



Laboratoire de **P**hysique des **O**céans

Unité Mixte de Recherche
(CNRS - IFREMER - UNIVERSITÉ)



Circulations océaniques
Notes préliminaires

Alain Colin de Verdière



Mars 2003

I. Introduction

La circulation océanique organisée dans l'espace à l'échelle des bassins océaniques est observée depuis le début du siècle sans variation notable¹ dans le temps des champs de température et salinité associés. Ceux-ci varient respectivement de 20°C et 2 psu² entre l'équateur et les pôles. A l'échelle du millier de kilomètres, la vitesse horizontale observée est inférieure à 1 cm s⁻¹ (~ 1 km/jour) à l'exception de régions de couches limites sur les bords des bassins. Sur la verticale ces vitesses sont généralement intensifiées dans le premier kilomètre mais loin d'être négligeables au fond (profondeur moyenne des océans ~ 3.8 km). L'océan est rempli d'eau de viscosité moléculaire ν et de diffusivité thermique k connues.

Avec les échelles suivantes :

$$L = 10^3 \text{ km}, H = 1 \text{ km}, \Delta T = 20^\circ\text{C}, \Delta S = 2 \text{ psu}, U \sim 10^{-2} \text{ m s}^{-1},$$

$$\Omega = 7.2 \cdot 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}, \nu = 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}, k = 1.4 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

on estime les nombres sans dimension suivants :

Nombre de Rossby		$\varepsilon = U/2\Omega L \sim 10^{-4}$
Rapport d'aspect		$\delta = H/L \sim 10^{-3}$
Nombre d'Ekman	(horizontal)	$E_H = \nu/2\Omega L^2 \sim 10^{-14}$
	(vertical)	$E_V = \nu/2\Omega H^2 \sim 10^{-8}$
Nombre de Reynolds		$Re = UL/\nu \sim 10^{10}$
Nombre de Rayleigh		$Ra = g \frac{\alpha \Delta T}{\nu k} H^3 \sim 10^{20}$

(le coefficient d'expansion thermique $\alpha \sim 2 \cdot 10^{-4} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$).

Les deux premiers nombres ε et δ conduisent aux deux simplifications majeures utilisées en océanographie des équations de Navier – Stokes. Le petit δ implique des vitesses (accélérations) verticales plus petites que les vitesses (accélérations) horizontales à l'ordre δ (resp. δ^2). Ceci conduit à l'hypothèse hydrostatique. Le petit ε (joint aux petits Ekman) conduit à l'équilibre géostrophique entre les forces horizontales de Coriolis et de pression à la base des équations dites quasi-géostrophiques. Les petits Ekman et grand Reynolds, Rayleigh conduisent naïvement à négliger³ viscosité et diffusion. Deux difficultés apparaissent alors immédiatement : Premièrement les études de stabilité hydrodynamique montrent qu'un écoulement cisailé (convectif) devient instable dès que les nombres de Reynolds (Rayleigh) dépassent 0 (10^3) de sorte que la circulation océanique ne s'apparente pas à l'écoulement du miel mais plutôt à un écoulement turbulent, le produit d'instabilités primaires dues à des

¹ voir paragraphe circulations transitoires

² La salinité (psu) est définie comme la masse de sel par kg d'eau de mer fois 1000.

³ Feynman rappelle que J. Von Neumann dénotait « eau sèche » le fluide étudié, jusqu'à la fin du 19^{ème} siècle, par les mathématiciens qui faisaient cette approximation en utilisant le modèle d'Euler plutôt que les équations de Navier – Stokes.

régimes de Reynolds (Rayleigh) plusieurs ordres de grandeur au-dessus des transitions laminaires. En conséquence les spectres observés des mouvements océaniques sont à large bande à cause de ces instabilités. Deuxièmement des sous-échelles spatiales peuvent aussi apparaître pour satisfaire les conditions aux limites de collage aux parois d'un fluide réel, sous échelles pour lesquelles les forces de frottement re-deviennent d'ordre un.

