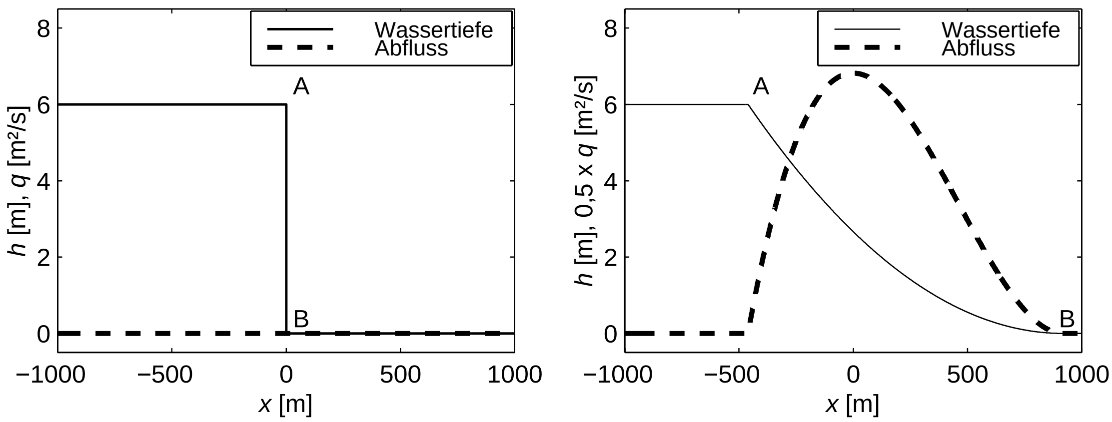

Abbildung 6.9: Testproblem 4a, a) Anfangsbedingung für Wassertiefe und breitenbezogenen Durchfluss bei t = 0, b) Analytische Lösung für Wassertiefe und breitenbezogenen Durchfluss nach t = 60 s

Eine allgemeine, analytische Lösung mit einem positiven Unterwasserstand h_2 liefert STOKER (1957). Durch die Lösung des Gleichungssystems

$$u_u + 2\sqrt{gh_u} = 2\sqrt{gh_1} \tag{6.20}$$

$$s(h_2 - h_u) = q_2 - q_u \tag{6.21}$$

$$s(q_2 - q_u) = \left(\frac{q_2^2}{h_2} + g\frac{h_2^2}{2}\right) - \left(\frac{q_u^2}{h_u} + g\frac{h_u^2}{2}\right) \tag{6.22}$$

nach der Stoßgeschwindigkeit s, der Wassertiefe h_u und dem breitenbezogenen Durchfluss q_u im Bereich zwischen den Punkten B und C, kann das Berechnungsgebiet durch die Punkte A, B und C in vier Bereiche unterteilt werden (Abbildung 6.10b). Die Punkte sind definiert durch ihre x-Koordinaten gemäß

$$x_A(t) = -c_1 t \tag{6.23}$$

$$x_B(t) = (2c_1 - 3c_u)t \tag{6.24}$$

$$x_C(t) = st \tag{6.25}$$

mit

$$c_1 = \sqrt{gh_1} \quad \text{und} \quad c_u = \sqrt{gh_u} \tag{6.26}$$

Links von Punkt A und rechts von Punkt C befindet sich die Strömung ungestört im Vergleich zum Anfangszustand. Zwischen den Punkten A und B ist die Lösung des Testproblems identisch mit dem Dammbruch nach Ritter mit einem trockenen Unterwasser (siehe oben). Zwischen dem Punkt B und der Position der Stoßfront am Punkt C bildet sich ein Plateau mit konstanten Variablen h_u und q_u. Die analytische Lösung für h_1 = 6 m und h_2 = 2 m ist zum Zeitpunkt t = 100 s in Abbildung 6.10 gegeben.

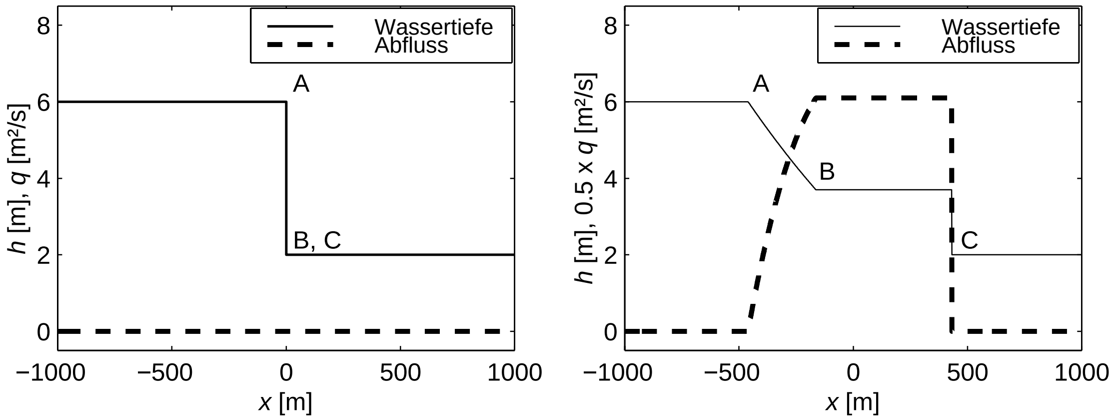

Abbildung 6.10: *Testproblem 4b, a) Anfangsbedingung für Wassertiefe und breitenbezogenen Durchfluss bei t = 0, b) Analytische Lösung für Wassertiefe und breitenbezogenen Durchfluss nach t = 100 s*

Die Funktionen für die Wassertiefe h und den breitenbezogenen Durchfluss q ergeben sich damit, modifiziert aus den Gleichungen (6.16) und (6.17), zu

$$h(t,x) = \begin{cases} h_1 & -1000\,\text{m} \le x \le x_A(t) \\ (2c_1 - x/t)^2/9g & x_A(t) < x \le x_B(t) \\ h_u & x_B(t) < x \le x_C(t) \\ h_2 & x_C(t) < x \le 1000\,\text{m} \end{cases} \quad \text{für} \tag{6.27}$$

$$q(t,x) = \begin{cases} 0 & -1000\,\text{m} \le x \le x_A(t) \\ 2(c_1 + x/t)\,h(t,x)/3 & x_A(t) < x \le x_B(t) \\ q_u & x_B(t) < x \le x_C(t) \\ 0 & x_C(t) < x \le 1000\,\text{m} \end{cases} \quad \text{für} \tag{6.28}$$

Eine auf den Gleichungen nach Ritter basierende modifizierte Lösung nach DRESSLER (1952) berücksichtigt für die vorgestellte idealisierte Dammbruchwelle nach Ritter zusätzlich Reibungseffekte. Bei dieser Lösung handelt es sich allerdings um eine Näherungslösung und nicht um eine exakte analytische Lösung der FWG. Aufgrund der Inkonsistenz der Dressler-Lösung mit den FWG wird diese nicht zur weiteren Verifizierung des numerischen Verfahrens verwendet.

Aus Sichtweise der Numerik stellt Testproblem 4b wegen der im gesamten Berechnungsgebiet vorhandenen minimalen Wassertiefe von $h = 2$ m im Gegensatz zu dem im Testproblem 4a vorhandenen trockenen Unterwasser das kleinere Problem dar. Es wird im Folgenden zuerst abgehandelt. Zum Einsatz kommen die RKDG0- und die RKDG1-Methode. Eine wesentliche Steigerung der Genauigkeit der Lösung wird aufgrund der

Untersuchungen in Testproblem 3 von den Verfahren mit höherpolynomialen Ansatzfunktionen im Zusammenhang mit der vom Stoß dominierten Lösung von Testproblem 4b nicht erwartet. Der Einsatz der RKDG2- und RKDG3-Methode wird wegen der geringen Effizienz auf diese Art von Strömung nicht näher untersucht (Kapitel 6.3).

In Tabelle 6.19 ist der L^1-Fehler der Wassertiefe für verschiedene Netzdichten und numerische Flüsse unter Benutzung der RKDG0-Methode aufgeführt. Auch hier wird die Überlegenheit des Flusses nach Roe vor dem HLL-Fluss und dem Lax-Friedrichs-Fluss ersichtlich. Die Konvergenzraten der Verfahren liegen zwischen durchschnittlich $p = 0{,}68$ für den LF-Fluss und $p = 0{,}80$ für den HLL-Fluss unter dem theoretisch möglichen Wert von $p = 1$.

Tabelle 6.19: Testproblem 4b, RKDG0 (k = 0), L^1-Fehler für CFL = 0,9

	LF-Fluss		HLL-Fluss		Roe-Fluss	
N	L^1-Fehler	Ordnung p	L^1-Fehler	Ordnung p	L^1-Fehler	Ordnung p
10	1395,34	-	1335,94	-	1045,77	-
20	907,77	0,62	772,56	0,79	639,51	0,71
40	585,65	0,63	460,91	0,75	402,98	0,67
80	362,12	0,69	259,59	0,83	230,34	0,81
160	222,15	0,70	151,46	0,78	136,24	0,76
320	130,99	0,76	83,44	0,86	75,60	0,85

In Tabelle 6.20 ist der L^1-Fehler der Wassertiefe analog zu Tabelle 6.19 unter Benutzung der RKDG1-Methode aufgeführt. Die Größe der Fehler ist wie in Testproblem 3 weitgehend unabhängig vom gewählten numerischen Fluss. Die Konvergenzordnung erreicht den theoretischen Wert der Konsistenz an Diskontinuitäten von $p = 1$ und liegt damit um einen Wert von 0,20 bis 0,32 höher als beim RKDG0-Verfahren.

Tabelle 6.20: Testproblem 4b, RKDG1 (k = 1), L^1-Fehler für CFL = 0,3, M_L = 0

	LF-Fluss		HLL-Fluss		Roe-Fluss	
N	L^1-Fehler	Ordnung p	L^1-Fehler	Ordnung p	L^1-Fehler	Ordnung p
10	605,53	-	568,49	-	554,10	-
20	308,78	0,97	288,58	0,98	278,08	0,99
40	149,71	1,04	140,29	1,04	134,09	1,05
80	75,36	0,99	70,90	0,98	67,36	0,99
160	36,62	1,04	34,50	1,04	32,76	1,04
320	18,72	0,97	17,61	0,97	16,61	0,98

Im Vergleich der Effizienz (vgl. Kapitel 6.1) der RKDG-Methoden mit HLL-Fluss zwischen einer konstanten ($k = 0$) und einer linearen Ansatzfunktion ($k = 1$) (Tabelle 6.21) zeigt sich, dass bei einer Diskretisierung auf einem Berechnungsnetz mit $N = 10$ Elementen die RKDG0-Methode rechentechnisch effizienter anzuwenden ist als das RKDG1-Verfahren. Bei einem um den Faktor zwei verfeinerten Berechnungsnetz von $N = 20$ Elementen liegen beide Verfahren bei der gleichen Effizienz. Ab einem Netz von $N = 40$ Elementen ist die RKDG1-Methode wegen ihrer höheren Konvergenzordnung effizienter als die RKDG0-Methode. So kann es in diesem Testproblem abhängig von der Netzdichte von Vorteil sein, trotz der Dominanz der Lösung durch die Diskontinuität den höherpolynomialen Ansatz zu wählen.

Tabelle 6.21: Testproblem 4b, Effizienz der RKDG0- und RKDG1-Methode, HLL-Fluss

N	L^1-Fehler ($k = 0$)	L^1-Fehler ($k = 1$)	Faktor f	N^* ($p = 0{,}80$)	Effizienz [-]
10	1335,94	568,49	2,35	29	0,71
20	772,56	288,58	2,68	69	0,99
40	460,91	140,29	3,29	177	1,66
80	259,59	70,90	3,66	405	2,16
160	151,46	34,50	4,39	1017	3,41
320	83,44	17,61	4,74	2238	4,13

In Abbildung 6.11 sind die numerischen Lösungen der RKDG1-Methode mit HLL-Fluss für die Wassertiefe und den breitenbezogen Durchfluss auf Grundlage der Berechnungsnetze mit $N = 10$ und $N = 20$ Elementen dargestellt. Wie auch schon in Testproblem 3 sind für die Abbildung des Stoßes höchstens 2 Elementen notwendig.

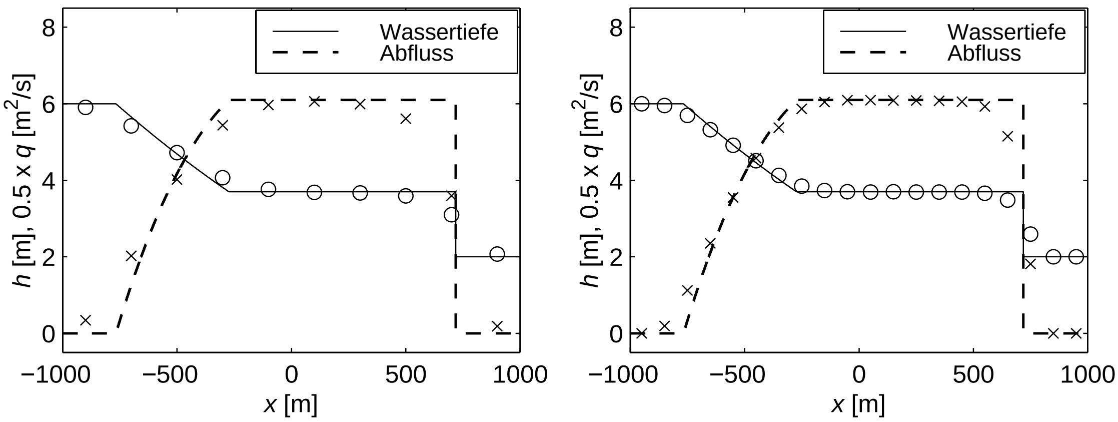

Abbildung 6.11: *Testproblem 4b, Elementmittelwerte der RKDG1-Methode (k = 1), a) Diskretisierung mit N = 10 Elementen, b) Diskretisierung mit N = 20 Elementen*

Testproblem 4a hat mit Ausnahme eines trockenen Gerinnes im Unterwasser des Damms die gleichen Anfangsbedingungen wie Testproblem 4b. Das Auflaufen der Dammbruchwelle auf die trockene Sohle stellt vom numerischen Gesichtspunkt das zu untersuchende Problem dar. Die Lösungen der verschiedenen Verfahren werden zum Zeitpunkt $t = 100$ s miteinander verglichen. In Tabelle 6.22 sind die Ergebnisse des RKDG0-Verfahrens dargestellt. Die Beobachtungen entsprechen denen von Testproblem 4b. Der L^1-Fehler verringert sich mit der Wahl der weniger dispersiven HLL- und Roe-Flüsse. Die Konvergenzordnung p ist ebenfalls kleiner als eins und bewegt sich zwischen durchschnittlich $\overline{p} = 0{,}55$ für den LF-Fluss und durchschnittlich $\overline{p} = 0{,}70$ für den HLL-Fluss.

Tabelle 6.22: *Testproblem 4a, RKDG0 (k = 0), L^1-Fehler für CFL = 0,9*

	LF-Fluss	HLL-Fluss	Roe-Fluss

N	L^1-Fehler	Ordnung p	L^1-Fehler	Ordnung p	L^1-Fehler	Ordnung p
10	1364,93	-	1242,35	-	1058,98	-
20	960,45	0,51	729,34	0,77	644,60	0,72
40	726,30	0,40	488,37	0,58	460,75	0,48
80	506,17	0,52	308,32	0,66	293,10	0,65
160	327,01	0,63	185,91	0,73	178,64	0,71
320	202,16	0,69	109,94	0,76	107,93	0,73
		$\overline{p} = 0{,}55$		$\overline{p} = 0{,}70$		$\overline{p} = 0{,}66$

In Tabelle 6.23 sind die L^1-Fehler der verschiedenen numerischen Flüsse und einer linearen Ansatzfunktion dargestellt. Auch in diesem Testproblem hat der Fehler des numerischen Verfahrens eine geringe Sensitivität auf die Wahl des numerischen Flusses. Die Konvergenzordnung ist in diesem Beispiel kleiner als der theoretisch mögliche Wert von $p = 1$ und liegt im Bereich zwischen $\overline{p} = 0{,}80$ für den LF- und HLL-Fluss und $\overline{p} = 0{,}84$ für den Fluss nach Roe bei allen numerischen Flüssen in etwa auf dem gleichen Niveau.

Tabelle 6.23: Testproblem 4a, RKDG1 (k = 1), L^1-Fehler für CFL = 0,3, $M_L = 0$

	LF-Fluss		HLL-Fluss		Roe-Fluss	
N	L^1-Fehler	Ordnung p	L^1-Fehler	Ordnung p	L^1-Fehler	Ordnung p
10	399,64	-	366,36	-	388,31	-
20	186,22	1,10	173,09	1,08	172,58	1,17
40	130,10	0,52	108,45	0,67	106,37	0,70
80	83,37	0,64	71,50	0,60	68,32	0,64
160	47,46	0,81	41,83	0,77	39,65	0,78
320	25,31	0,91	22,67	0,88	21,46	0,89
		$\overline{p} = 0{,}80$		$\overline{p} = 0{,}80$		$\overline{p} = 0{,}84$

Der Gewinn an Genauigkeit bzw. die Verkleinerung des L^1-Fehlers hat im Vergleich der RKDG0- und der RKDG1-Methode den gleichen Quotienten von ungefähr vier (Tabelle 6.24). Unter der Berücksichtigung der Konvergenzordnung des RKDG0-Verfahrens mit HLL- Fluss von $p = 0{,}70$ liegt seine Effizienz mit der linearen Ansatzfunktion bei einem Faktor zwischen 2,76 und 7,64 gegenüber dem Verfahren mit der konstanten Ansatzfunktion. Die Anwendung der RKDG1-Methode ist damit, unabhängig von der betrachteten Netzverfeinerung, vorteilhaft. Es lässt sich in diesem Zusammenhang die begründete Vermutung aufstellen, dass die Effizienz des RKDG1-Verfahrens von Testproblem 3 bis 4 mit größeren Bereichen von nicht-konstanten Lösungen zunimmt.

Tabelle 6.24: Testproblem 4a, Effizienz RKDG0 und RKDG1, HLL-Fluss

N	L^1-Fehler ($k = 0$)	L^1-Fehler ($k = 1$)	Faktor f	N^* ($p = 0{,}70$)	Effizienz [-]
10	1242,35	366,36	3.39	57	2,76
20	729,34	173,09	4,21	156	5,13
40	488,37	108,45	4,50	343	6,20
80	308,32	71,50	4,31	645	5,48
160	185,91	41,83	4,44	1346	5,97
320	109,94	22,67	4,84	3044	7,64

In Abbildung 6.12 sind die numerischen Lösungen der RKDG1-Methode mit HLL-Fluss für die Wassertiefe und den breitenbezogenen Durchfluss auf Grundlage der Berechnungsnetze mit $N = 10$ und $N = 20$ Elementen dargestellt.

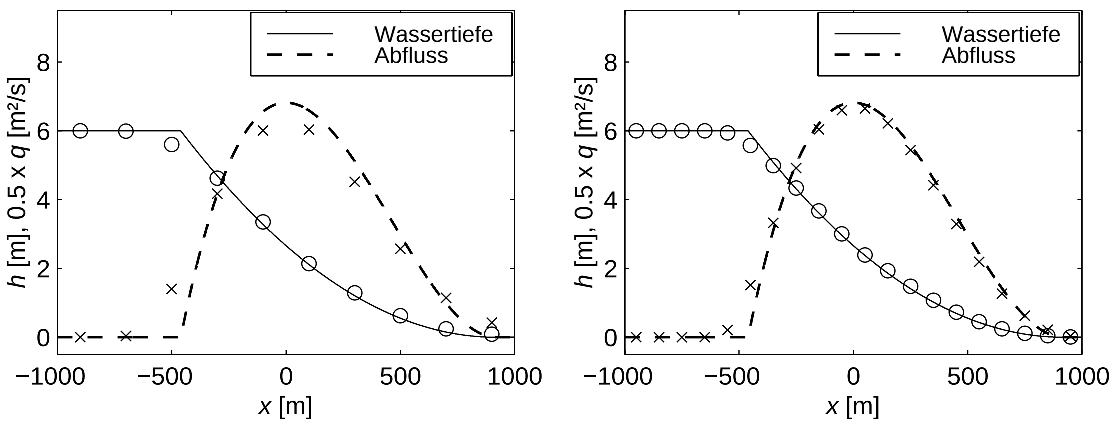

Abbildung 6.12: Testproblem 4a, Elementmittelwerte der RKDG1-Methode (k = 1), a) Diskretisierung mit N = 10 Elementen, b) Diskretisierung mit N = 20 Elementen

6.5 Testproblem 5: 2D-Kreisdammbruch

Testproblem 5 stellt eine zweidimensionale Erweiterung des eindimensionalen Dammbruchs dar. Das Berechnungsgebiet besteht aus einem Quadrat mit einer Kantenlänge von 40 m und einem Schwerpunkt im Koordinatenursprung. Ein kreisförmiger Damm von infinitesimaler Dicke und einem Radius von $r = 11$ m um den Koordinatenursprung teilt das Berechnungsgebiet in zwei Zonen mit verschiedenen Wassertiefen. Innerhalb des Damms beträgt die Wassertiefe $h_{int} = 10$ m, außerhalb $h_{ext} = 1$ m (Abbildung 6.14a). Die Geschwindigkeiten sind in beiden Bereichen gleich Null. Das Testproblem wurde von einer Reihe von Autoren wie ANASTASIOU & CHAN (1997), LOUAKED & HANICH (1998), MINGHAM & CAUSON (1998), FUJIHARA & BORTHWICK (2000) und TSENG & CHU (2000) verwendet.