Ces deux entités instabilités et couches limites sont la cause des plus grandes difficultés d'analyse de l'océan (ou de l'atmosphère d'ailleurs) et la raison d'être des efforts de recherche présents et à venir. L'on pourrait simplement penser à calculer cette circulation océanique étant donné ses forçages (d'interaction avec l'atmosphère) puisque les équations de Navier Stokes sont connues et que des calculateurs existent. Pour prendre en compte l'effet de la dissipation moléculaire ceci implique de descendre jusqu'à des échelles centimétriques⁴. A cette résolution, un modèle de bassin océanique de 5000 x 5000 x 5 km³ contiendrait O (10²³) points de grille, dépassant pour un certain temps encore le nombre de points O (10⁹) des modèles numériques les plus performants. Sachant qu'il y a disons 50 ans on calculait avec peine des océans de 10⁴ points, une tendance comme celle là du gain d'un ordre de grandeur par décennie implique d'attendre encore 140 ans (ce qui paradoxalement semble assez court, voire même trop court⁵). Les objectifs de l'océanographie physique ne sont pas tant de calculer la circulation océanique que d'en comprendre le fonctionnement. Compte tenu des multiples sources d'erreur d'un modèle numérique de la circulation océanique, la validation d'une simulation ne peut être faite que si le fonctionnement de l'océan modélisé est proche du fonctionnement de l'océan réel. De cette proximité naît la valeur d'une prédiction d'évolution future (sous l'effet par exemple d'une variation externe type croissance du CO₂ d'origine humaine). Comme la circulation océanique couvre une large gamme d'échelles spatiales, l'étude du dit fonctionnement n'est pas chose aisée mais est rendue possible par l'identification progressive de processus élémentaires qui constituent aujourd'hui les briques de notre compréhension de la physique océanique. Quelques-unes de ces briques, détaillées ci-après, ont été identifiées non pas avec les équations de Navier Stokes mais avec des approximations de ces équations valables localement. La généralité des équations de Navier-Stokes est un handicap certain pour qui veut comprendre un écoulement d'échelle spécifique. Le succès du scaling en GFD (Geophysical Fluid Dynamics) a été justement de permettre la dérivation de ces approximations appropriée à un processus physique d'échelles données. Un important sous-produit de l'analyse GFD a été d'identifier des processus physiques analogues dans des fluides différents, les comparaisons océan – atmosphère ayant été particulièrement fructueuses.

Si l'on se focalise sur la seule circulation océanique de grande échelle mentionnée au début les produits d'instabilité de plus petite échelle peuvent être soit ignorés (eau sèche) soit paramétrisés mais il n'est pas inutile de se mettre dans l'idée que pour l'instant la viscosité du fluide à ces grandes échelles est essentiellement inconnue⁶.

⁴ Les échelles de dissipation de Kolmogorov sont fonction du taux de dissipation d'énergie et de ν .

⁵ voir conclusion

⁶ Les observations comme les expériences de flotteurs dérivant renseignent sur le mélange turbulent des mouvements de plus petite échelle.

II. Circulations en fluide homogène

Le vent est le premier forçage qui a été introduit dans les théories de la circulation océanique même si les observations montraient l'importance des flux de chaleur et d'évaporation – précipitation pour modifier la température et la salinité de l'océan. Les processus élémentaires liés à ce forçage mécanique ont été isolés en supposant le fluide homogène. Plus généralement l'équation de conservation de la masse se réduit en fait à une conservation du volume car les variations relatives de densité dues aux variations de température, salinité, pression⁷ sont de toutes façons de l'ordre de quelques % au plus.

2.1. Couches d'Ekman

Le problème le plus simple est de considérer une tension constante appliquée sur un fluide homogène, en rotation, de profondeur H , illimité horizontalement. Le problème stationnaire se réduit à :

$$2 \underline{\Omega} \times \underline{u} = \frac{\nu \partial^2 \underline{u}}{\partial z^2} \quad (2.1.1)$$

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0 \quad (2.1.2)$$

$$\tau_x = \tau_o, \quad z = 0 \quad (2.1.3a)$$

$$\underline{u} = 0, \quad z = -H \quad (2.1.3b)$$

Dans ces équations la gravité n'apparaît plus. Le fluide ne pourrait éventuellement sentir l'influence de la gravité que par les ondulations de sa surface libre au contact avec l'atmosphère. Si on néglige ces ondulations et que l'on remplace la surface libre par une plaque rigide, on s'en affranchit totalement et les circulations discutées sont en état d'apesanteur. On reviendra sur cette approximation du toit rigide au paragraphe 2.9.