Obwohl für das zweidimensionale Testproblem keine analytische Lösung bekannt ist, kann aufgrund der Rotationssymmetrie des Problems eine quasi-eindimensionale Referenzlösung berechnet werden. Da die tangentiale Geschwindigkeit gleich Null ist, kann das quasi-eindimensionale Problem in Polarkoordinaten wie folgt formuliert werden

$$\partial_t U + \partial_r F(U) = S(U) \tag{6.29}$$

mit

$$F(U) = \begin{pmatrix} q_r \\ \dfrac{q_r^2}{h} + \dfrac{1}{2} g h^2 \end{pmatrix} \tag{6.30}$$

$$S(U) = -\frac{1}{r} \begin{pmatrix} q_r \\ \dfrac{q_r^2}{h} \end{pmatrix} \tag{6.31}$$

Die quasi-eindimensionale Referenzlösung wird mit Hilfe des schon in den Testproblemen 1 bis 4 verifizierten RKDG1-Verfahrens unter Ergänzung der Quellterme in Gleichung (6.31) auf einem Berechnungsnetz von $N = 2560$ Elementen im Intervall $0 \le r \le 20$ m berechnet (Abbildung 6.17b). Zur zweidimensionalen Berechnung des Testproblems werden die RKDG-Verfahren mit konstanten ($k = 0$) und linearen ($k = 1$) Ansatzfunktionen auf einem unstrukturierten Dreiecksnetz mit 5422 Elementen verwendet (Abbildung 6.13).

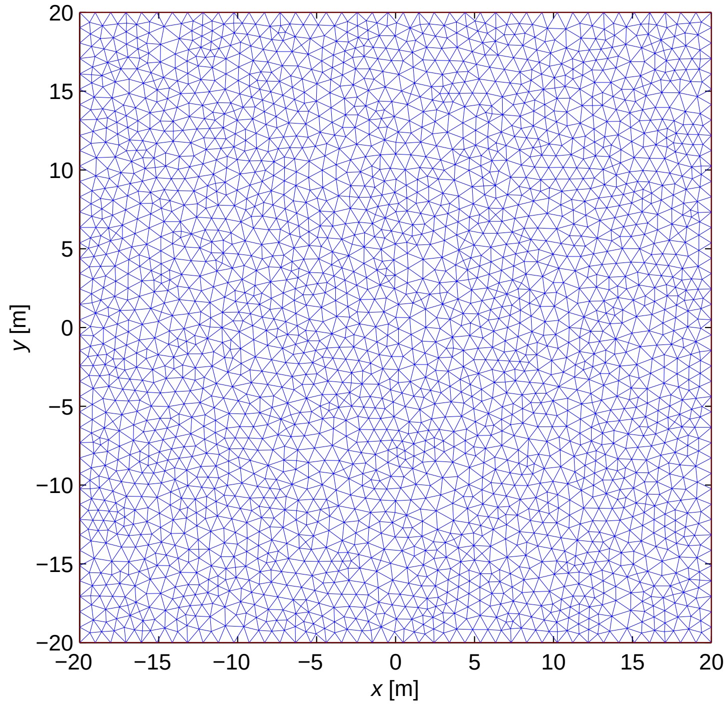

Abbildung 6.13: Testproblem 5, Dreiecksnetzgeometrie

In Abbildung 6.14 ist der Anfangszustand zum Zeitpunkt $t = 0$ dargestellt. Die zweidimensionale numerische Lösung zum Zeitpunkt $t = 0{,}69$ s ist für das RKDG0-Verfahren in Abbildung 6.15a, für das RKDG1-Verfahren in Abbildung 6.15b gegeben.

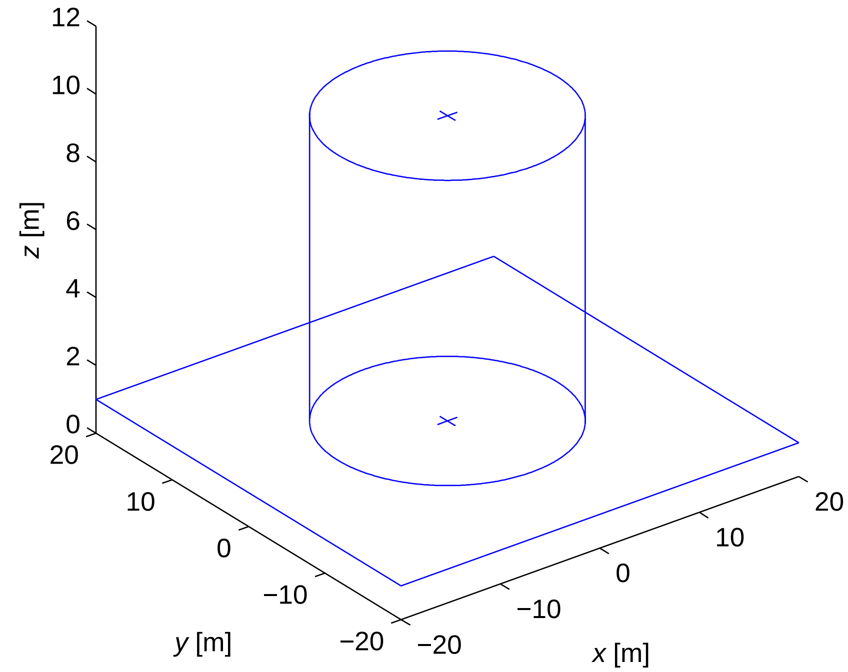

Abbildung 6.14: Testproblem 5, Wasseroberfläche (2D-RKDG, k = 1, M_L = 0,1) im Initialzustand

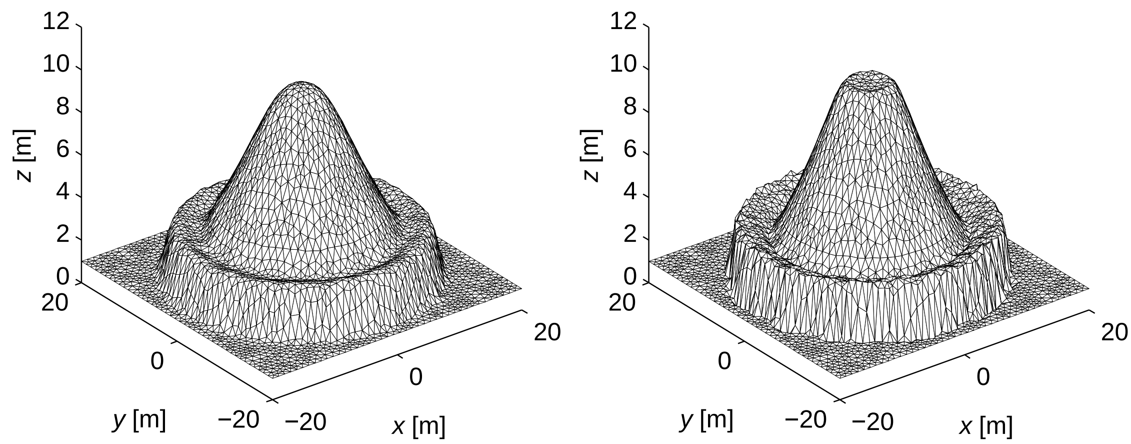

Abbildung 6.15: Testproblem 5, a) Wasseroberfläche (2D-RKDG0, k = 0) nach t = 0,69 s,
b) Wassertiefe (2D-RKDG1, k = 1, M_L = 0,1) nach t = 0,69 s

In Abbildung 6.16 sind die Höhenlinien der Wasseroberfläche zum Zeitpunkt t = 0,69 s dargestellt. Trotz der Berechnung der Lösung auf einem unstrukturierten Dreiecksnetz kann, unabhängig von der gewählten Ansatzfunktion, ein hohes Maß an Regelmäßigkeit festgestellt werden. Die Stoßfront kann mit der RKDG1-Methode wie in den eindimensionalen Testproblemen innerhalb von 2 Elementen abgebildet werden (Abbildung 6.15b). Die Lösung mit Hilfe der RKDG0-Methode ist wesentlich dispersiver.

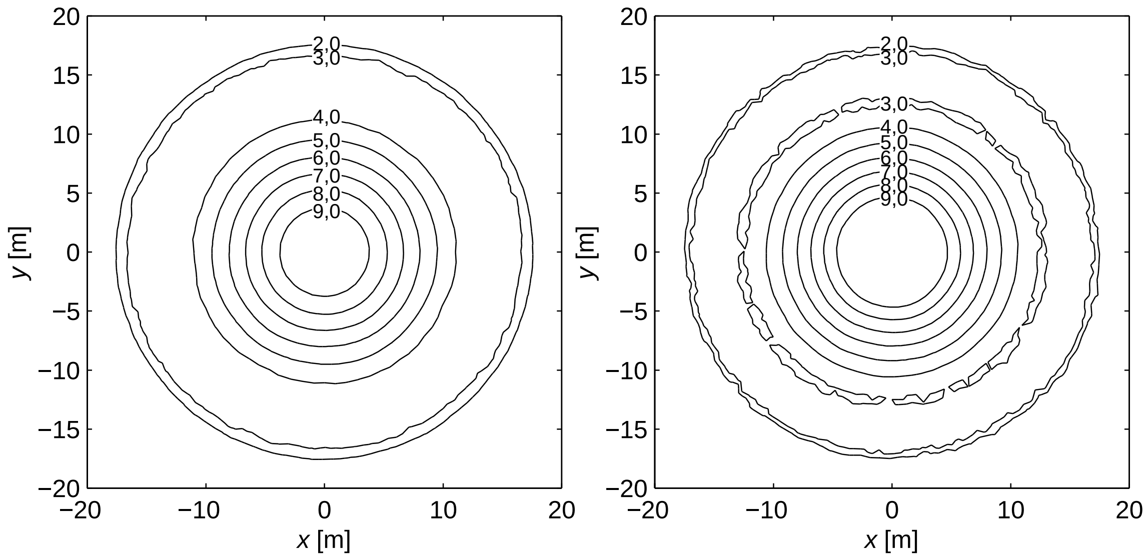

Abbildung 6.16: Testproblem 5, a) Höhenlinien der Wasseroberfläche nach t = 0,69 s, 2D-RKDG0, b) Höhenlinien der Wasseroberfläche nach t = 0,69 s, 2D-RKDG1

In Abbildung 6.17 ist ein Schnitt entlang der x-Achse dargestellt. Die kontrollierte Verletzung der TVD-Bedingung, augenfällig mit der Überschreitung der maximalen Wassertiefe von $h = 10$ m im Bereich um $x = 3$ m, ist mit der Wahl des Limiter-Parameters $M_L = 0{,}1$ zu begründen. Die Näherung besonders des RKDG1-Verfahren weist im Vergleich zu den Ergebnissen in der oben zitierten Literatur (ANASTASIOU & CHAN, 1997; LOUAKED & HANICH, 1998; MINGHAM & CAUSON, 1998; FUJIHARA & BORTHWICK, 2000; TSENG & CHU, 2000) eine hohe Übereinstimmung mit der Referenzlösung auf. So wird vor allem das ansteigende Plateau im Intervall $12{,}5\,\text{m} \le r \le 17{,}5\,\text{m}$ exzellent reproduziert.

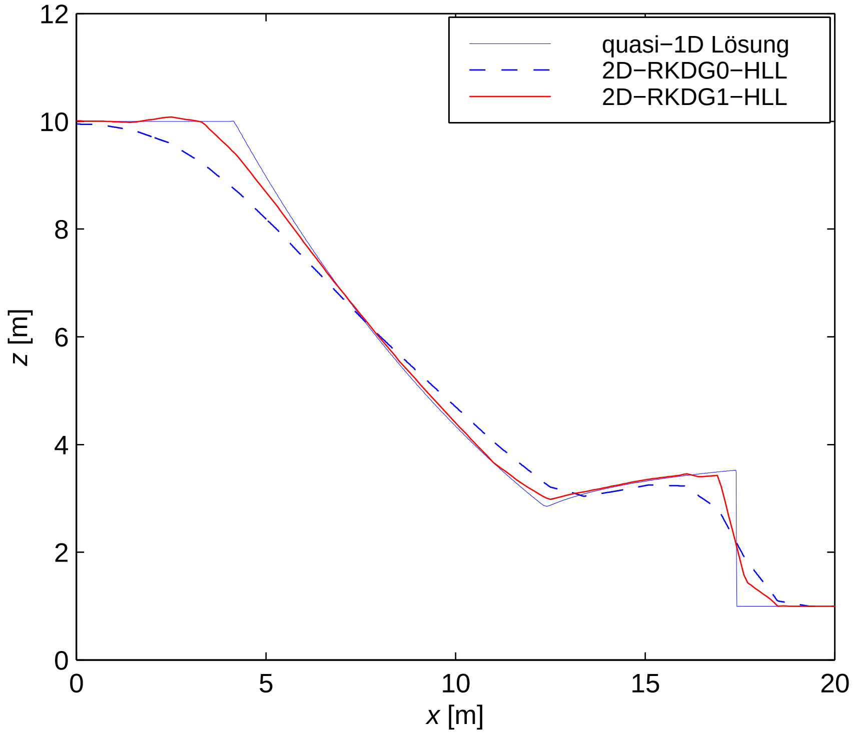

Abbildung 6.17: Testproblem 5, Querschnitt der Wasseroberfläche für y = 0 (quasi-1D Lösung, 2D-RKDG0, 2D-RKDG1, M_L = 0,1)

7 Fallstudien

In diesem Kapitel soll die Anwendung der FWG anhand von zwei Fallbeispielen demonstriert und validiert werden. Im ersten Fallbeispiel handelt es sich um eine überkritische, stationäre Strömung in einer sich verengenden Schussrinne. Als zweites Beispiel wird die durch den Dammbruch von Malpasset initiierte instationäre und transkritische Flutwelle im Tal des Reyran untersucht. Für beide Fallbeispiele werden die bei der Herleitung des mathematischen Modells der FWG getroffenen Annahmen und Vereinfachungen ausführlich diskutiert und analysiert.

7.1 Fallbeispiel 1: Schussrinne (Ippen & Dawson, 1951)

In der folgenden, ersten Anwendung auf Grundlage der FWG wird die Strömung in einer sich verengenden Schussrinne mit einem überkritischen Abfluss untersucht. Die verwendeten, in einem Laborgerinne aufgenommenen, experimentellen Daten (Abbildung 7.1) stammen aus Ippen & Dawson (1951) und sind von einigen Wissenschaftlern zur Validierung der FWG zur Berechnung von Schussrinnenströmung benutzt worden (Chaudhry, 1994; Berger & Stockstill, 1995; Molls & Chaudhry, 1995; Rahman & Chaudhry, 1997). Das Gerinne verengt sich an beiden Seitenwänden unter einem Winkel von $\theta = 6°$ auf einer Länge von 1,457 m (= 4,78 ft) von einer Breite $b_0 = 0{,}6096$ m (= 2 ft) auf eine Breite $b_1 = 0{,}3048$ m (= 1 ft). Die Gerinneabmessungen und die Wassertiefen sind wegen einer einfacheren Vergleichbarkeit mit den in der Literatur vorhandenen Ergebnissen in der Längeneinheit Foot (1 ft = 0,3048 m) angegeben. Das Experiment wurde mit einer Einlaufwassertiefe von $h_0 = 0{,}03048$ m (= 0,1 ft) und einem Gesamtabfluss von $Q = 0{,}0408$ m^3/s (= 1.44 c.f.s. - cubic ft per second) durchgeführt. Dies entspricht einer Froudezahl im Einlauf von $Fr = 4$.

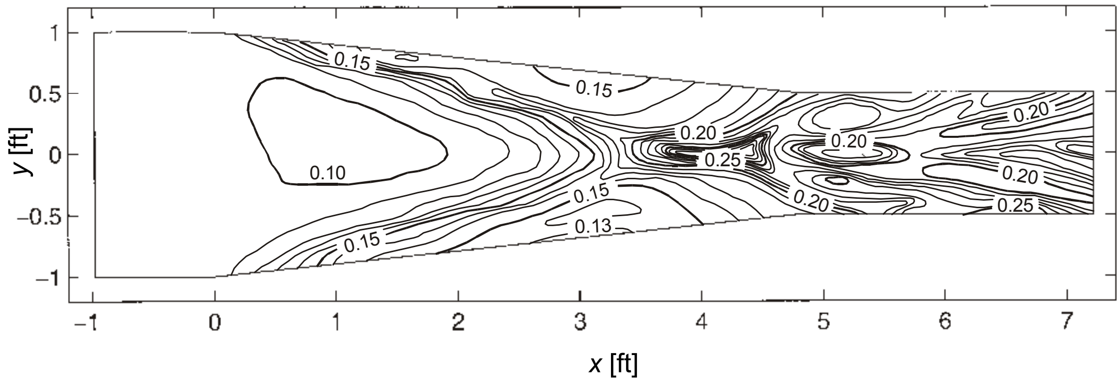

Abbildung 7.1: Fallbeispiel Schussrinne, Höhenlinien der Wassertiefe h [ft] in der Gerinneverengung, Messwerte modifiziert nach IPPEN & DAWSON *(1951).*

Analog zu BERGER & STOCKSTILL (1995) wird der Rauheitsparameter nach Manning für das Gerinne mit $n = 0{,}0107\ \mathrm{s/m}^{1/3}$ angesetzt. Mit einer Sohlneigung von $S_0 = 0{,}05664$ ergibt sich im durch die Wandänderung ungestörten Teil der Strömung ein gleichförmiger Abfluss mit einer konstanten Wassertiefe. Die Viskosität wird zu $\nu_t = 0{,}001\ \mathrm{m^2/s}$ gesetzt. Eine Berechnung erfolgt mit der RKDG1-Methode auf zwei unstrukturierten Dreiecksnetzen mit 4935 und 21.246 Elementen.

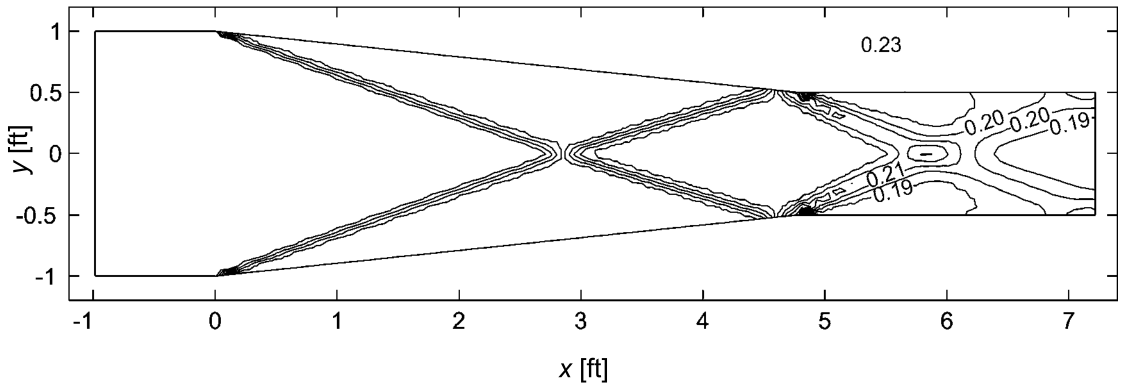

Abbildung 7.2: Fallbeispiel Schussrinne, Höhenlinien der Wassertiefe h [ft] in der Gerinneverengung, Ergebnis der RKDG1-Methode (N = 4935 Dreieckselemente)

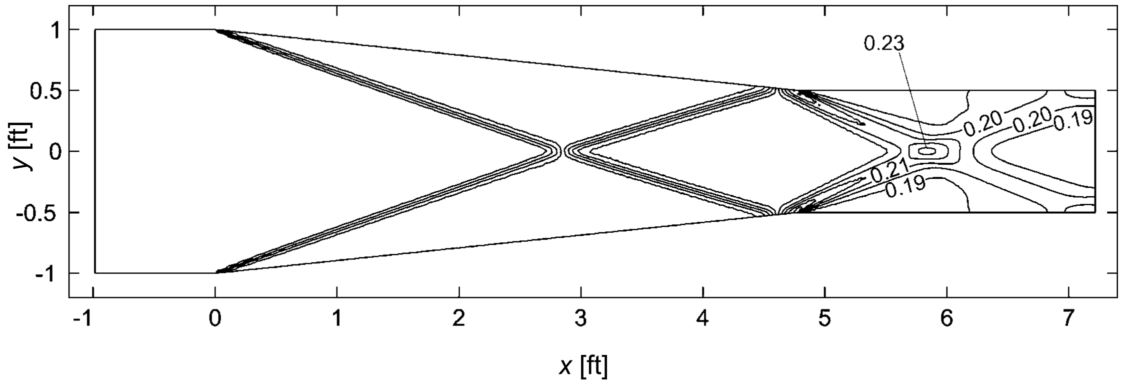

Abbildung 7.3: Fallbeispiel Schussrinne, Höhenlinien der Wassertiefe h [ft] in der Gerinneverengung, Ergebnis der RKDG1-Methode (N = 21.246 Dreieckselemente)

Die einzelnen Berechnungen auf den unterschiedlichen Netzen (Abbildung 7.2 und Abbildung 7.3) zeigen untereinander eine hohe Übereinstimmung. Die Maxima an der Stelle $x = 6$ ft in der Gerinnelängsachse können in beiden Berechnungen mit einer Wassertiefe von geringfügig mehr als 0,23 ft (= 0,0701 m) reproduziert werden. Andererseits ist dieses Maximum der Wassertiefe in den gemessenen Daten nicht vorhanden.

In den von IPPEN & DAWSON (1951) durchgeführten Experimenten an einer positiven Wandänderung von $\theta = 6°$ zeigt sich, dass der gemessene Reflektionswinkel einer Stoßfront bzw. eines Verdichtungsstoßes um 9,9 % kleiner als der mit der Flachwassertheorie berechnete theoretische Wert ist. Auch wenn dieses Ergebnis für eine Froudezahl von 3,86 erhalten wurde, wird ein sehr ähnliches Verhältnis für eine Froudezahl von 4 erwartet. Als Folge dieser Beobachtung trifft im Experiment der durch die Wandänderung hervorgerufene Verdichtungsstoß die gegenüberliegende Wand nicht im Bereich der Verengung, sondern im geraden Teil des Gerinnes. Dadurch ändert sich die Strömung im verengten, geraden Gerinneabschnitt signifikant. Die Strömung ist sensitiv auf eine Abbildung des Reflexionswinkels des Verdichtungsstoßes.

Durch die Vernachlässigung des vertikalen Impulses im tiefengemittelten Flachwassermodell findet eine Abbildung der Wassertiefe bei einer reibungsfreien Flüssigkeit durch eine Diskontinuität und unter Berücksichtigung der viskosen Kräfte durch einen sehr steilen kontinuierlichen Übergang statt (Abbildung 7.4). Der von IPPEN & DAWSON (1951) oder auch HAGER et al. (1994) in Experimenten beobachtete Verlauf der Wassertiefe an der Gerinnewand zeigt einen weniger steilen, kontinuierlicheren Übergang mit einer Überschreitung der theoretischen Lösung hinter der Diskontinuität[6].

[6] Diese Beobachtung kann ebenfalls bei einem senkrechten Stoß gemacht werden, z. B. bei einem gewellten Wechselsprung. Eine Beschreibung verschiedener, im Experiment auftretender Formen von Wechselsprüngen findet sich in BOLLRICH (1996).

An Stoßfronten mit einer höheren Energiedissipation kann die Front außerdem brechen und wie bei einem Wechselsprung die Form einer Walze haben.

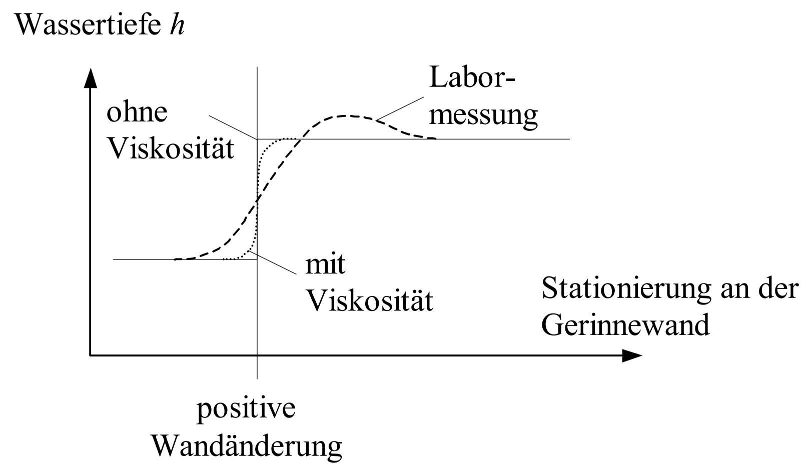

Abbildung 7.4: Fallbeispiel Schussrinne, Wassertiefe an der Gerinnewand bei einer positiven Wandänderung, modifiziert nach IPPEN *&* DAWSON *(1951)*

Die Wassertiefe an der Gerinnewand in Abbildung 7.2 und Abbildung 7.3 zeigt ein identisches Verhalten wie die theoretische Lösung mit Viskosität in Abbildung 7.4. Die im Experiment beobachtete Absenkung des Wasserspiegels hinter der Stoßfront kann in der numerischen Simulation nicht reproduziert werden. Weiterhin treffen sich die Stoßfronten im Experiment weiter stromabwärts als in der numerischen Simulation und bilden ein Maximum der Wassertiefe an der Stelle x = 4 ft in der Längsachse des Gerinnes (Abbildung 7.1). Dieses Maximum resultiert aus dem Zusammentreffen der beiden Überschreitungen der Wassertiefe hinter den theoretischen Stoßfronten und kann, wie oben schon angesprochen, nicht von der numerischen Simulation reproduziert werden.

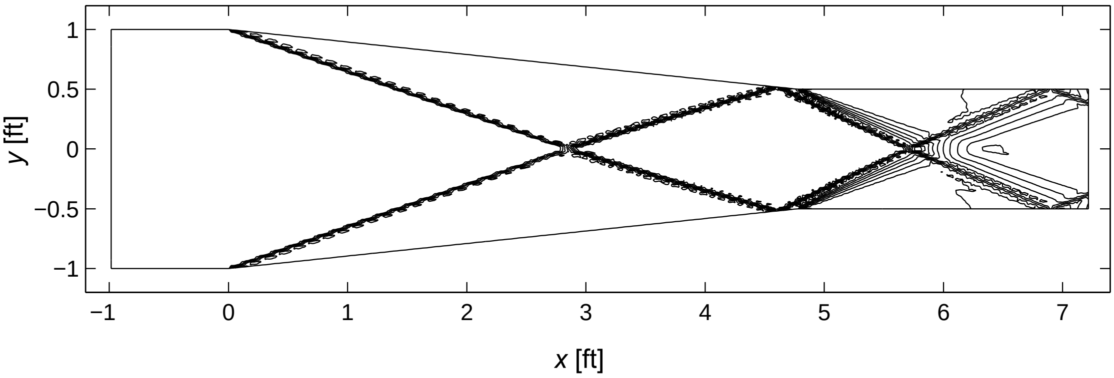

Abbildung 7.5: Fallbeispiel Schussrinne, Höhenlinien der Wassertiefe h [ft] in der Gerinneverengung, Ergebnis der RKDG1-Methode ohne Berücksichtigung von Viskosität (N = 21.246 Dreieckselemente)

Um die Sensitivität der Berechnung auf die angesetzte Viskosität zu untersuchen, wird die Gerinneströmung bei Vernachlässigung der viskosen Terme in den FWG berechnet. Das Ergebnis ist in Abbildung 7.5 graphisch dargestellt. Die Abbildung der Stoßfronten ist in dieser Berechnung wesentlich schärfer als in der analogen Simulation mit Viskosität. Da Reibung und Sohlneigung sich hinter der Stoßfront nicht vollständig im Gleichgewicht befinden, besitzt die Stoßfront eine leichte Krümmung in die Richtung ihrer Ursprungswand. Durch die schärfere Ausprägung der Wellenstrukturen im verengten, geraden Teil des Gerinnes lassen sich dort zwei verschiedene Wellen klar unterscheiden. Der bei $x = 0$ entspringende Verdichtungsstoß wird noch im sich verengenden Abschnitt des Gerinnes an der gegenüberliegenden Wand reflektiert. Darüber hinaus lässt sich in Abbildung 7.5 eine Expansionswelle erkennen, die an der zweiten Richtungsänderung der Wand entspringt. Träfe der Verdichtungsstoß exakt am Ursprung der Expansionswelle auf die gegenüberliegende Wand, würden sich beide Wellen gegenseitig aufheben. Im verengten, geraden Teil des Gerinnes würde sich eine Strömung mit einer konstanten Wassertiefe einstellen. Dieser Zustand ist für den Betrieb des Gerinnes anzustreben.

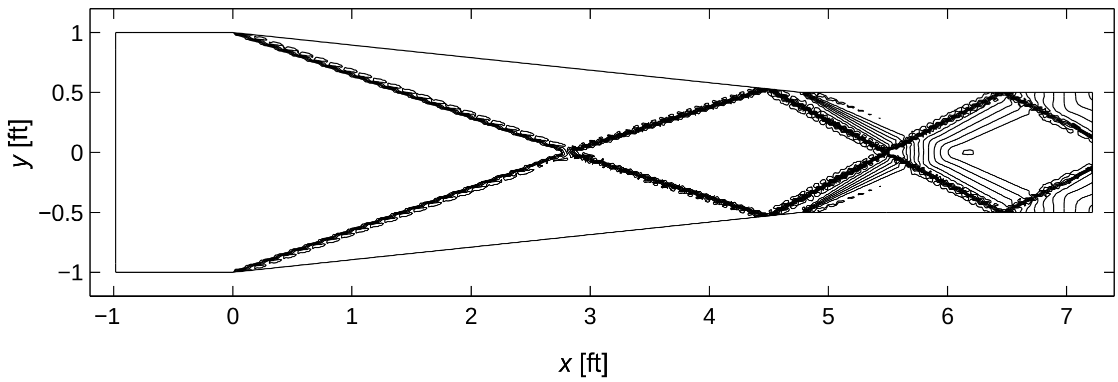

Abbildung 7.6: Fallbeispiel Schussrinne, Höhenlinien der Wassertiefe h [ft] in der Gerinneverengung, Ergebnis der RKDG1-Methode ohne Berücksichtigung von Viskosität, Sohlreibung und Sohlneigung (N = 21.246 Dreieckselemente)

Durch die zusätzliche Vernachlässigung von Sohlreibung und Sohlneigung des Gerinnes ergibt sich eine Strömung gemäß Abbildung 7.6. Die Stoßfronten sind nun gerade und entsprechen mit einem Winkel von $\beta = 19{,}16°$ zur x-Achse gut mit dem aus den Gleichungen (2.33) und (2.34) ableitbaren theoretischen Wert von $\beta = 19{,}68°$ überein. Durch die stromaufwärts verschobene Reflexion des Verdichtungsstoßes an der gegenüberliegenden Wand verstärken sich die Wellenmuster aus dem Verdichtungsstoß und der Expansionswelle im verengten, geraden Teil des Gerinnes ab der Koordinate $x = 4{,}75$ ft im Vergleich zur Berechnung mit Sohlneigung und -reibung.

Die auf den beiden benutzten Berechnungsnetzen unter Berücksichtigung der Viskosität im Fluid erzielten Ergebnisse sind weitgehend identisch und somit unabhängig von der gewählten Diskretisierung. Das Verschmieren der Stoßfronten, besonders im verengten Gerinne ab der Koordinate $x = 4{,}75$ ft, ist damit ein direkter Effekt der eingebrachten Viskosität und nicht etwa ein Resultat einer ungenauen Abbildung der Strömung durch das numerische Verfahren. Die erzielte Lösung kann damit als konvergent mit dem mathematischen Modell der FWG bezeichnet werden. Die wesentlich schärfere Darstellung der Wellenmuster ohne eine Berücksichtigung der Viskosität bestätigt diese Aussage.

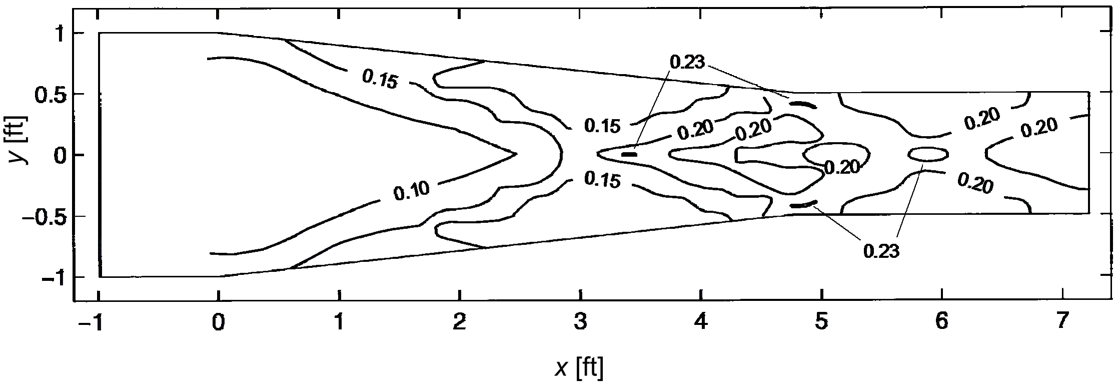

Abbildung 7.7: *Fallbeispiel Schussrinne, Höhenlinien der Wassertiefe h [ft] in der Gerinneverengung, Berechnungsergebnisse modifiziert nach* BERGER *&* STOCKSTILL *(1995)*

Die in Abbildung 7.2 und Abbildung 7.3 dargestellten Ergebnisse werden mit den Resultaten aus BERGER & STOCKSTILL (1995) verglichen (Abbildung 7.7). Die Autoren verwenden ein implizites Petrov-Galerkin-FE-Verfahren auf einem strukturierten Vierecksnetz. Trotz eines identischen Parametersatzes erweisen sich die mit diesem FE-Verfahren erzielten Ergebnisse als diffusiver und dispersiver als die mit dem RKDG1-Verfahren berechneten Resultate. Ein Grund für diese Beobachtung könnte die geringere Anzahl von 240 Elementen der räumlichen Diskretisierung sein. Die Autoren weisen allerdings in ihrer Arbeit darauf hin, dass sich das Ergebnis mit einer verfeinerten Diskretisierung nicht mehr ändert. Andererseits wurde schon in Kapitel 4 die benutzte modifizierte Testfunktion im Petrov-Galerkin-FE-Verfahren als ein Grund für eine stärkere Verschmierung der Lösungen identifiziert. Auffällig ist, dass die in BERGER & STOCKSTILL (1995) vorgestellte Lösung zwar besser mit den Labormessungen übereinstimmt, allerdings eine schlechtere, weil diffusivere und dispersivere, Lösung des mathematischen Modells der FWG darstellt.

Die FWG beinhalten mit den viskosen Termen anscheinend einen Mechanismus, der zu wenig Diffusion in die numerische Lösung einbringt. Eine Steigerung der tiefengemittelten Viskosität scheint jedoch aus physikalischen Gründen über den in den Berechnungen angesetzten Wert von ν_t = 0,001 m^2/s nicht sinnvoll zu sein. Es werden somit taugliche Erweiterungen der FWG in einer Art erforderlich, die weitere physikalisch basierte Terme zusätzliche Diffusion und Dispersion in die Lösung einbringen. Ein wichtiger Punkt dürfte dabei die näherungsweise Berücksichtigung des vertikalen Impulses sein (vgl. KHAN & STEFFLER, 1996a, 1996b, 1996c). Die Erweiterung der Standardformulierung der FWG für die Simulation überkritischen Gerinneabflusses oder für die Berechnung von Strömung über Wehrüberfälle stellt einen eigenen

Forschungszweig dar. An dieser Stelle sei kurz auf die in Kapitel 2 vorgestellten Ausführungen verwiesen.

Zusammenfassend kann die RKDG1-Methode als ein hervorragendes numerisches Modell für die Betrachtung überkritischer Gerinneströmung bezeichnet werden. Das Verfahren ermöglicht durch die hohe Güte der numerischen Lösung eine weitgehende Entkopplung von Fehlern aus dem numerischen Verfahren und dem mathematischen Modell der FWG.

7.2 Fallbeispiel 2: Malpasset

Der Dammbruch von Malpasset ist das einzige bekannte, in der Literatur vielfach verwendete Validierungsbeispiel für die Berechnung einer Dammbruchwelle auf der Grundlage von Naturmessdaten. Die Daten dieses Testproblems wurden von einer Reihe von Autoren (z. B. HERVOUET & VAN HAREN, 1996 und HERVOUET, 2000) zur Überprüfung von eindimensionalen und zweidimensionalen, auf der Flachwassertheorie basierenden numerischen Modellen genutzt. Insbesondere sind eine Reihe von Untersuchungen in der von der Europäischen Union geförderten CADAM-Initiative (BROICH, 1999; GOUTAL, 1999b; ALCRUDO & GIL, 1999) durchgeführt und mit vorhandenen Ergebnissen aus einem physikalischen Modellversuch verglichen worden.

Der Malpassetdamm wurde zur Speicherung von Wasser zur Trinkwassergewinnung und Bewässerung gebaut. Die Bogenstaumauer mit einer Höhe von 66,5 m staute den Reyran ungefähr 12 km nördlich der Stadt Frejus an der französischen Riviera. Der Stauraum hatte eine maximale Kapazität von $55 \cdot 10^6$ m^3. Starke Regenfälle über mehrere Tage führten zu einer raschen erstmaligen Füllung des Stauraums und zum Bruch der Mauer am 2. Dezember 1959 gegen 21:14 Uhr. Als Hauptursache für ihr Versagen wurde der hohe Porenwasserdruck in einer Felskluft identifiziert. Unter dem zunehmenden Porenwasserdruck löste sich die Gründung der Mauer vom Untergrund. Die Mauer kollabierte schlagartig. Die sich zum Meer ausbreitende Dammbruchwelle forderte 433 Menschenleben. Sie zerstörte weiter 800 m eines Bahndamms, eine Brücke und wesentliche Teile der Infrastruktur des überfluteten Gebiets.

Das der oben angesprochenen physikalischen Modelluntersuchung und den numerischen Berechnungen zu Grunde liegende digitale Geländemodell wurde historischen Karten aus dem Jahr 1931 entnommen. Aufgrund der großen Sohlhöhenveränderungen in Verbindung mit der aufgetretenen Flutwelle konnte die Geländegeometrie vor dem Bruch nicht durch eine spätere Geländeaufnahme aufgemessen werden. Im Geländemodell (Abbildung 7.8) lassen sich im direkt stromabwärts vom Damm gelegenen Tal zwei starke Kurven mit einer Richtungsänderung von über 90° erkennen. Der weitere Verlauf des Tals ist durch die Mündung zweier Nebenflüsse des Reyran geprägt, bis sich das Tal in eine Ebene vor der Stadt Frejus aufweitet. Das im Rahmen der CADAM-Initiative benutzte Netz des Geländes besteht aus 13.541 Knotenpunkten mit 26.000 Dreieckselementen. Die Geländehöhen, relativ zum Meeresspiegel, variieren zwischen -20 m am Boden des Mittelmeers und +100 m in den Bergen am Reservoir.

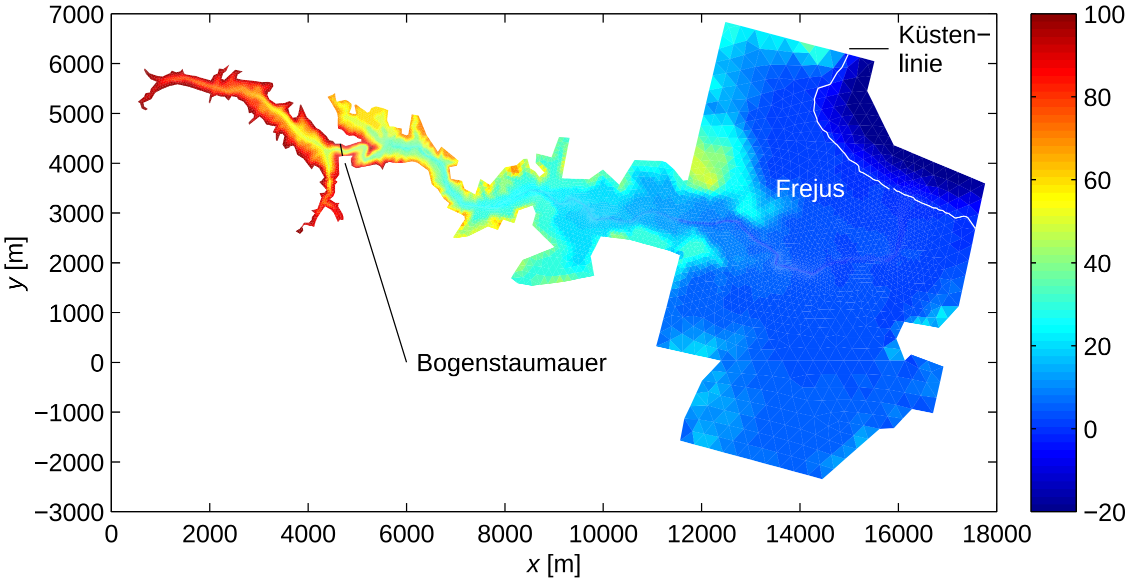

Abbildung 7.8: Fallbeispiel Malpasset, Digitales Geländemodell des Tals des Reyran, Sohlhöhe z [m] (Farbfläche)

Im Geländemodell werden verschiedene Strukturen vernachlässigt. Dabei handelt es sich um:

- die Überreste der Bogenstaumauer,
- die Straße nach Esterel, ungefähr 1,5 km stromabwärts des Damms, von dem die Brücke und ca. 800 m des Straßendammes weggespült wurden,
- die Eisenbahnlinie Nizza-Marseille, ungefähr 9,5 km stromabwärts des Damms.

Für die Topographie des Straßendamms und der Eisenbahnlinie liegen keine genauen Daten vor. Der Einfluss des Esterel-Straßendamms wurde im physikalischen Modell als nur lokal identifiziert. Über den Einfluss des Eisenbahndamms gibt es keinerlei Informationen.

Die Naturmessungen stammen von drei im Reyran-Tal vorhandenen Transformatoren, die durch die Flutwelle zerstört wurden. Die genauen Ausfallzeitpunkte dieser Transformatoren (Abbildung 7.9) und somit auch die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle sind gegeben. Weiterhin wurden von der Polizei für einige Punkte (im Rahmen dieser Arbeit nicht benutzt) am rechten und linken Ufer die maximalen Wasserstände der Flutwelle aufgenommen.

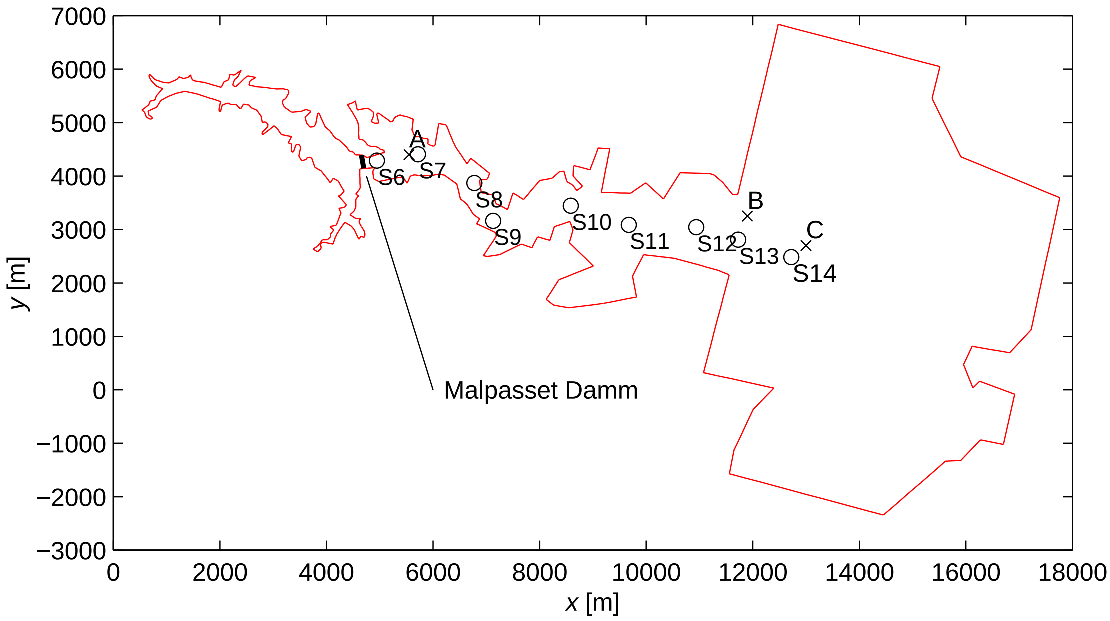

Abbildung 7.9: Fallbeispiel Malpasset, Position der ausgefallenen Transformatoren (A-C) und der Messpunkte des physikalischen Modells (S6-S14)

Aus einem bei der Electricité de France (EDF) in den 60er Jahren durchgeführten physikalischen Modellversuch stehen an neun Messpunkten (S6-S14) die Ankunftszeit der Welle und die maximale Wellenhöhe zur Verfügung.

7.2.1 Anfangsbedingungen

Der von den Modellierern der CADAM-Gruppe (GOUTAL, 1999a) angenommene Oberwasserstand des Reservoirs von +100 m wird für die durchgeführten Berechnungen übernommen. Der Wasserspiegel des Mittelmeeres wird weiterhin bei einer Höhe von 0 m angesetzt.

Der Damm wird bei Vernachlässigung seiner Dicke als Linie zwischen den Punkten mit den Koordinaten ($x = 4701{,}18$ m, $y = 4143{,}41$ m) und ($x = 4655{,}50$ m, $y = 4392{,}10$ m) angenommen. Sein Bruch geschieht schlagartig zum Zeitpunkt $t = 0$. Die Mauerreste werden in der Berechnung vernachlässigt.

Auf der Luftseite des Damms wird ein trockener Untergrund angenommen. Der unbekannte Abfluss im Reyran durch den vor dem Bruch geöffneten Grundablass wurde in der Berechnung vernachlässigt, da er nach HERVOUET & VAN HAREN (1996) und HERVOUET (2000) praktisch keinen Einfluss auf die Ergebnisse hat.

Die Berechnung findet mit dem von der EDF zur Verfügung gestellten Netz mit ca. 26.000 Dreieckselementen statt. Die Ergebnisse der RKDG1-Methode mit HLL-Fluss werden im Folgenden mit den Ergebnissen anderer CADAM-Teilnehmer (BROICH, 1999; GOUTAL, 1999b; ALCRUDO & GIL, 1999) und mit HERVOUET (2000) verglichen. Bei den vorgestellten numerischen Methoden der CADAM-Teilnehmer handelt es sich ausschließlich um explizite, zweidimensionale FV-Verfahren mit entsprechenden Restriktionen der CFL-Zahl, die kleiner als eins gewählt werden muss. Hervouet benutzt den zweidimensionalen TELEMAC-2D Programmcode, der auf einer Kombination einer impliziten Streamline-Upwind-Petrov-Galerkin-FE-Methode und eines Charakteristikenverfahrens für die Diskretisierung der konvektiven Terme basiert (siehe Kapitel 4). Obwohl dieses Verfahren theoretisch in der Wahl der Zeitschritte keinen Restriktionen unterliegt, wird zur ausreichend genauen Abbildung der stark instationären Strömung in der Zeit eine Zeitschrittweite von $\Delta t = 0{,}5$ s gewählt. Die CFL-Zahl in der Berechnung hat damit einer maximalen Wert von 2,1.

Mit einer im gesamten Berechnungsgebiet konstanten Rauheit von $n = 0{,}0333\ \mathrm{s/m^{1/3}}$ bzw. $k_{St} = 30\ \mathrm{m^{1/3}/s}$ wird ein Vergleich mit den anderen, oben vorgestellten numerischen Verfahren durchgeführt. Mit diesem Wert können die vorliegenden Felddaten durch die numerischen Verfahren am besten reproduziert werden.

7.2.2 Ausbreitungszeiten

Die zerstörten Transformatoren befinden sich 1400 m (Transformator A), 9200 m (Transformator B) und 10.500 m (Transformator C) stromabwärts des Damms. Der Kurzschluss bzw. die Zerstörung der Transformatoren tritt nach Angaben der EDF 100 s (A), 1240 s (B) und 1420 s (C) nach dem Dammbruch ein. Dabei ist die Zeit vom Bruch des Damms bis zur Zerstörung von Transformator A mit 100 s nur ein Schätzwert, so dass für die Überprüfung der numerischen Modelle die relativen Ausbreitungszeiten der Flutwelle von Transformator A zu den Transformatoren B und C, sowie die Zeit von Transformator B zu Transformator C herangezogen werden.

In Tabelle 7.1 sind die Ausbreitungszeiten der Dammbruchwelle zwischen den Transformatoren und ihre prozentualen Abweichungen von den Felddaten zwischen den Transformatoren A, B und C für die RKDG1-Methode und die oben angesprochenen numerischen Verfahren gegeben. Die prozentualen Abweichungen sind weiterhin in Abbildung 7.10 graphisch dargestellt.

Tabelle 7.1: Fallbeispiel Malpasset, Ausbreitungszeiten und prozentuale Abweichungen der Flutwelle zwischen den Transformatoren, Ergebnisse verschiedener numerischer Verfahren, $n = 0{,}0333\ s/m^{1/3}$, modifiziert nach HARMS (2001)

	A nach B [s]	[%]	A nach C [s]	[%]	B nach C [s]	[%]
Felddaten	1140		1320		180	
RKDG1, HLL-Fluss	**1130**	**-0,88**	**1300**	**-1,52**	**170**	**-5,56**
BROICH (1999)	1170	+2,63	1320	0,00	150	-16,67
GOUTAL (1999b)	1136	-0,35	1260	-4,55	124	-31,11
HERVOUET (2000)	1176,5	+3,20	1325	+0,38	148,5	-17,50
ALCRUDO & GIL (1999)	1161	+1,84	1299	-1,59	138	-23,33

Für die angenommene konstante Rauheit von $n = 0{,}0333\ s/m^{1/3}$ liefern alle aufgeführten numerischen Verfahren in etwa die gleichen Ergebnisse. Dabei liegt die Reproduktion der Ausbreitungszeiten von Punkt A zu den Punkten B und C bei einer maximalen Abweichung von ±5 %. Die prozentuale Abweichung der Ausbreitungszeit von Punkt B zu Punkt C ist größer und wird von allen numerischen Verfahren in einem Bereich zwischen 5 % und 31 % unterschritten. Die RKDG1-Methode liefert im Vergleich zu den anderen vorgestellten Verfahren sehr gute Ergebnisse.

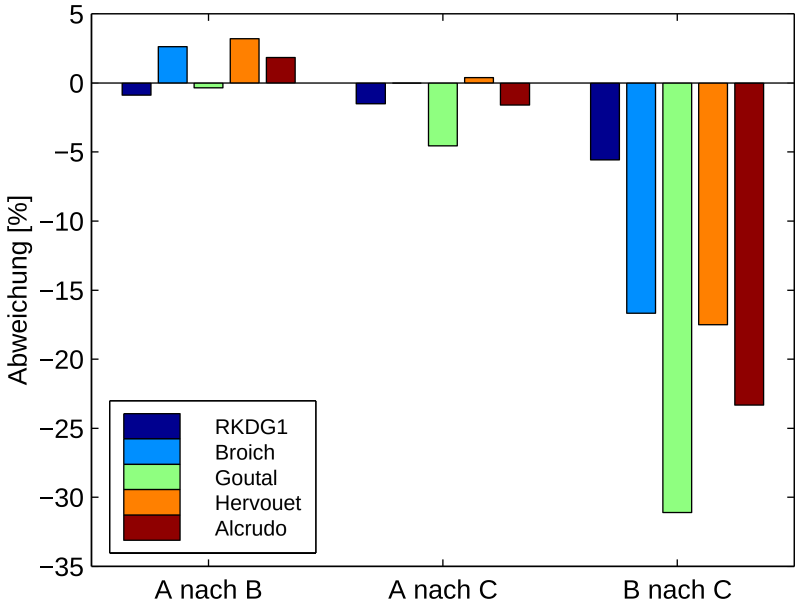

Abbildung 7.10: *Fallbeispiel Malpasset, prozentuale Abweichungen der Laufzeit der Flutwelle zwischen den Transformatoren, Ergebnisse verschiedener numerischer Verfahren, n = 0,0333 s/m$^{1/3}$*

Die Variation der Rauheit, dargestellt in Tabelle 7.2 und Abbildung 7.11, zeigt eine deutliche Abhängigkeit der Ausbreitungszeiten von der angenommenen Rauheit im Berechnungsgebiet. Die Zeiträume werden dabei erwartungsgemäß mit kleineren Rauheiten n kürzer. Eine Ausnahme bildet dabei lediglich die Ausbreitung der Flutwelle von Punkt B zu Punkt C bei einer Steigerung der Rauheit von $n = 0{,}0333$ s/m$^{1/3}$ auf $n = 0{,}035$ s/m$^{1/3}$.

Tabelle 7.2: *Fallbeispiel Malpasset, Ausbreitungszeiten und prozentuale Abweichungen der Laufzeit der Flutwelle zwischen den Transformatoren, RKDG1-Verfahren, verschiedene Rauheiten, modifiziert nach HARMS (2001)*

	A nach B [s]	[%]	A nach C [s]	[%]	B nach C [s]	[%]
Natur	1140		1320		180	
$n = 0{,}025$ s/m$^{1/3}$	945	-17,11	1085	-17,80	140	-22,22
$n = 0{,}030$ s/m$^{1/3}$	1045	-8,33	1195	-9,47	150	-16,67
$n = 0{,}0333$ s/m$^{1/3}$	**1130**	**-0,88**	**1300**	**-1,52**	**170**	**-5,56**
$n = 0{,}035$ s/m$^{1/3}$	1160	+1,75	1320	0	160	-11,11

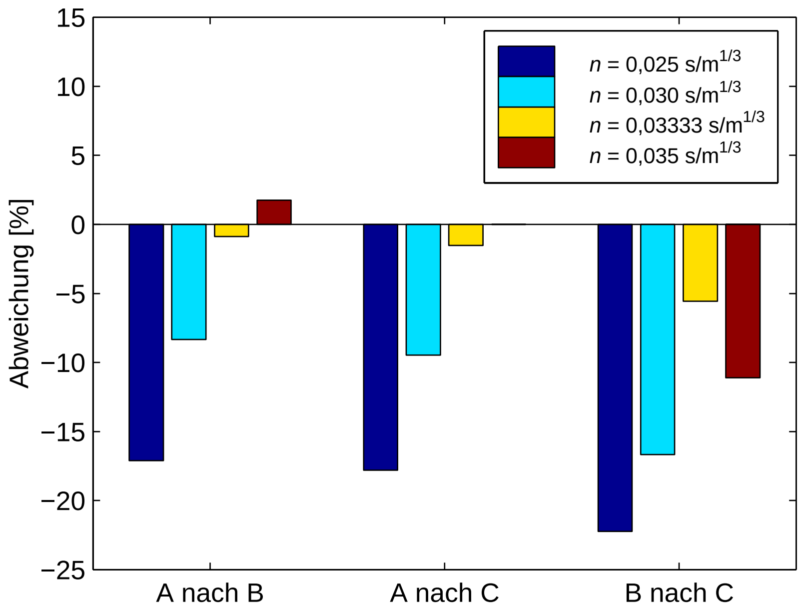

Abbildung 7.11: Fallbeispiel Malpasset, prozentuale Abweichungen der Laufzeit der Flutwelle zwischen den Transformatoren, RKDG1-Verfahren, verschiedene Rauheiten

Die Rauheit scheint ein wesentlicher Parameter zur Beeinflussung der Ausbreitungszeit der Flutwelle zu sein. Diese Beobachtung erscheint plausibel, da der Impulsentzug aus der Strömung nach dem empirischen Reibungsgesetz nach Manning direkt proportional zum Quadrat des Parameters n ist (siehe Kapitel 2). Die Ausbreitungszeit der Flutwelle wird so mit größeren Rauheiten bzw. einem größeren Impulsentzug ebenfalls größer. Die einzige auftretende Ausnahme dieser Beobachtung zwischen den Punkten B und C kann durch die Nichtlinearität des Problems und die geringe absolute Ausbreitungszeit der Flutwelle zwischen diesen Punkten erklärt werden.

Die Ergebnisse der verschiedenen Verfahren können trotz der FWG als identische Grundgleichungen und des Ansatzes der gleichen Reibungsgesetze und Reibungsbeiwerte nicht untereinander als konvergent bezeichnet werden. Da alle vorgestellte Verfahren für einfachere Testfälle identische und auch konvergente Lösungen liefern, ist zu vermuten, dass die Differenzen im Malpasset-Anwendungsfall auf eine unterschiedliche oder ungenaue Berechnung der Flutwelle im Zusammenhang mit dem trockenen Untergrund im Initialzustand oder auf die Implementierung der Quellterme aus Sohlneigung und -reibung zurückzuführen sind.

7.2.3 Maximale Wasserspiegel

Zusätzlich zur Gegenüberstellung mit den Felddaten werden die numerischen Berechnungen mit den Ergebnissen aus dem physikalischen Modellversuch verglichen. Die maximalen Wasserhöhen der verschiedenen numerischen Modelle und des physikalischen Modells sind in Tabelle 7.3 für eine Rauheit von $n = 0{,}0333\ \text{s/m}^{1/3}$ an den Punkten S6-S14 aufgetragen und in Abbildung 7.12 graphisch dargestellt.

Tabelle 7.3: Fallbeispiel Malpasset, maximale Wasserspiegel der Flutwelle an den Punkten S6-S14, Ergebnisse verschiedener numerischer Verfahren, $n = 0{,}0333\ \text{s/m}^{1/3}$, modifiziert nach HARMS (2001)

	S6 [m]	S7 [m]	S8 [m]	S9 [m]	S10 [m]	S11 [m]	S12 [m]	S13 [m]	S14 [m]
physik. Modell	84,20	49,10	54,00	40,20	34,90	27,40	21,50	16,10	12,90
RKDG1	**91,67**	**52,58**	**54,10**	**48,45**	**36,84**	**25,62**	**19,29**	**18,21**	**12,88**
BROICH (1999)	83,07	56,20	53,19	48,03	36,38	25,41	19,43	17,55	12,50
GOUTAL (1999b)	81,51	54,69	53,34	48,51	36,75	25,10	19,21	17,41	12,71
HERVOUET (2000)	89,10	54,21	53,20	47,89	36,38	25,23	18,92	17,57	12,65
ALCR. & GIL (1999)	83,89	55,01	50,09	50,94	35,25	27,22	20,12	14,47	13,05

Am Punkt S6, direkt hinter dem Mauer, weisen die auftretenden maximalen Wasserspiegel der numerischen Verfahren die größte Bandbreite auf. Die absoluten Abweichungen zum Wert des physikalischen Modellversuchs liegen zwischen -2,69 m und +7,47 m. An den folgenden Punkten S7 bis S9 treten ebenfalls große Abweichungen zur Messung im physikalischen Modell auf. Die Bandbreite der numerischen Verfahren untereinander ist hier allerdings mit der Ausnahme der Werte von ALCRUDO & GIL (1999) wesentlich geringer. Bei den Punkten S10 bis S14 liegen die Abweichungen zwischen Messung und den Berechnungen ungefähr zwischen ± 2 m und weisen auch untereinander eine hohe Übereinstimmung auf. Eine Ausnahme bilden wiederum die Ergebnisse von ALCRUDO & GIL (1999).

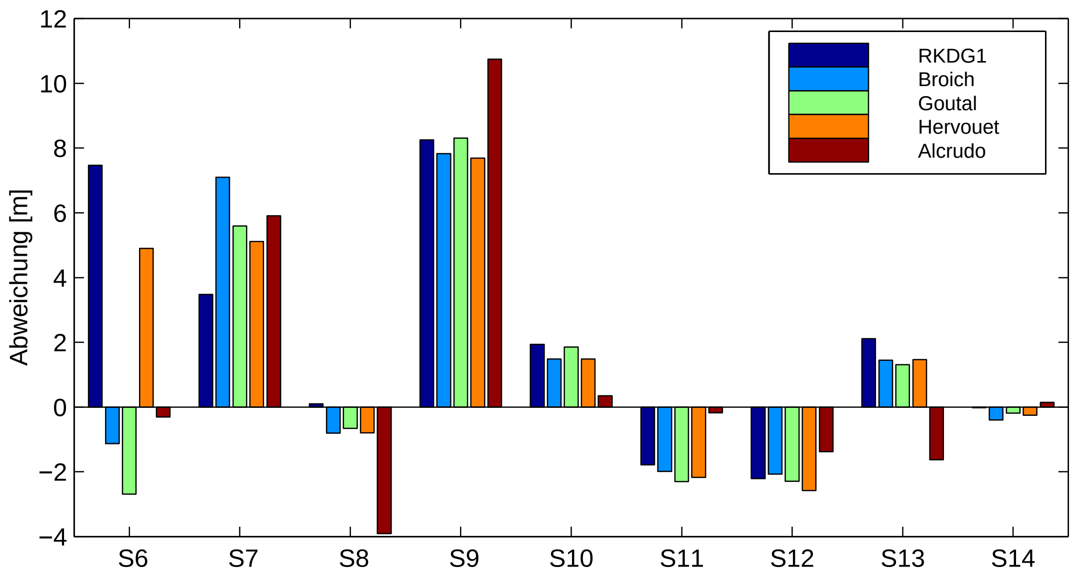

Abbildung 7.12: Fallbeispiel Malpasset, absolute Abweichungen der maximalen Wasserspiegel der Flutwelle an den Punkten S6-S14, Ergebnisse verschiedener numerischer Verfahren, n = 0,0333 s/m$^{1/3}$

Wie für die Ausbreitungszeiten wird die Sensitivität der maximalen Wasserspiegel auf die im numerischen Modell angenommene Rauheit untersucht. Die Ergebnisse sind in Tabelle 7.4 aufbereitet und als Balkendiagramm dargestellt (Abbildung 7.13).

Tabelle 7.4: Fallbeispiel Malpasset, maximale Wasserspiegel der Flutwelle an den Messpunkten des physikalischen Modells (S6-S14), RKDG1-Verfahren, verschiedene Rauheiten, modifiziert nach HARMS (2001)

	S6 [m]	S7 [m]	S8 [m]	S9 [m]	S10 [m]	S11 [m]	S12 [m]	S13 [m]	S14 [m]
physik. Modell	84,20	49,10	54,00	40,20	34,90	27,40	21,50	16,10	12,90
n = 0,025 s/m$^{1/3}$	91,84	52,12	54,40	48,40	36,21	25,00	18,40	18,10	12,69
n = 0,030 s/m$^{1/3}$	91,89	52,58	54,22	48,37	36,48	25,39	18,87	18,16	12,81
***n* = 0,0333 s/m$^{1/3}$**	**91,67**	**52,58**	**54,10**	**48,45**	**36,84**	**25,62**	**19,29**	**18,21**	**12,88**
n = 0,035 s/m$^{1/3}$	91,50	52,75	54,00	48,44	36,79	25,70	19,42	18,22	12,89

Im maximalen Wasserspiegel zeigt sich bei einer Variation der Rauheit im Berechnungsgebiet keine signifikante Änderung der Ergebnisse. Es kann allenfalls an den Punkten S7, S10, S11 und S12 mit steigender Rauheit eine leichte Erhöhung der berechneten Wasserspiegel beobachtet werden. Andererseits senkt sich der Wasserspiegel an den Punkten S6 und S8 leicht ab und bleibt an den Punkten S9, S13 und S14 ungefähr gleich. Es lässt sich damit in der Summe eine geringe Tendenz zu einer Erhöhung des maximalen Wasserspiegels feststellen.

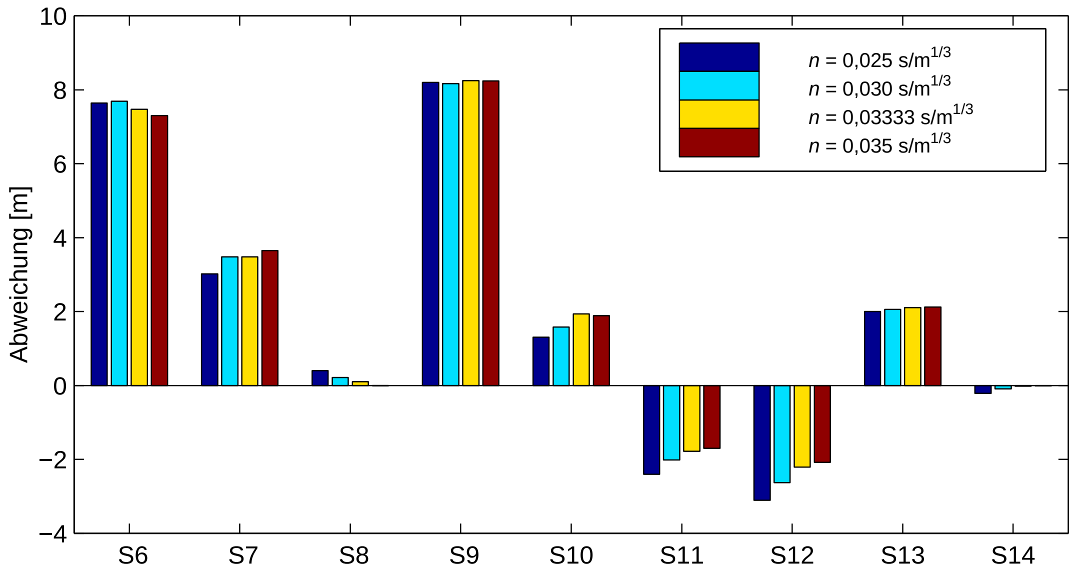

Abbildung 7.13: Fallbeispiel Malpasset, absolute Abweichungen der maximalen Wasserspiegel der Flutwelle an den Messpunkten des physikalischen Modells (S6-S14), RKDG1-Verfahren, verschiedene Rauheiten

Die maximalen Wasserspiegel sind weniger sensitiv auf die angesetzte Rauheit als die zuvor betrachteten Ausbreitungszeiten der Flutwelle. Die Ergebnisse stellen sich beim RKDG1-Verfahren bei unterschiedlichen Rauheiten als recht homogen dar. Eine eindeutige Tendenz zu einer Absenkung oder Erhöhung der maximalen Wasserspiegel ist nicht zu erkennen. Der Vergleich der unterschiedlichen numerischen Verfahren zeigt mit Ausnahme des Verfahrens von ALCRUDO & GIL (1999) eine recht gute Übereinstimmung der Werte. Einen Sonderfall bildet hier der direkt hinter dem Damm gelegene Punkt S6. Abgeschwächt gilt diese Aussage auch für den folgenden Punkt S7. Dieser Bereich ist in der Initialphase des Dammbruchs durch eine extrem instationäre und bereichsweise stark transkritische Strömung mit einer Reihe von Fließwechseln geprägt. Gerade die instationären Fließwechsel mit ihrem hohen Grad an Nichtlinearität dürften für die starke Streuung der Ergebnisse verantwortlich sein.

Die Übereinstimmung zwischen dem physikalischen Modell und den numerischen Berechnungen auf Grundlage der FWG zeigt systematische Differenzen. Seitens des in den 60er Jahren durchgeführten physikalischen Modellversuchs kann eine mögliche

Erklärung dieser Differenzen der mit 1:400 sehr große Modellmaßstab mit entsprechend starken Auswirkungen von Messfehlern sein (HERVOUET, 2000). Weiterhin ist nicht geklärt, ob sich eine Dammbruchströmung und die vielfältigen darin ablaufenden Prozesse (z. B. Lufteintrag und Sedimenttransport) adäquat mit dem benutzten Froudemodell abbilden lassen. Es konnte beobachtet werden, dass sich die Flutwelle im physikalischen Modell schneller ausbreitete als in der Natur (HERVOUET, 2000).

7.2.4 Flutwelle in der Initialphase

Die durch den Dammbruch initiierte Flutwelle wird im Folgenden während ihrer ersten 100 s genauer analysiert. Dabei sollen insbesondere die im Unterwasser des Damms gelegenen zwei Talkurven mit einer Richtungsänderung von jeweils circa 110° und die dortige Strömung betrachtet werde (Abbildung 7.14).

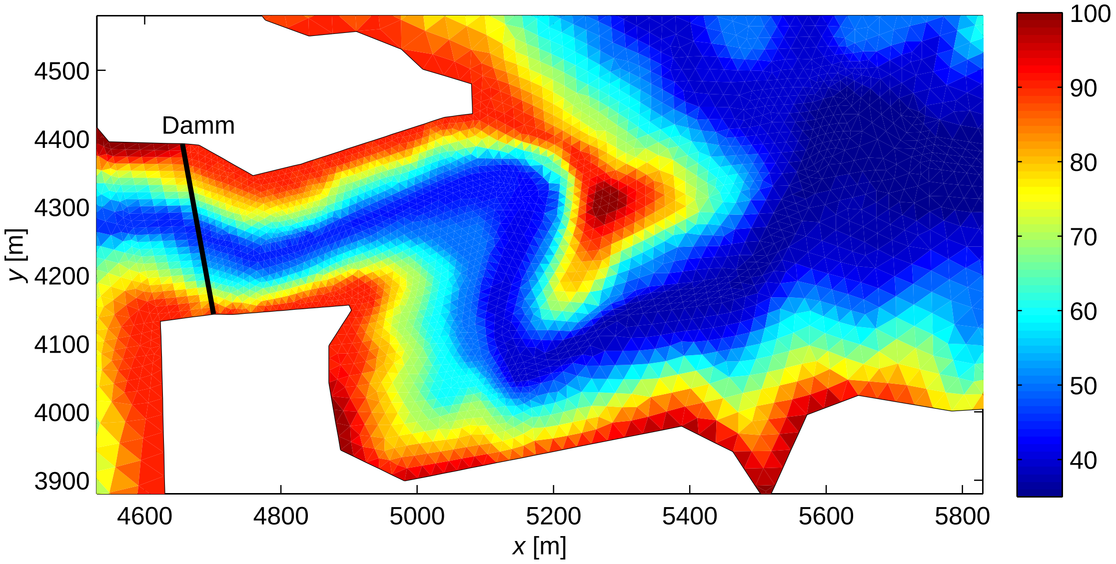

Abbildung 7.14: Fallbeispiel Malpasset, digitales Geländemodell, Sohlhöhe z [m] (Farbfläche)

Das Tal des Reyran ist im direkten Unterwasser des Damms neben seiner doppelten Richtungsänderung durch steile Talböschungen geprägt. In Abbildung 7.15 ist die maximale Sohlneigung $S_{0,max}$ des Tals dargestellt. Die Böschungsneigungen erreichen an den steilsten Stellen mit maximalen Werten zwischen 0,8 und 1,2 Böschungswinkel um die 45°. Besonders der Prallhang der ersten Kurve (x = 5200 m, y = 4300 m) ist hier hervorzuheben. Die weißen Höhenlinien unterscheiden Bereiche mit einer Sohlneigung von mehr als $S_{0,max}$ = 0,2. Von der Dammbruchstelle bis hinter der zweiten Kurve unterschreiten fast ausschließlich die direkt am Hauptgerinne des Reyran gelegenen Bereiche diesen Wert. Ab der zweiten Kurve findet eine langsame Aufweitung des Tals statt.

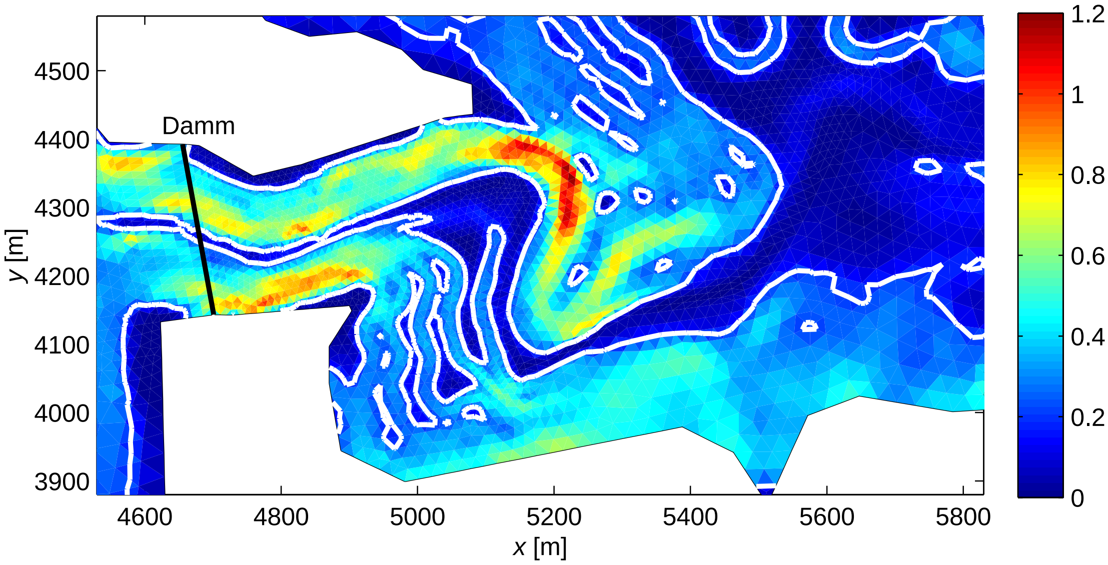

Abbildung 7.15: Fallbeispiel Malpasset, maximale Sohlneigung S_{max} [-] (Farbfläche), weiße Höhenlinie für Sohlneigungen $S_{0,max}$ = 0,2

In Abbildung 7.16 sind die Wassertiefe h und die Vektoren der Fließgeschwindigkeit zum Zeitpunkt t = 60 s dargestellt. In Richtung der positiven x-Achse ist von der Dammbruchstelle eine Verringerung der Wassertiefe und eine Erhöhung der Fließgeschwindigkeit festzustellen. Ab der Koordinate $x = 5100$ m findet eine schlagartige Erhöhung der Wassertiefe und eine Verringerung der Fließgeschwindigkeit in Form eines Wechselsprunges statt. Vor dem Prallhang der ersten Kurve bildet sich ein Plateau mit einem relativ konstanten Wasserspiegel $z+h$, einer maximalen Wassertiefe von $h = 45$ m und niedrigen Geschwindigkeiten. Von diesem Punkt aus beschleunigt sich die Flutwelle wiederum unter einer Verringerung der Wassertiefe. Die Richtung der größten Fließgeschwindigkeit folgt vor allem in Bereichen hoher Geschwindigkeiten eng der Talrichtung. Im Bereich des ersten Plateaus kommt es zu einer Rückströmung in Richtung der Dammbruchstelle.

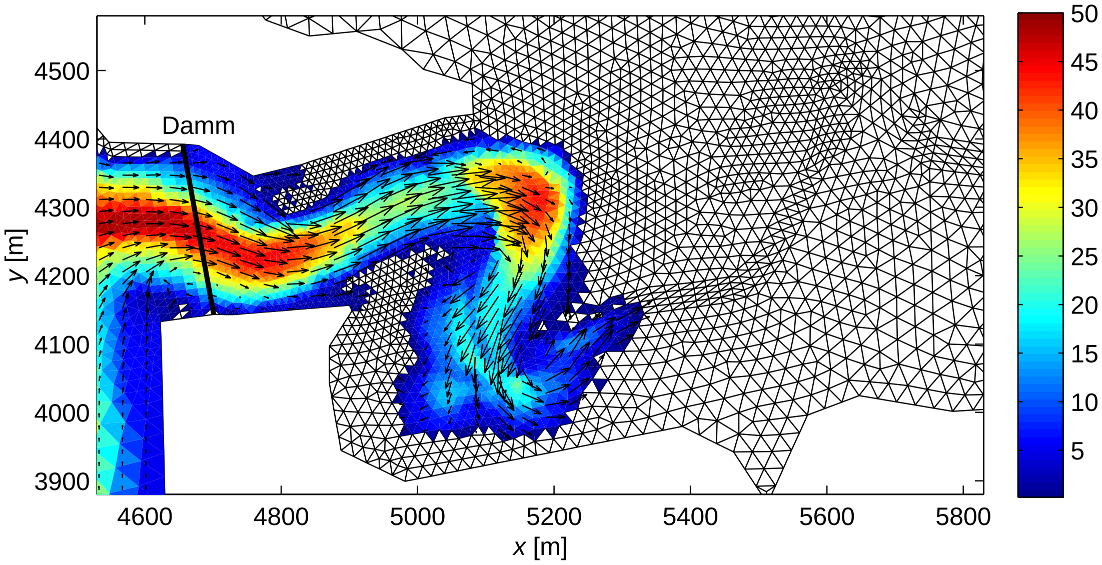

Abbildung 7.16: Fallbeispiel Malpasset, Wassertiefe h [m] (Farbfläche), Vektoren der Fließgeschwindigkeit zum Zeitpunkt t = 60 s

Zum Zeitpunkt $t = 100$ s liefert das numerische Modell Wassertiefen h und Fließgeschwindigkeiten gemäß Abbildung 7.17. Der schon zum Zeitpunkt $t = 60$ s im Oberwasser des Prallhangs festgestellte Wechselsprung ist ca. 100 m in Richtung der Dammbruchstelle gewandert. In der zweiten Kurve des Tals bildet sich, wie auch schon in der ersten Kurve, ein Plateau mit einer hohen Wassertiefe und einer niedrigen Geschwindigkeit aus. Zwischen den beiden Plateaus befindet sich ein Bereich mit kleinen Wassertiefen und großen Fließgeschwindigkeiten. Der Übergang dieses Bereiches in das Plateau der zweiten Kurve findet wiederum diskontinuierlich in Form eines Wechselsprungs statt. Im weiteren Verlauf des Tals nach der zweiten Kurve beschleunigt die Flutwelle mit geringer werdenden Wassertiefen. Die Rückströmung am Prallhang der ersten Kurve bleibt erhalten. Am Prallhang der zweiten Kurve bildet sich eine weitere Rückströmungszone von einer erheblichen Größe.

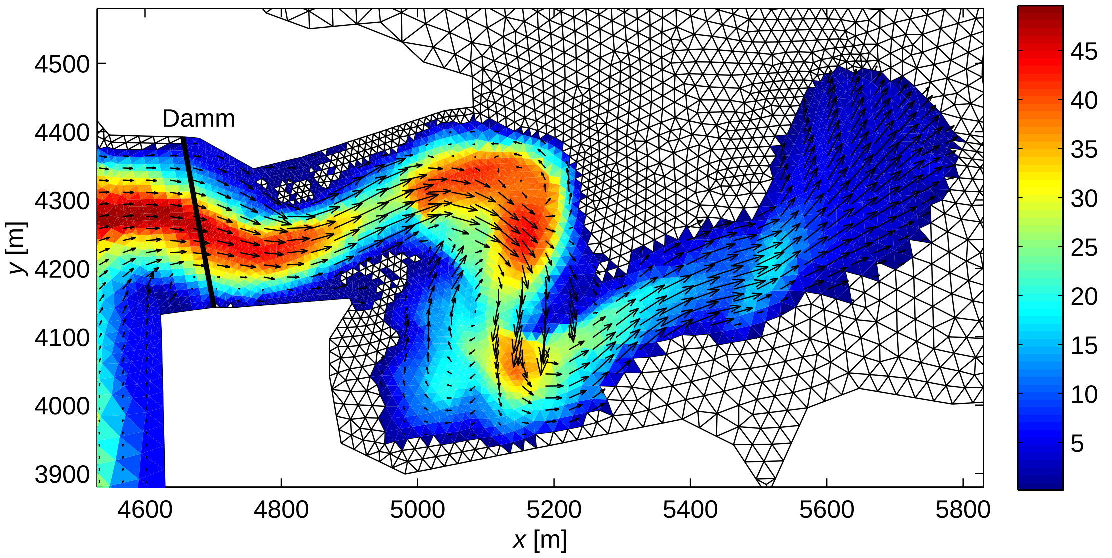

Abbildung 7.17: Fallbeispiel Malpasset, Wassertiefe h [m] (Farbfläche), Vektoren der Fließgeschwindigkeit zum Zeitpunkt t = 100 s

In Abbildung 7.18 ist die Höhe des Wasserspiegels $z+h$ zum Zeitpunkt $t = 100$ s dargestellt. Deutlich können die Plateaus mit einer hohen Wassertiefe vor den Prallhängen der beiden Kurven identifiziert werden.

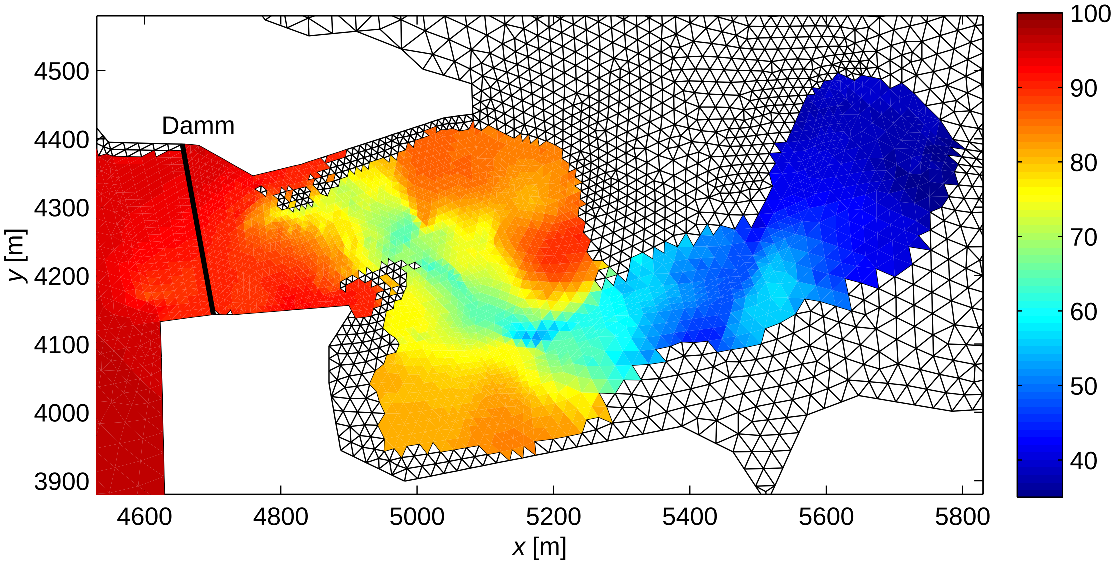

Abbildung 7.18: Fallbeispiel Malpasset, Wasserspiegel z+h [m] (Farbfläche) zum Zeitpunkt t = 100 s

Die Froudezahl der Strömung ist ebenfalls zum Zeitpunkt $t = 100$ s abgebildet (Abbildung 7.19). Der Übergang zwischen unter- und überkritischer Strömung ist durch eine weiße Höhenlinie gekennzeichnet. Es fällt auf, dass die Strömung durch eine Reihe von Fließwechseln geprägt ist. Somit kann das Berechnungsgebiet in einige verschiedene Bereiche unterteilt werden. Die Strömung ist im Reservoir und an der Bruchstelle bis zu einer Entfernung von ca. 200 m in Richtung des Unterwassers des Damms unterkritisch und geht dann kontinuierlich in eine überkritische Strömung mit einer Froudezahl von durchschnittlich $Fr = 1{,}6$ über. Etwa 300 m hinter dem Damm findet ein erneuter diskontinuierlicher Übergang zu unterkritischer Strömung statt.

Eine identische Abfolge von Strömungszuständen findet sich zwischen dem Plateau der ersten und der zweiten Kurve. Die Froudezahl nimmt im überkritischen Bereich sehr hohe Werte von maximal $Fr = 5$ an. In der Rückströmung in der zweiten Kurve findet sich ein weiterer, kleinerer Bereich mit überkritischem Abfluss.

Der Flutwellenkopf im Bereich talabwärts der zweiten Kurve ist durch vollständig überkritischen Abfluss gekennzeichnet. Die Froudezahl nimmt dabei talabwärts zu. Die durchschnittliche Froudezahl im Wellenkopf ab $x = 5600$ m beträgt ca. $Fr = 2{,}5$. In einzelnen kleineren Bereichen steigt die Froudezahl bis auf $Fr = 3{,}5$ an.

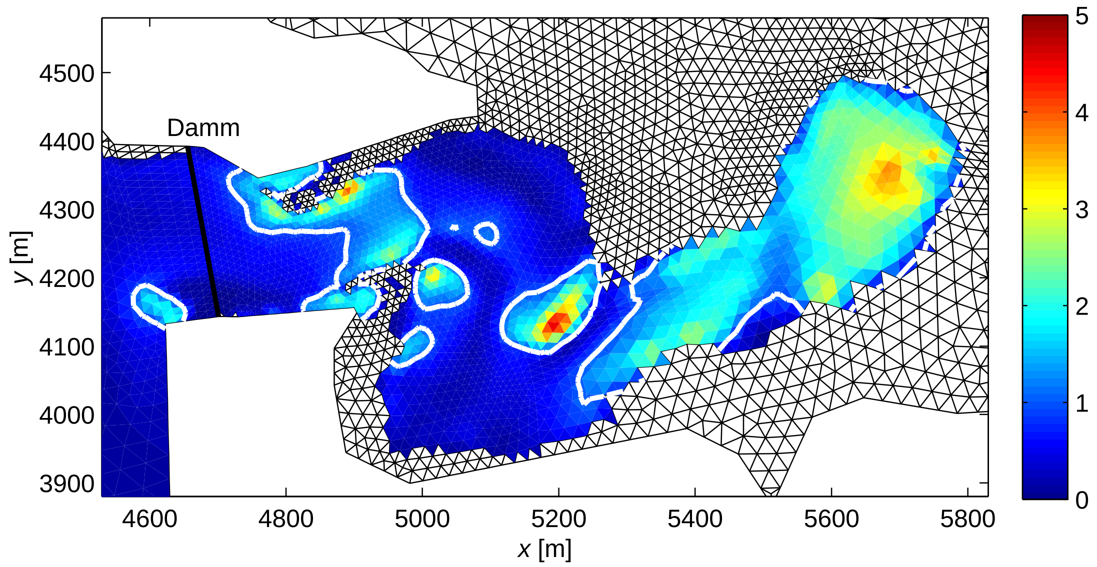

Abbildung 7.19: Fallbeispiel Malpasset, Froudezahl Fr [-] (Farbfläche), weiße Höhenlinie bei Fr = 1, Vektoren der Fließgeschwindigkeit zum Zeitpunkt t = 100 s

Über die kinematischen Randbedingungen (Gleichungen (2.17) und (2.18)) lassen sich die vertikalen Wassergeschwindigkeiten an der Gerinnesohle und der Wasseroberfläche berechnen. Sie werden später für die Abschätzung der Anwendbarkeit des Flachwasseransatzes zur Simulation von Dammbruchströmungen ein wichtiges Kriterium sein. In Abbildung 7.20 ist die vertikale Geschwindigkeit an der Gerinnesohle prozentual zur absoluten horizontalen Geschwindigkeit farblich dargestellt. Die weißen Höhenlinien kennzeichnen den Übergang aus einem Wertebereich zwischen –20 % und +20 % und den Bereichen mit einer höheren prozentualen vertikalen Geschwindigkeit. Es wird deutlich, dass die meisten Bereiche der Strömung eine prozentuale vertikale Geschwindigkeit von unter ±20 % aufweisen. Besonders im Kopf der Flutwelle findet eine Überschreitung dieses Wertes praktisch nicht statt. Im Vergleich mit den maximalen Sohlneigungen (Abbildung 7.15) zeigt sich, dass diese bereichsweise sehr hohen Neigungen oft keine vertikalen Geschwindigkeiten zur Folge haben. Dieser Umstand kann bei Analyse der Fließgeschwindigkeiten in Abbildung 7.20 dadurch erklärt werden, dass die Vektoren der Geschwindigkeit meist in Richtung der Talachse zeigen und in der Regel senkrecht auf den maximalen Gerinneneigungen verlaufen. Stehen die Richtungen der Fließgeschwindigkeit und der maximalen Gerinneneigung senkrecht aufeinander, treten keine vertikalen Geschwindigkeiten auf.

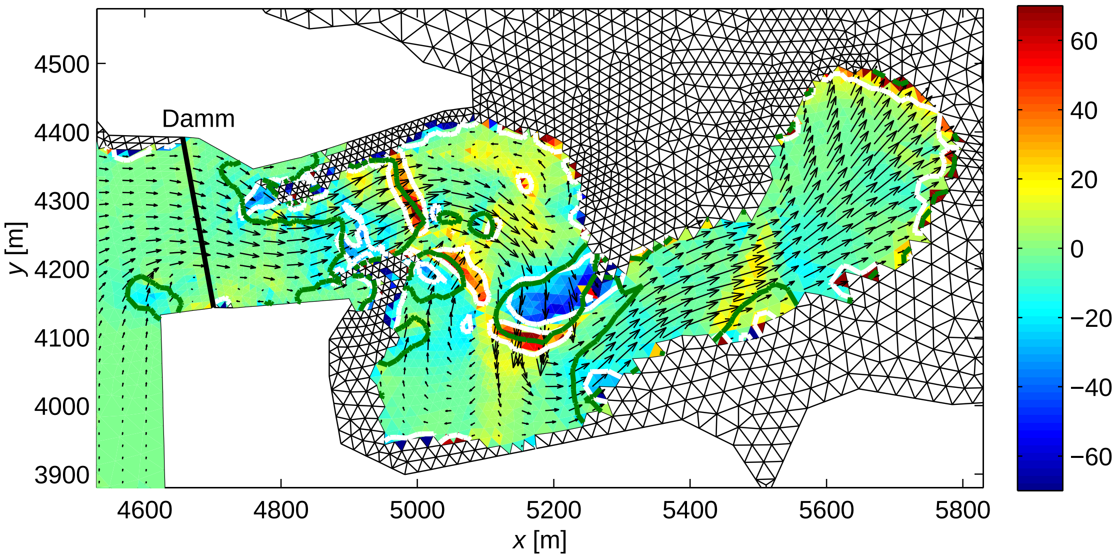

Abbildung 7.20: Fallbeispiel Malpasset, prozentuale vertikale Geschwindigkeiten an der Sohle [%] (Farbfläche), weiße Höhenlinien bei ±20% zum Zeitpunkt t = 100 s

Es lassen sich vor allem in den beiden Kurven einige Bereiche erkennen, in denen die vertikale Geschwindigkeit relativ zur absoluten horizontalen Geschwindigkeit sehr hohe prozentuale Anteile von bis zu ±60 % annimmt. An den beiden Prallhängen der Kurven ist dies ein hoher positiver Anteil der prozentualen vertikalen Geschwindigkeit. Die absoluten Geschwindigkeiten sind hier in allen Raumrichtungen gering. Hohe negative vertikale Geschwindigkeiten treten dagegen häufiger an Stellen mit ebenfalls sehr hohen horizontalen Geschwindigkeit auf. Hervorzuheben ist der überkritische Abschnitt zwischen den beiden Kurven.

In Abbildung 7.21 ist die prozentuale vertikale Geschwindigkeit am Wasserspiegel dargestellt. Neben den auch an der Sohle vorhandenen konvektiven Anteilen in der kinematischen Randbedingung geht hier zusätzlich die zeitliche Ableitung der Wassertiefe in die Berechnung der vertikalen Geschwindigkeit mit ein (Gleichung (2.17)).

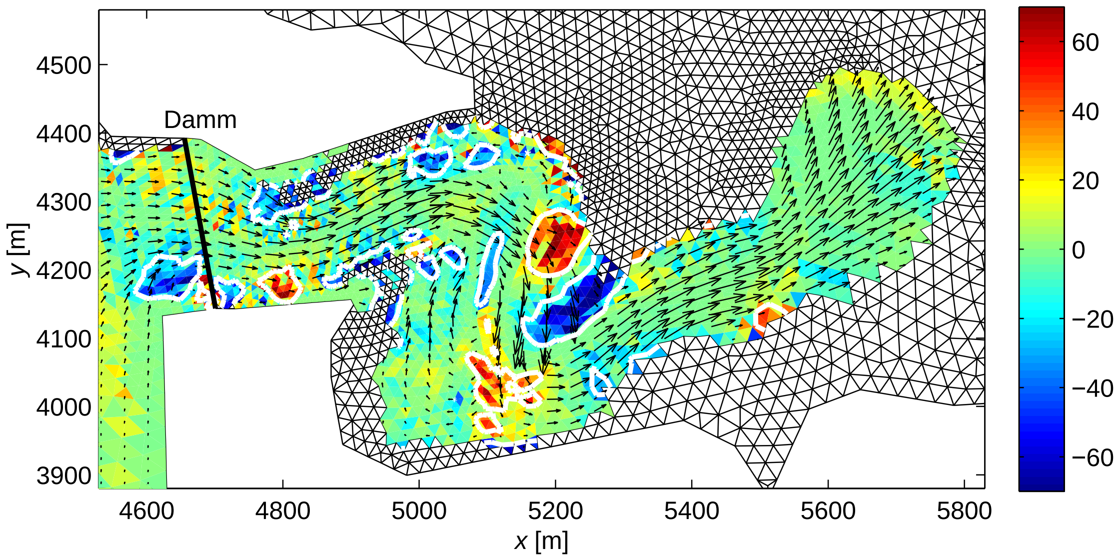

Abbildung 7.21: Fallbeispiel Malpasset, prozentuale vertikale Geschwindigkeiten am Wasserspiegel [%] (Farbfläche), weiße Höhenlinien bei ±20% zum Zeitpunkt t = 100 s

Bei der Analyse der prozentualen vertikalen Geschwindigkeit fällt auf, dass besonders an den Stellen von Fließwechseln von überkritischem zu unterkritischem Abfluss, d. h. an Wechselsprüngen, hohe Werte auftreten. Dieser Umstand ist mit dem sprunghaften, theoretisch diskontinuierlichen Verlauf in der Wassertiefe zu erklären, der in der numerischen Lösung durch die Diskretisierung des numerischen Verfahrens verschmiert wird. Bei einer feineren Diskretisierung des Wechselsprungs sind deshalb noch erheblich höhere vertikale Geschwindigkeiten in einer schmaleren Zone um den

Wechselsprung zu erwarten. Weitere hohe positive prozentuale vertikale Geschwindigkeiten sind am Kopf der Flutwelle zu beobachten. Hier findet ein zeitlich schneller Anstieg der Wassertiefe statt.

Größere negative Vertikalgeschwindigkeiten sind in den Bereichen mit einer sich beschleunigenden überkritischen Strömung zu finden. Hier sei auf alle Zonen im Oberwasser der drei angesprochenen Wechselsprünge hingewiesen. Der Effekt ist besonders im stark überkritischen Gebiet zwischen den beiden Kurven zu beobachten.

7.2.5 Sensitivitäten der numerischen Berechnung

Im folgenden Abschnitt werden zusammenfassend die Sensitivitäten der Berechnungsergebnisse auf verschiedene Einflussfaktoren zusammengestellt (Tabelle 7.5).

Tabelle 7.5: Fallbeispiel Malpasset, Sensitivitäten der Berechnungsergebnisse des Malpasset-Anwendungsfalls auf verschiedene Einflussfaktoren

Einflussfaktoren	Quelle	Sensitivität
Wahl des mathemat. Modells	in dieser Arbeit, Goutal (1999b)	+++
Rauheiten	in dieser Arbeit, Harms (2001), Hervouet (2000), Alcrudo & Gil (1999)	+++
	Goutal (1999b)	+
Differenzierung der Rauheit	Broich (1999)	o
Turbulenz	Hervouet (2000)	+
Numerische Parameter (Netzdichte)	Hervouet (2000)	o
	Alcrudo & Gil (1999)	+

o - keine, + - geringe, ++ - mittlere, +++ - große Sensitivität

Alle im Rahmen dieser Arbeit miteinander verglichenen Modellierungsansätze basieren auf den zweidimensionalen FWG. Für den Malpasset-Dammbruch existieren zusätzlich eine Reihe weiterer Berechnungsergebnisse auf der Grundlage anderer mathematischer Modelle wie den eindimensionalen FWG bzw. den St.-Venant-Gleichungen. Diese eindimensionalen Ansätze zeigen nach Goutal (1999b) Ergebnisse mit einer wesentlich höheren Bandbreite in der Ausbreitungszeit und der Wassertiefe auf, als die zweidimensionalen Berechnungen. Dies dürfte auf die zusätzlich vorgenommenen Idealisierungen aufgrund der Dimensionsreduzierung und die Schwierigkeit einer sinnvollen Parametrisierung zurückzuführen sein. Außerdem können zweidimensionale Effekte in diesen Modellen nicht abgebildet werden.

Die oben ausgeführten Überlegungen gelten genauso für die Dimensionsreduzierung der vollen dreidimensionalen Navier-Stokes-Gleichungen auf die zweidimensionalen FWG. Da dreidimensionale Berechnungsergebnisse aufgrund der Komplexität des abzubildenden Problems nicht vorliegen, kann der Fehler aus dieser Idealisierung nur aus den im Kapitel 2 vorgestellten vereinfachenden Annahmen abgeschätzt werden:

Eine konstante Dichte im Fluid

Trotz der zutreffenden Annahme einer konstanten Dichte des Wasser in der Flutwelle müssen im Fluid zusätzliche Phasen berücksichtigt werden. An der Oberfläche ist dies der Lufteintrag in das Wasser, in der Nähe der Sohle der Transport von Geschiebe und suspendiertem Sediment. In den vorgestellten, auf der Flachwassertheorie basierenden zweidimensionalen Modellen mit einer festen Sohle, werden diese Effekte vernachlässigt. Ihre Quantifizierung gestaltet sich wegen einer fehlenden Datengrundlage als sehr schwierig.

Eine bekannte vertikale Verteilung der horizontalen Geschwindigkeiten

Die Annahme einer nahezu konstanten vertikalen Verteilung der horizontalen Geschwindigkeiten trifft bei einem Dammbruch bei den vorliegenden hohen Turbulenzgraden und einer horizontalen Sohle in Laborgerinnen weitgehend zu (siehe Kapitel 2.2). Da diese Untersuchungen anhand von idealisierten Geometrien durchgeführt werden, ist zu vermuten, dass es bei dem betrachteten Dammbruch aufgrund der komplexen Geometrie des Reyrantals zu lokalen Abweichungen von dieser Verteilung kommen kann. Als Beispiele seien hier das Auftreten von Sekundärströmungen in den Kurven des Tals oder die Variation der Geschwindigkeitsprofile in einem sich brechenden Wechselsprung genannt. Eine sinnvolle Quantifizierung dieser Effekte kann nicht auf Basis der Ergebnisse der zweidimensionalen Berechnung erfolgen, sondern setzt einen physikalischen Modellversuch oder eine dreidimensionale Modellierung voraus.

Die Vernachlässigung der vertikalen Geschwindigkeit und Beschleunigung

Diese Annahme ist eine der zentralen Vereinfachungen im Rahmen der Herleitung der FWG und führt auf eine hydrostatische Druckverteilung im Fluid. Zur Abschätzung des Einflusses dieser Vereinfachung kann die vertikale Geschwindigkeit des Fluids in der numerischen Lösung über die kinematischen Randbedingungen am Wasserspiegel und an der Gerinnesohle bestimmt werden (Abbildung 7.20 und Abbildung 7.21). Eine Bewertung der Anwendbarkeit des Flachwasseransatzes allein über die maximalen Sohlneigungen (Abbildung 7.15) stellt sich als nicht sinnvoll heraus, da die Hauptfließgeschwindigkeit meist in Talrichtung und damit in der Regel senkrecht zur Richtung der maximalen Sohlneigung steht. Die horizontalen Geschwindigkeiten bedingen damit keine oder nur geringe vertikale Geschwindigkeiten. Mit der Wahl einer Sohlneigung in Fließrichtung von $S_0 = 0{,}2$ bzw. einer vertikalen Geschwindigkeit von 20 % der horizontalen Geschwindigkeit als ein Grenzwert für die sinnvolle Anwendbarkeit des Flachwasseransatzes[7] zeigt sich, dass dieses Kriterium im größten Teil des Berechnungsgebietes eingehalten wird.

Vertikale Geschwindigkeiten an der Wasseroberfläche von mehr als 20 % der horizontalen Geschwindigkeit treten ebenfalls nur lokal in Verbindung mit Wechselsprüngen, sich horizontal stark beschleunigender Strömung und am Kopf der Flutwelle auf. In den meisten Bereichen wird auch dieses Kriterium eingehalten.

Bezüglich des Auftretens von vertikalen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen ist vor allem auch die Initialphase des Dammbruches zu nennen. Auf der Grundlage von dimensionslos aufbereiteten Laboruntersuchungen von MOHAPATRA et al. (1999) konnte HARMS (2001) die Sensitivität der Strömung auf diesen Effekt als gering einstufen. Ein möglicher maximaler Fehler in der Ausbreitungszeit der Welle von ungefähr 10 s ist im Gegensatz zu den anderen auftretenden Effekten nur gering.

Die Sensitivität der Berechnungsergebnisse auf die Wahl des mathematischen Modells kann für eine Dammbruchwelle abschließend als hoch eingeschätzt werden. Es besteht in einzelnen oben angesprochenen Punkten noch ein wesentlicher Forschungsbedarf bezüglich der Auswirkungen verschiedener Idealisierungen der ein- und zweidimensionalen Modellansätze.

Rauheiten

Die im Weiteren betrachteten Einflussfaktoren beziehen sich stark auf die Parametrisierung im Rahmen der Benutzung der zweidimensionalen FWG. Sie beinhalten die

[7] JANOWSKI (1999) setzt für Flussströmung einen Grenzwert der Sohlneigung von $S_0 = 0{,}1$ an. Für die hier untersuchte Dammbruchströmung wurde dieser Wert auf $S_0 = 0{,}2$ erhöht, da die untersuchte Strömung generell mit einer geringeren Güte wiedergegeben wird.

quantitative Berücksichtigung der Rauheit, ihre räumliche Differenzierung und den Einfluss der Viskosität.

Als herausragender Einflussfaktor ist die Rauheit identifiziert worden. Die Ausbreitungszeit der Flutwelle hängt maßgeblich von dieser Größe ab und vergrößert sich mit ihrer Erhöhung. Der Einfluss der Rauheit ist in Bezug auf die untersuchten maximalen Wasserspiegel weniger markant. Es kommt allerdings an der Mehrzahl der untersuchten Punkte zu einer leichten Erhöhung der maximalen Wasserspiegel. An dieser Stelle sei die Anwendung des empirischen Reibungsgesetzes nach Manning hinterfragt, da diese Gesetzmäßigkeit für stationäre Flussströmung in einem wesentlich niedrigeren Geschwindigkeitsbereich aufgestellt wurde. Ihr Einsatz ist allerdings wegen fehlender besserer Gesetzmäßigkeiten bei der Verwendung der FWG ohne eine Alternative. Eine Kalibrierung der Rauheit gestaltet sich wegen fehlender Naturdaten als schwierig. Eine räumliche Differenzierung der Rauheit trägt nach BROICH (1999) nicht zu einer Verbesserung des Ergebnisses bei.

Turbulente kinematische Viskosität

Die Wahl der turbulenten kinematischen Viskosität beeinflusst die Berechnungsergebnisse für die Dammbruchwelle nach HERVOUET (2000) nur maßgeblich, wenn sie physikalisch unsinnig groß gewählt wird. Der Impulsentzug durch die diffusiven Terme tritt gegenüber dem des empirischen Reibungsansatzes nach Manning in den Hintergrund und kann in einer Berechnung ohne eine Einschränkung des Ansatzes vernachlässigt werden.

Numerische Parameter

Die numerischen Berechnungen sind, entsprechend dem jeweils benutzten Verfahren, von einer Reihe unterschiedlicher Parameter abhängig. Als ein gemeinsamer Parameter sei die Netzdichte erwähnt, für die von HERVOUET (2000) und ALCRUDO & GIL (1999) Konvergenzuntersuchungen durchgeführt wurden. In beiden Untersuchungen wird mit einer entsprechenden Verfeinerung Netzkonvergenz festgestellt. Allerdings konvergieren die unterschiedlichen Verfahren auf unterschiedliche Lösungen.

8 Zusammenfassung

Das Thema der vorliegenden Arbeit ist die Verifizierung und Validierung eines numerischen Verfahrens zur Modellierung stark instationärer und / oder transkritischer Strömung in offenen Gerinnen. Als mathematisches Modell werden dazu die zweidimensionalen tiefengemittelten Flachwassergleichungen gewählt. In der Herleitung dieser Gleichungen aus den dreidimensionalen Reynoldsgleichungen wird detailliert auf die vorgenommenen Annahmen und Vereinfachungen eingegangen.

Bei einer Vernachlässigung der diffusiven Terme bilden die FWG ein System nichtlinearer, partieller, hyperbolischer Differentialgleichungen. Bei dem Auftreten überkritischer Abflussbereiche kann ihre Lösung Diskontinuitäten in Form von Stoßfronten oder Wechselsprüngen enthalten. Eine physikalisch richtige, impulserhaltende Lösung kann dabei nur mit der Wahl der konservativen FWG im Gegensatz zu ihrer nicht-konservativen Form erzielt werden. Die Behandlung der Diskontinuitäten erfordert im Hinblick auf eine eindeutige Lösung zusätzlich die Berücksichtigung der Sprung- und der Entropiebedingung.

Zur numerischen Lösung der FWG existieren eine Reihe unterschiedlicher numerischer Verfahren. Die im Rahmen dieser Arbeit erstmalig verwendete Runge-Kutta-Discontinuous-Galerkin FE-Methode zeichnet sich im Vergleich mit bestehenden Modellen durch eine Reihe von Vorteilen aus. Im Gegensatz zu Petrov-Galerkin-FE-Verfahren entfällt bei der RKDG-Methode für eine zeitlich explizite Diskretisierung die Lösung eines linearen Gleichungssystems. Die Berechnung von stark instationärer Strömung erfolgt so wesentlich effizienter, wenn aufgrund der erforderlichen zeitlichen Approximationsgüte kleine CFL-Zahlen gewählt werden müssen. Im Vergleich mit expliziten FV-Verfahren ist die RKDG-Methode ähnlich leistungsfähig, hat allerdings Vorteile in der Diskretisierung komplexer Geometrien und der Diskretisierung von Randbedingungen und Quelltermen.

Die FWG werden auf der Basis der RKDG-Methode bzw. der Local-Discontinuous-Galerkin-Methode bei der zusätzlichen Berücksichtigung der viskosen Terme diskretisiert und anhand verschiedener Testbeispiele aus der Literatur verifiziert. Die Konvergenz liegt wie erwartet für glatte Lösungen bei einer zeitlichen und räumlichen Ordnung von $p = k+1$ unter Benutzung einer Ansatzfunktion mit einem Polynomgrad k. Für eine Lösung mit Diskontinuitäten kann eine Konvergenzordnung von $p = 1$ nachgewiesen werden. Die Methode ist bei einer konstanten Ansatzfunktion sensitiv auf die Wahl des numerischen Flusses. Diese Sensitivität ist nur gering bei höherpolynomialen Ansatzfunktionen. Mit der Restriktion einer homogenen Ansatzfunktion in allen Elementen werden lineare Ansatzfunktionen zusammen mit dem HLL-Fluss zur Berechnung von transkritischer Strömung als optimal erachtet.

Die Validierung von Anwendungsfällen wird auf der Grundlage einer überkritischen Strömung in einer sich verengenden Schussrinne und anhand der Flutwelle des Dammbruchs von Malpasset durchgeführt. Am Beispiel der Schussrinne kann unter Berücksichtigung der turbulenten kinematischen Viskosität ein nahezu netzunabhängiges Ergebnis erzielt werden. Die Konvergenz des Verfahrens lässt auf eine sehr geringe numerische Dispersion und Diffusion schließen. Der Fehler der numerischen Lösung kann so weitgehend vom Fehler durch die Verwendung des mathematischen Modells der FWG entkoppelt werden. Die FWG in ihrer Standardformulierung zeigen sich nur bedingt geeignet, die auftretenden Strömungsphänomene im Gerinne zu erfassen. Dieser Umstand ist vermutlich hauptsächlich auf die Vernachlässigung des vertikalen Impulses zurückzuführen.

Im zweiten Validierungsfall, dem Dammbruch von Malpasset, werden die durchgeführten Berechnungen anhand von Felddaten und Ergebnissen aus einem physikalischen Modellversuch überprüft und analysiert. Es zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung der Ergebnisse der RKDG-Methode mit den zweidimensionalen Berechnungen anderer Modellierer. Hinsichtlich der Sensitivität der Berechnungsergebnisse erweist sich die angesetzte Rauheit als der einflussreichste Parameter. Im Hinblick auf die im Rahmen der Herleitung der Flachwassertheorie getroffenen Annahmen und Vereinfachungen wird besonders die Vernachlässigung der vertikalen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen und der daraus resultierenden hydrostatischen Druckannahme diskutiert. Die Annahme scheint trotz einiger lokaler Verletzungen bei dieser Art von Strömung gerechtfertigt zu sein.

9 Ausblick

Der weitere Forschungsbedarf zur Anwendung der RKDG-Methode auf die Simulation von Flachwasserströmungen verzweigt sich in zwei Hauplinien. Die erste mögliche Entwicklungslinie stellt die Steigerung der Effizienz des Berechnungsverfahrens dar. Hier bieten sich eine Reihe von unterschiedlichen Möglichkeiten. So lässt sich der vollständig explizite Algorithmus mit relativ geringem Aufwand parallelisieren. Weiterhin kann die Berechnung durch die Einführung von lokalen Zeitschritten unabhängig von einzelnen Elementen mit sehr restriktiven CFL-Bedingungen gemacht werden. Eine elegante Möglichkeit besteht außerdem in der Variation sowohl der Ansatzfunktion als auch der Netzdichte im Berechnungsgebiet. Die aufgeführten Varianten wurden schon im Zusammenhang mit der Diskretisierung anderer Gleichungen zur Effizienzsteigerung des Verfahrens verwendet. Besonders die Variation der Ansatzfunktion und der Netzdichte stellt jedoch einen erheblichen Implementierungsaufwand dar.

Die zweite denkbare Entwicklungslinie der RKDG-Methode macht sich ihre hervorragende Entkopplung von Fehlern aus dem numerischen Modell einerseits und dem mathematischen Modell andererseits zunutze. Das Verfahren kann so zur Analyse von Erweiterungen des Standardmodells der FWG im Hinblick auf zusätzliche Terme wie der näherungsweisen Berücksichtigung des vertikalen Impulses zur besseren Abbildung von Schussrinnen- und Dammbruchströmungen dienen.

Literatur

Abbot, M. B., Ionescu, F., 1967: „On the Numerical Computation of Nearly Horizontal Flows“, IAHR Journal of Hydraulic Research, Vol. 5(1), 77-93

Abbot, M. B., 1979: „Computational Hydraulics: Elements of the Free Surface Flow“, Pitman Publishing

Akanbi, A. A., Katopodes, N. D., 1988: „Model for Flood Propagation on Initially Dry Land“, ASCE Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 114(7), 689-706

Alcrudo, F., Garcia-Navarro, P., Saviron, J.-M., 1992: „Flux Difference Splitting for 1D Open Channel Flow Equations“, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 14, 1009-1018

Alcrudo, F., Garcia-Navarro, P., 1993: „A High-Resolution Godunov-Type Scheme in Finite Volumes for the 2D Shallow-Water Equations“, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 16, 489-505

Alcrudo, F., Gil, E., 1999: „The Malpasset Dam-Break Case Study”, Proceedings of the 3rd CADAM workshop, Zaragoza, Spanien

de Almeida, A. B., Franco, A. B., 1994: „Modeling of Dam-Break Flow“, in Computer Modeling of Free-Surface and Pressurized Flows (Eds.: Chaudhry, M. H., Mays, L.), Kluwer Academic Publishers

Anastasiou, K., Chan, C. T., 1997: „Solution of the 2D Shallow Water Equations Using Finite Volume Method on Unstructured Triangular Meshes“, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 24, 1225-1245

Arnold, H., 1996: „Simulation dammbruchinduzierter Flutwellen“, Dissertation, Institut für Strömungsmechanik und elektronisches Rechnen im Bauwesen, Universität Hannover

Aronica, G., Tucciarelli, T., Nasello, C., 1998: „2D Multilevel Model for Flood Wave Propagation in Flood-Affected Areas“, ASCE Journal of Water Resources Planning and Management, Vol. 124(4), 210-217

Bassi, F., Rebay, S., 1997: „High-order accurate discontinuous finite element solutions of the 2D Euler equations“, Journal of Computational Physics, Vol. 138, 251-285

Bassi, F., Rebay, S., 2000a: „A High Order Discontinuous Galerkin Method for Compressible Turbulent Flow”, in LNCSE Vol. 11: „Discontinuous Galerkin Methods” (Eds.: Cockburn, B., Karniadakis, G. E., Shu, C.-W.), 77-88, Springer

Bassi, F., Rebay, S., 2000b: „GMRES Discontinuous Galerkin Solution of the Compressible Navier-Stokes Equations”, in LNCSE Vol. 11: „Discontinuous

Galerkin Methods” (Eds.: Cockburn, B., Karniadakis, G. E., Shu, C.-W.), 197-208, Springer

Baumann, C. E., 1997: „An *hp*-adaptive discontinuous Galerkin method for computational fluid dynamics“, PhD thesis, University of Texas, Austin

Baumann, C. E., Oden, J. T., 1998: „A discontinuous *hp* finite element method for the solution of the Euler equation of gas dynamics“, in Proceedings of the 10th International Conference on Finite Element in Fluids

Beffa, C., 1994: „Praktische Lösung der tiefengemittelten Flachwassergleichungen“, Mitteilungen der Versuchsanstalt für Wasserbau, Hydrologie und Glaziologie, ETH Zürich, Heft 133

Bellos, C. V., Soulis, J. V., Sakkas, J. G., 1991: „Computation of two-dimensional dam-break-induced flows“, Adv. in Water Resources, Vol. 14(1), 31-41

Berger, R. C., Stockstill, R. L., 1995: „Finite-Element Model for High-Velocity Channels“, ASCE Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 121(10), 710-716

Berger, R. C., Carey, C. F., 1998a: „Free-Surface Flow Over Curved Surfaces, Part I: Pertubation Analysis“, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 28, 191-200

Berger, R. C., Carey, C. F., 1998b: „Free-Surface Flow Over Curved Surfaces, Part II: Computational Model“, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 28, 201-213

Bey, K. S., Oden, J. T., 1991: „A Runge-Kutta discontinuous Galerkin finite element method for high speed flows“, Poceedings of the 10th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, Honolulu, Hawaii, 24.-27. Juni

Bollrich, G., 1996: „Technische Hydromechanik, Band 1“ (4. Auflage), Verlag für Bauwesen, Berlin

Broich, K., 1999: „Modelling Notes for the Malpasset Test“, Proceedings of the 3rd CADAM workshop, Zaragoza, Spanien

Burg, C. O. E., Huddleston, D. H., Berger, R. C., 2001: „Efficient, Robust Design Tool for Open-Channel Flows“, ASCE Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 127(1), 62-70

CADAM, 2000: „Concerted Action on Dam-break Modelling“, Final Report, SR 571, Januar 2000, HR Wallingford

Casulli, V., 1990: „Semi-implicit finite difference methods for the two-dimensional shallow water equations“, Journal of Computational Physics, Vol. 86, 56-74

Chaudhry, M. H., 1994: „Computation of Flows with Shocks and Bores“, in Computer Modeling of Free-Surface and Pressurized Flows (Eds.: Chaudhry, M. H., Mays, L.), Kluwer Academic Publishers

Chorin, J. C., Marsden, J. E., 1993: „A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics“, 3. Auflage, Springer, New York

Chow, V. T., 1959: „Open-Channel Hydraulics“, McGraw-Hill Book Comany, New York

Cockburn, B., 1999: „Discontinuous Galerkin Methods for Convection-Dominated Problems”, in LNCSE Vol. 9: „High-Order Methods for Computational Physics” (Eds.: Barth, T. J., Deconinck, H.), 69-224, Springer

Cockburn B., Karniadakis, G., Shu, C.-W., 2000: „Discontinuous Galerkin Methods: Theory, Computation and Applications”, LNCSE, Vol. 11, Springer

Connor, J. J., Wang, J. D., 1974: „Finite element modelling of hydrodynamic circulation“, Numumerical Methods in Fluid Dynamics (Eds.: Brebbia, C. A., Connor, J. J.), Pentech Press, London

Cunge, J. A., Holly, F. M., Verwey, A., 1980: „Practical Aspects of Computational River Hydrodynamics“, Pitman Publishing

Dressler, R. F., 1952: „Hydraulic Resistence Effect upon the Dam-Break Function“, Journal of Research of the National Bureau of Standards, Vol. 19

DVWK-Heft 127, 1999: „Numerische Modelle von Flüssen, Seen und Küstengewässern“ (Eds.: Zielke, W.), Wirtschafts- und Verl.-Ges. Gas und Wasser, Bonn

Felling, M. M., Page, R. H., Korst, H. H., White, R. A., 1998: „An Experimental Analysis and Demonstration of the Non-Steady Flow in a Shock Tube“, Int. J. Engng. Ed., Vol. 14(1), 59-66

Fennema, R. J., Chaudhry, M. H., 1986: „Explicit Numerical Schemes for Unsteady Free-Surface Flows With Shocks“, Water Resources Research, Vol. 22(13), 1923-1930

Fennema, R. J., Chaudhry, M. H., 1987: „Simulation of one-dimensional dam-break flows“, IAHR Journal of Hydraulic Research, Vol. 25(1), 41-51

Fennema, R. J, Chaudhry, M. H., 1989: „Implicit method for two-dimensional unsteady free-surface flows“, IAHR Journal of Hydraulic Research, Vol. 27(3), 321-332

Fennema, R. J., Chaudhry, M. H., 1990: „Explicit Methods for 2-D Transient Free-Surface Flows“, ASCE Journal of Hydr. Engineering, Vol. 116(8), 1013-1034

Ferzinger, J. H., Peric, M., 1999: „Computational Methods for Fluid Dynamics“ (2. Ausgabe), Springer

Fraccarollo, L., Toro, E. F., 1995: „Experimental and numerical assessment of the shallow water model for two-dimensional dam-break type problems”, IAHR Journal of Hydraulic Research, Vol. 33, 843-863

Fujihara, M., Borthwick, A. G. L., 2000: „Godunov-Type Solution of Curvilinear Shallow-Water Equations“, ASCE Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 126(11), 827-835

Galland, J.-C., Goutal, N., Hervouet, J.-M., 1991: „TELEMAC: A new numerical model for solving shallow water equations“, Adv. in Water Resources, Vol. 14(3), 138-148

Garcia-Navarro, P., Alcrudo, F., Saviron, J. M., 1992: „1-D Open-Channel Flow Simulation Using TVD-McCormack Scheme“, ASCE Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 118(10), 1359-1372

Garcia-Navarro, P., Saviron, J. M., 1992: „McCormack’s method for the numerical simulation of one-dimensional discontinuous unsteady open channel flow“, IAHR Journal of Hydraulic Research, Vol. 30(1), 95-105

Garcia-Navarro, P., Hubbard, M. E., Priestley, A., 1995: „Genuinely Multidimensional Upwinding for the 2D Shallow Water Equations“, Journal of Computational Physics, Vol. 121, 79-93

Garcia-Navarro, P., Vazquez-Cendon, M. E., 1998: „Roe`s scheme for 1D irregular geometries“, Proceedings of the 3rd International Conference on Hydroinformatics 98, Kopenhagen, Dänemark, 77-83

Gharangik, A. M., Chaudhry, M. H., 1991: „Numerical Simulation of Hydraulic Jump“, ASCE Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 117(9), 1195-1211

Glaister, P., 1988: „Approximate Riemann solutions for the shallow water equations“, IAHR Journal of Hydraulic Research, Vol. 26(3), 293-306

Glaister, P., 1994: „An Efficient Numerical Scheme for the Two-Dimensional Shallow Water Equations Using Arithmetic Averaging“, Computers Math. Applic., Vol. 27, 97-117

Godunov, S. K., 1959: „Finite difference method for numerical computation of discontinous solution of the equations of fluid dynamics”, Matematicheskii Sbornik, Vol. 47, 271-306

Goutal, N., 1999a: “The Malpasset Dam Failure - An overview and test case definition”, Proceedings of the 3rd CADAM workshop, Zaragoza, Spanien

Goutal, N., 1999b: “Presentation of 1D and 2D simulations of Malpasset dam-break wave propagation”, Proceedings of the 3rd CADAM workshop, Zaragoza, Spanien

Gray, W. G., 1980: „Do Finite Element Models Simulate Surface Flows?“, Finite Elements in Water Resources III, University of Mississippi, Mississippi, USA

Grotkop, G., 1973: „Finite element analysis of long-period water waves“, Computer Meth. in Appl. Mech. and Engrg., Vol. 2, 147-157

Hager, W. H., Schwalt, M., Jimenez, O., Chaudhry, M. H., 1994: „Supercritical flow near an abrupt wall deflection“, IAHR Journal of Hydraulic Research, Vol. 32(1), 103-118

Harms, M., 2001: „Verifikation der RKDG-Methode zur Berechnung von stark instationären, transkritischen 2D Flachwasserströmungen”, Diplomarbeit, Institut für Wasserbau und Wasserwirtschaft, RWTH-Aachen (unveröffentlicht)

Harten, A., Lax, P. D., van Leer, B., 1983: „On Upstream Differencing and Godunov-type Schemes for Hyperbolic Conservation Laws”, SIAM Rev., Vol. 25, 35-61

Harten, A., Engquist, B., Osher, S., Chakravarthy, S. R., 1987: „Uniformly High Order Accurate Essentially Non-oscillatory Schemes, III“, Journal of Computational Physics, Vol. 71(2), 231-303

Hervouet, J.-M., van Haren, L., 1996: „Recent Advances in Numerical Methods for Fluid Flows“, Floodplain Processes, John Wiley & Sons

Hervouet, J.-M., 2000: „A high resolution 2-D dam-break model using parallelization“, Hydrol. Process., Vol. 14, 2211-2230

Hicks, F. E., Steffler, P. M., 1992: „Comparison of Finite-Element Methods for the St. Venant Equations“, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 20, 99-113

Hicks, F. E., Steffler, P. M., 1995: „Characteristic Dissipative Galerkin Scheme for Open-Channel Flow“, ASCE Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 118(2), 337-352

Hicks, F. E., Steffler, P. M., 1997: „One-Dimensional Dam-Break Solutions for Variable Width Channels“, ASCE Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 123(5), 464-468

Hsu, M.-H., Chen, C.-H., Teng, W.-H., 2001: „An Arbitrary Lagrangian-Eulerian finite difference method for computations of free surface flows“, IAHR Journal Hydraulic Research, Vol. 39(5), 481-503

Ippen, A. T., Dawson, J. H., 1951: „Design of Channel Contractions“, ASCE Transactions, Vol. 116, 265-285

Jankowski, J. A., 1999: „A non-hydrostatic model for free surface flows“, Dissertation, Bericht 56/1999, Institut für Strömungsmechanik und elektronisches Rechnen im Bauwesen, Universität Hannover

Jia, Y., Wang, S. Y., 1999: „Numerical Model for Channel Flow and Morphological Change Studies“, ASCE Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 125(9), 924-933

Jiménez, O. F., Chaudhry, M. H., 1988: „Computation of Supercritical Free-Surface Flows“, ASCE Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 114(4), 377-395

Jouguet, E., 1920: J. Math. pures appl., Serie 8, Vol. 3, 1-63

von Karman, T., 1938: Z. angew. Math. Mech., Vol. 18, 49-56

Karniadakis, G. E., Sherwin, S. J., 1999: „Spectral/*hp* Element Methods for CFD“, Oxford University Press, New York

Katopodes, N. D., Strelkoff, T., 1978: „Computing Two-Dimensional Dam-Break Flood Waves“, ASCE Journal of the Hydraulics Devision, Vol. 104(HY9), 1269-1288

Katopodes, N. D., 1984: „A Dissipative Galerkin Scheme for Open-Channel Flow“, ASCE Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 110(4), 450-466

Katopodes, N. D., 1986: „Explicit Computation of Discontinuous Channel Flow“, ASCE Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 112(6), 456-475

Khan, A. A., Steffler, P. M., 1996a: „Modeling Overfalls Using Vertically Averaged an Moment Equations“, ASCE Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 122(7), 397-402

Khan, A. A., Steffler, P. M., 1996b: „Physically Based Hydraulic Jump Model for Depth-Averaged Computations“, ASCE Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 122(10), 540-548

Khan, A. A., Steffler, P. M., 1996c: „Vertically Averaged and Moment Equations Model for Flow Over Curved Beds“, ASCE Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 122(1), 3-9

King, I. P., Norton, W. R., Iceman, K. R., 1975: „A finite element solution for two-dimensional stratified flow problems“, in Finite Elements in Fluids, John Wiley & Sons, London

King, I. P., Norton, W. R., 1978: „Recent applications of RMA’s finite element models for two-dimensional hydrodynamics and wave quality“, in Finite Elements in Fluids II, Pentech Press, London

Krüger, S., Bürgisser, M., Rutschmann, P., 1998: „Advances in calculating supercritical flows in spillway contractions“, Proceedings of the 3rd International Conference on Hydroinformatics 98, Kopenhagen, Dänemark, 163-169

Krüger, S., Rutschmann, P., 2000: „Modelling Floods in Spillways using an Extended Shallow Water Approach“, Proceedings of the 4th International Conference on Hydroinformatics 2000, Iowa City, USA

Lai, Y. G., 2000: „Unstructured Grid Arbitrarily Shaped Element Method for Fluid Flow Simulation”, AIAA Journal, Vol. 38(12), 2246-2252

Lax, P. D., Wendroff, B., 1960: „Systems of Conservation Laws“, Communication on Pure and Applied Mathematics, Vol. 13, 217-237

Ligget, J. A., 1975: „Basic Equations of Unsteady Flow“, in „Unsteady Flow in Open Channels“ (Eds. Mahmood, K., Yevjevich, V.), Water Resources Publications, Fort Collins, Colorado, USA

Lomtev, I., Karniadakis, G. E., 1997: „A discontinuous spectral / *hp* element Galerkin method for the Navier-Stokes equations on unstructured grids“, in Proceedings IMACS WC’97, Berlin, Deutschland

Lomtev, I., Quillen, C. W., Karniadakis, G. E., 1998: „Spectral / *hp* methods for viscous compressible flows on unstructured 2D meshes“, Journal of Computational Physics, Vol. 144, 325-357

Louaked, M., Hanich, L., 1998: „TVD scheme for the shallow water equations“, IAHR Journal of Hydraulic Research, Vol. 36(3), 363-378

MacCormack, R. W., 1971: „Numerical Solutions of a Shock Wave with a laminar Boundary“, Lecture Notes in Physics, Vol. 8, 151-163

MacDonald, I., 1996: „Analysis and computation of steady open channel flow“, PhD thesis, Department of Mathematics, University of Reading, U.K.

Malcherek, A., 2000: „Hydromechanik der Fließgewässer”, Habilitation, Bericht Nr. 61/2001, Institut für Strömungsmechanik und elektronisches Rechnen im Bauwesen, Universität Hannover

Martin, C. S., DeFazio, F. G., 1969: „Open-Channel Surge Simulation by Digital Computer“, ASCE Journal of the Hydraulic Division, Vol. 95(HY6), 2049-2070

Martin, C. S., Zovne, J. J., 1971: „Finite-Difference Simulation of Bore Propagation“, ASCE Journal of the Hydraulic Division, Vol. 97(Hy7), 993-1010

Meselhe, E. A., 1994: „Numerical Simulation of Transcritical Flow in Open Channels“, PhD thesis, Iowa Institute of Hydraulic Research, University of Iowa, USA

Mingham, C. G., Causon, D. M., 1998: „High-Resolution Finite-Volume Method for Shallow Water Flows“, ASCE Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 124(6), 605-614

Mohapatra, P. K., Eswaran, V., Bhallamudi, S. M. 1999: „Two-Dimensional Analysis of Dam-Break Flow in Vertical Plane“, ASCE Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 125(2), 183-191

Molls, T., Chaudhry, M. H., 1995: „Depth-Averaged Open Channel Flow Model“, ASCE Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 121(6), 453-465

Molls, T., Zhao, G., Molls, F., 1998: „Friction Slope in Depth-Averaged Flow“, ASCE Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 124(1), 81-85

Morrel, A.-T., Fey, M., 1994: „Multidimensional Method of Transport for the Shallow Water Equations“, Proceedings of the 5th Internaional Conference on Hyperbolic Problems, Stony Brook

Mussau, J., 1889: „L’intégration graphique, Appendice au mémoire sur l’intégration graphique“, Assoc. des Ingénieurs sortis des Ecoles Spéciales de Gand, Belgien, Annales, 12, 185-444

Näf, D., 1997: „Numerische Simulation von Stosswellen in Freispiegelströmungen“, Mitteilungen VAW 148, ETH Zürich

Norton, W. R., King, I. P., Orlob, G. T., 1973: „A finite element model for lower granite reservoir“, Water Resources Engineers, Walnut Creek, California, Auftraggeber: Walla Walla District, U.S. Army Corps of Engineers

Nsom, B., Debiane, K., Piau, J.-M., 2000: „Bed slope effect on the dam break problem“, IAHR Journal of Hydraulic Research, Vol. 38(6), 459-464

Nujic, M., 1995: „Efficient implementation of non-oscillatory schemes for the computation of free-surface flows“, IAHR Journal Hydraulic Research, Vol. 33(1), 101-111

Nujic, M., 1998: „Praktischer Einsatz eines hochgenauen Verfahrens für die Berechnung von tiefengemittelten Strömungen“, Dissertation, Institut für Wasserwesen, Universität der Bundeswehr, München

Preiswerk, E., 1938: Dissertation, ETH Zürich

Rastogi, A.-K., Rodi, W., 1978: „Predictions of heat and mass transfer in open channels“, ASCE Journal of the Hydraulic Division, Vol. 104, 397-420

Rahman, M., Chaudhry, M. H., 1995: „Simulation of hydraulic jump with grid adaptation“, IAHR Journal of Hydraulic Research, Vol. 33(4), 555-569

Rahman, M., Chaudhry, M. H., 1997: „Computation of flow in open-channel transitions“, IAHR Journal of Hydraulic Research, Vol. 35(2), 243-256

Riabouchinsky, D., 1932: „Sur l'analogie hydraulique des mouvements d'un fluide compressible“, Institut de France, Académie des Science, Comptes Rendus, Vol. 195(22), 998-999

Richtmyer, R. D., Morton, K. W., 1967: „Difference Methods for Initial-Value Problems“
(2. Auflage), Interscience Publishers

Ritter, A., 1892: „Die Propagation von Wasserwellen“, Deutsche Ingenieurszeitschrift, Vol. 36, Berlin

Rodi, W., 1993: „Turbulence Models and their Applications in Hydraulics, A State-of-the-art Review“, IAHR Monograph Series, 3. Auflage, A. A. Balkema, Rotterdam

Roe, P. L., 1981: „Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes”, Journal of Computational Physics, Vol. 43, 357-372

Sakkas, J. G., Strelkoff, T., 1973: „Dam-Break Flood in a Prismatic Dry Channel“, ASCE Journal of the Hydraulic Division, Vol. 99(HY12), 2195-2216

Sauer, R., 1960: „Einführung in die theoretische Gasdynamik“, 3. Auflage, Springer

Schwanenberg, D., Köngeter, J., 2000: „A Discontinuous Galerkin Method for the Shallow Water Equations with Source Terms”, in LNCSE, Vol. 11: „Discontinuous Galerkin Methods“ (Eds.: Cockburn, B, Karniadakis, G. E., Shu, C.-W.), Springer

Shu, C.-W., Osher, S., 1989: „Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes, II“, Journal of Computational Physics, Vol. 83, 32-78

Shu, C.-W., 1999: „High Order ENO and WENO Schemes for CFD”, in LNCSE, Vol. 9: „High-Order Methods for Computational Physics” (Eds.: Barth, T. J., Deconinck, H.), 439-582, Springer

Shu, C.-W., 2002: „High order finite difference and finite volume WENO schemes and discontinuous Galerkin methods for CFD”, International Journal of Computational Fluid Dynamics (als Veröffentlichung angenommen)

Smoller, J., 1994: „Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations“ (2. Ausgabe), in Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 258, Springer

Stansby, P. K., Chegini, A., Barnes, T. C. D., 1998: „The initial stages of dam-break flow”, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 374, 407-424, Cambridge University Press

Stein, C. J., 1990: „Mäandrierende Fließgewässern mit überströmten Vorländern - Experimentelle Untersuchungen und numerische Simulaion“, Mitteilungen des Instituts für Wasserbau und Wasserwirtschaft, Heft 76, RWTH Aachen

Steffler, P. M., Jin, Y.-C., 1993: „Depth averaged and momentum equations for moderately shallow free surface flow“, IAHR Journal of Hydraulic Research, Vol. 31(1), 5-16

Stoker, J., 1957: „Water Waves“, Interscience

Taylor, C., Davis, J., 1975a: „Tidal propagation and dispersion in estuaries“ Kapitel 5 in Finite Elements in Fluids I, John Wiley & Sons, London

Taylor, C., Davis, J., 1975b: „Tidal and long wave propagation: A finite element approach“, Computer and Fluids, Vol 3, 125-134

Terzidis, G., Strelkoff, T., 1970: „Compuatation of Open-Channel Surges and Shocks“, Journal of the Hydraulic Division, Vol. 96(HY12), 2581-2610

Toro, E. F., 1992: „Riemann problems and the WAF method for solving the two-dimensional shallow water equations”, Phil. Trans. R. Soc. London, Vol. 338, 43-68

Toro, E. F., Sleigh, P. A., Morris, M. W., 1998: „CADAM: A review of testing methods and solutions obtained”, CADAM, Proceedings of the Wallingford Meeting, März 1998

Toro, E. F., 1999: „Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics“ (2. Auflage), Springer

Tseng, M.-H., 1998: „Explicit Finite Volume Non-Oscillatory Schemes for 2D Transient Free-Surface Flows“, International Journal for Numerical Methods In Fluids, Vol. 30, 831-843

Tseng, M.-H., Chu, C. H., 2000: „Two-dimensional shallow water flows simulation using TVD-MacCormack Scheme“, IAHR Journal of Hydraulic Research, Vol. 38(2), 123-31

Venutelli, M., 1998: „A third-order Taylor-Galerkin model for the simulation of two-dimensional unsteady free surface flows“, Applied Math. Modelling, Vol. 22, 641-656

Vincent, S., Caltagirone, J.-P., Bonneton, P., 2001: „Numerical modelling of bore propagation and run-up on sloping beaches using a MacCormack TVD scheme“, IAHR Journal of Hydraulic Research, Vol. 39(1), 41-49

Wang, J. D., Connor, J. J., 1975: „Mathematical modelling of near costal circulation“, MIT Parsons Laboratory Report No. 2000

Wang, J. S., Ni, H. G., He, Y. S., 2000: „Finite-Difference TVD Scheme for Computation of Dam-Break Problems“, ASCE Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 126(4), 253-262

Warburton, T. C., Karniadakis, G. E., 1999: „A discontinuous Galerkin method for the viscous MHD equations“, Journal of Computational Physics, Vol. 152, 1-34

Weiyan, T., 1992: „Shallow Water Hydrodynamics, Mathematical Theory and Numerical Solution for a Two-dimensional System of Shallow Water Equations", Elsevier Oceanography Series 55, Elsevier, Amsterdam

Yang, J. Y., Hsu, C. A., Chang, S. H., 1993a: „Computation of free surface flows, Part 1: One-dimensional dam-break flow", IAHR Journal of Hydraulic Research, Vol. 31(1), 19-34

Yang, J. Y., Hsu, C. A., 1993b: „Computation of free surface flows, Part 2: Two-Dimensional unsteady bore diffraction", IAHR Journal of Hydraulic Research, Vol. 31(3), 403-414

Ye, J., McCorquodale, J. A., 1997: „Depth-Averaged Hydrodynamik Model in Curvilinear Collocated Grid", ASCE Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 123(5), 380-388

Yee, H. C., 1997: „Explicit and Implicit Multidimensional Compact High-Resolution Shock-Capturing Methods: Formulation", Journal of Computational Physics, Vol. 131, 216-232

Zhou, T., Li, Y., Shu, C.-W., 2001: „Numerical comparison of WENO finite volume and Runge-Kutta Discontinuous Galerkin methods", Journal of Scientific Computing, Vol. 16, 145-171

Zoppou, C., Roberts, S., 1999: „Catastrophic Collapse of Water Supply Reservoirs in Urban Areas", ASCE Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 125(7), 686-695

Zoppou, C., Roberts, S., 2000: „Numerical Solution of the two-dimensional unsteady dam break", Applied Math. Modelling, Vol. 24, 457-475

Zwart, P. J., Raithby, G. D., Raw, M. J., 1999: „The Integrated Space-Time Finite Volume Method and Ist Application to Moving Boundary Problems", Journal of Computational Physics, Vol. 154, 497-519

Anhang A: Ansatzfunktionen

Polynomgrad *k* = 0

Die konstante Ansatzfunktion $\varphi_0(x,y)$ für Dreiecke ist gegeben durch

$$\varphi_0(x,y)=1$$

mit den Ableitungen

$$\varphi_{0x}(x,y)=0$$

$$\varphi_{0y}(x,y)=0$$

Die Massenmatrix M ist für diese Ansatzfunktion

$$M=\int_K \varphi_0(x,y)\varphi_0(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=|K|$$

Polynomgrad *k* = 1

Die lineare Ansatzfunktion $\varphi_i(x,y)$ für Dreiecke nimmt am Seitenmittelpunkt i den Wert 1 an und an den beiden anderen Seitenmittelpunkten den Wert 0. Sie ist definiert durch

$$\varphi_i(x,y)=a_i x+b_i y+c_i$$

mit a_i, b_i, c_i gemäß Tabelle A1. Die Ableitung der Ansatzfunktion ergibt sich damit zu

$$\varphi_{ix}(x,y)=a_i$$

$$\varphi_{iy}(x,y)=b_i$$

Tabelle A1: Parameter für die lineare Ansatzfunktion für Dreiecke

i	a_i	b_i	c_i
0,1,2	$-\frac{y_i - y_{i+1}}{K}$	$\frac{x_i - x_{i+1}}{K}$	$\frac{y_i x_{i+1} - x_i y_{i+1} - y_{i+1} x_{i+2} + x_{i+1} y_{i+2} - y_{i+2} x_i - x_{i+2} y_i}{2K}$

mit

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{2} x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1} \quad \text{und} \quad x_i = x_{i-3},\ y_i = y_{i-3},\ \text{für}\, i \geq 3$$

Die Massenmatrix M ist für diese Ansatzfunktionen

$$M = \int_K \varphi_i(x,y) \varphi_j(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = |K|\, diag(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$$

Polynomgrad *k* = 2

Die quadratische Ansatzfunktion $\varphi_i(x,y)$ für Dreiecke nimmt am Punkt i den Wert 1 an und ist 0 an allen anderen Stützstellen. Sie ist definiert durch

$$\varphi_i(x,y) = a_i x^2 + b_i y^2 + c_i xy + d_i x + e_i y + f$$

mit a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i gemäß Tabelle A2. Die Ableitung der Ansatzfunktion ergibt sich damit zu

$$\varphi_{ix}(x,y) = 2a_i x + c_i y + d_i$$

$$\varphi_{iy}(x,y) = 2b_i y + c_i x + e_i$$

Tabelle A2. Parameter für die quadratische Ansatzfunktion für Dreiecke

i	a_i	b_i	c_i
0	$\frac{(y_1 - y_2)^2}{2K^2}$	$\frac{(x_1 - x_2)^2}{2K^2}$	$-\frac{(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)}{K^2}$
1	$\frac{(y_1 - y_2)(y_2 - y_0)}{K^2}$	$\frac{(x_1 - x_2)(x_2 - x_0)}{K^2}$	$\frac{x_0(y_1 - y_2) + x_1(y_0 - y_2) + x_2(-y_0 - y_1 + 2y_2)}{K^2}$

i	d_i	e_i	f_i
0	$\dfrac{(y_1-y_2)L}{4K^2}$	$\dfrac{-(x_1-x_2)L}{4K^2}$	$\dfrac{(x_1y_2-x_2y_1)[x_0(-y_1+y_2)+x_1(y_0+y_2)+x_2(-y_0-y_1)]}{4K^2}$
1	$\dfrac{x_0(-y_1y_2+y_2^2)+x_1(-y_2y_0+y_2^2)+x_2(2y_0y_1-y_0y_2-y_1y_2)}{K^2}$	$\dfrac{y_0(-x_1x_2+x_2^2)+y_1(-x_2x_0+x_2^2)+y_2(2x_0x_1-x_0x_2-x_1x_2)}{K^2}$	$\dfrac{-(x_0y_2-x_2y_0)(x_1y_2-x_2y_1)}{K^2}$

mit

$$K=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{2}x_iy_{i+1}-y_ix_{i+1}\,,\quad L=x_0(-y_1+y_2)+x_1(y_0+3y_2)+x_2(-y_0-3y_1)$$

Die Massenmatrix M ist für diese Ansatzfunktionen

$$M=\int_K \varphi_i(x,y)\varphi_j(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{180}|K|\begin{bmatrix}6&0&-1&-4&-1&0\\0&32&0&16&-4&16\\-1&0&6&0&-1&-4\\-4&16&0&32&0&16\\-1&-4&-1&0&6&0\\0&16&-4&16&0&32\end{bmatrix}$$

ihre Inverse ist

$$M^{-1}=\frac{1}{8|K|}\begin{bmatrix}288&-12&48&48&48&-12\\-12&78&-12&-27&48&-27\\48&-12&288&-12&48&48\\48&-27&-12&78&-12&-27\\48&48&48&-12&288&-12\\-12&-27&48&-27&-12&78\end{bmatrix}$$

Anhang B: Numerische Integration

Linienintegrale

Die Linienintegrale können durch eine Gauß-Quadratur numerisch integriert werden durch

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{N} w_i f(y_i) + R_N$$

$$y_i = \left(\frac{b-a}{2}\right)x_i + \left(\frac{b+a}{2}\right)$$

Die Formel ist exakt bis zu Polynomen mit dem Grad $2N$-1. Die Stützstellen und Wichtungsfaktoren sind nach Tabelle B1 gegeben.

Tabelle B1: Wichtungsfaktoren für die Gauß-Integration bei Linien

	$N = 1$, Ordnung 1		$N = 2$, Ordnung 3		$N = 3$, Ordnung 5	
i	x_i	w_i	x_i	w_i	x_i	w_i
1	0	2	$-\sqrt{1/3}$	1	$-\sqrt{3/5}$	5/9
2			$\sqrt{1/3}$	1	0	8/9
3					$\sqrt{3/5}$	5/9

Flächenintegrale

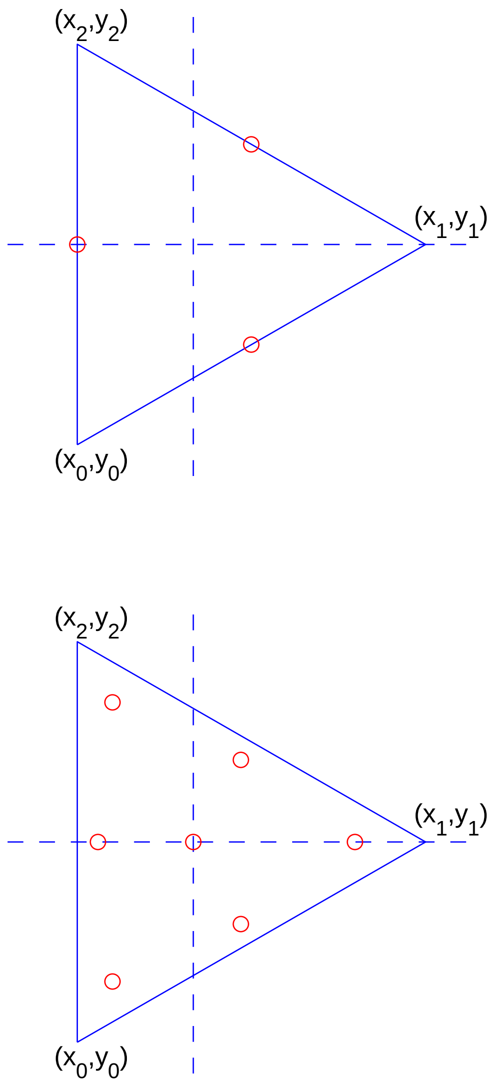

Abbildung B1: Stützstellen zur Integration von Flächenintegralen in Dreiecken

Die Flächenintegrale bei Dreiecken können durch eine Quadratur auf drei bzw. sieben Stützstellen (Abbildung B1) numerisch integriert werden durch

$$\int_K f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = |K| \sum_{i=1}^{N} w_i f(x_i, y_i)$$

$$|K| = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{2} x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1}$$

Tabelle B2: Wichtungsfaktoren für die Gauß-Integration bei Dreiecken

	3 Gaußpunkte, Ordnung 2			7 Gaußpunkte, Ordnung 5		
i	x_i	y_i	w_i	x_i	y_i	w_i
1	$\frac{x_0 + x_1}{2}$	$\frac{y_0 + y_1}{2}$	1/3	x_m	y_m	270/1200
2	$\frac{x_1 + x_2}{2}$	$\frac{y_1 + y_2}{2}$	1/3	$x_m + L_p(x_0 - x_m)$	$y_m + L_p(y_0 - y_m)$	$\frac{155 - \sqrt{15}}{1200}$
3	$\frac{x_2 + x_0}{2}$	$\frac{y_2 + y_0}{2}$	1/3	$x_m + L_p(x_1 - x_m)$	$y_m + L_p(y_1 - y_m)$	$\frac{155 - \sqrt{15}}{1200}$
4				$x_m + L_p(x_2 - x_m)$	$y_m + L_p(y_2 - y_m)$	$\frac{155 - \sqrt{15}}{1200}$
5				$x_m + L_m(x_0 - x_m)$	$y_m + L_m(y_0 - y_m)$	$\frac{155 + \sqrt{15}}{1200}$
6				$x_m + L_m(x_1 - x_m)$	$y_m + L_m(y_1 - y_m)$	$\frac{155 + \sqrt{15}}{1200}$
7				$x_m + L_m(x_2 - x_m)$	$y_m + L_m(y_2 - y_m)$	$\frac{155 + \sqrt{15}}{1200}$

mit

$$x_m = (x_1 + x_2 + x_3)/3$$

$$y_m = (y_1 + y_2 + y_3)/3$$

$$L_m = -(\sqrt{15} - 1)/7$$

$$L_p = (\sqrt{15} + 1)/7$$

Lebenslauf

9.11.1972	geboren in Bardenberg jetzt Würselen
1992	Allgemeine Hochschulreife Städtisches Gymnasium Herzogenrath
1992 - 1998	Studium Bauingenieurwesen mit dem Schwerpunkt Konstruktiver Ingenieurbau Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
1995 - 1996	Studium Bauingenieurwesen Universidad Politécnica de Madrid, Spanien
1994 - 1998	Studentischer Mitarbeiter Lehrstuhl und Institut für Wasserbau und Wasserwirtschaft Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
1998	Abschluss des Diploms in der Fachrichtung Bauingenieurwesen
1998 - 2001	Wissenschaftlicher Mitarbeiter Lehrstuhl und Institut für Wasserbau und Wasserwirtschaft Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
2001	Gastwissenschaftler Iowa Institute of Hydraulic Research, University of Iowa, USA
seit 2002	Research Engineer River Engineering and Morphology WL | Delft Hydraulics, Delft, Niederlande