Dans l'équation (2.1.1) les termes non linéaires, le frottement horizontal et le gradient de pression n'apparaissent pas car la tension de vent est constante. Si \underline{k} désigne un vecteur unitaire vertical (parallèle à $\underline{\Omega}$) et si on adimensionalise l'échelle verticale par H , (2.1) devient :

$$\underline{k} \times \underline{u} = E_v \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial \eta^2} \quad \text{où} \quad \eta = \frac{z}{H} \quad \text{et} \quad E_v = \frac{\nu}{2\Omega H^2} \quad (2.1.4)$$

et (2.1.2.) se réduit simplement à $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$ puisque la vitesse horizontale \underline{u}_H ne dépend que de z . Ceci entraîne $w = 0$ si les frontières sont perpendiculaires à $\underline{\Omega}$.

⁷ Cette approximation filtre les ondes acoustiques.

Si $E_v \ll 1$, (2.1.4) nous indique que \underline{u}_H est aussi nul ! Mais comme $\underline{u}_H = 0$ ne satisfait pas à la condition limite (2.1.3a) en surface, on s'attend à ce que le terme frictionnel redevienne important près de la surface dans une couche limite d'épaisseur $\ell = E_v^{1/2}$ telle que E_v/ℓ^2 soit 0(1).

Après re-dimensionalisation de η par $E_v^{1/2}$, (2.1.4) devient :

$$\underline{k} \times \underline{u} = \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial \eta'^2}$$

avec
$$\frac{\rho_0 \nu}{H E_v^{1/2}} \frac{\partial \underline{u}}{\partial \eta'} = \underline{\tau}, \text{ en } \eta' = 0$$

dont la solution via les images complexes U et τ de \underline{u} et $\underline{\tau}$ est simplement :

$$U = \frac{\tau e^{-i\pi/4}}{\rho_0 (\nu \Omega)^{1/2}} e^{\frac{\eta'}{\sqrt{2}}(1+i)}$$

En surface la vitesse est à $\pi/4$ à droite de la tension. A cause de la force de Coriolis, le vecteur vitesse tourne avec la profondeur mais également décroît en amplitude (spirale d'Ekman) de sorte qu'au-delà d'une profondeur $H E_v^{1/2} = \left(\frac{\nu}{2\Omega}\right)^{1/2}$ le courant tend effectivement vers zéro

et le frottement reste effectivement confiné dans cette couche limite d'Ekman (confirmant l'analyse naïve faite en mettant $E_v = 0$). Il s'agit d'une couche limite si, bien entendu, ν est telle que $E_v \ll 1$. Pour l'application géophysique, ν n'est pas la viscosité moléculaire, mais une viscosité turbulente liées aux instabilités de cisaillement qui se produisent dans la CL. Pour s'affranchir de cette une viscosité arbitraire (mesurée dans certains cas rares), les océanographes ont tendance à s'intéresser au transport d'Ekman \underline{M}_ϵ qui, lui, est indépendant de ν :

$$2\Omega \times \underline{M}_\epsilon = \underline{\tau}, \text{ avec } \underline{M}_\epsilon = \int_{-H}^0 \rho_0 \underline{u} dz$$

soit :
$$\underline{M}_\epsilon = \frac{1}{2\Omega} \underline{\tau} \times \underline{k} \quad (2.1.5)$$

Le flux d'eau « superficiel » s'effectue perpendiculairement à droite du vent et l'intérieur du fluide est immobile. Une tension de vent de 0.1 N m^{-2} d'une jolie brise d'ouest permet d'estimer un transport d'eau vers le sud⁸ à travers un bassin de largeur $a = 5000 \text{ km}$ de $\frac{\tau a}{2\Omega \rho_0} = 3.4 \text{ Sv}$ où Sv , le Sverdrup = $10^6 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ est l'unité de mesure traditionnelle du

transport en Océanographie. Le sens de cette réponse océanique reste inchangé dans le régime des vents d'ouest de 30° à 60° de latitude mais s'inverse dans le régime des Alizés entre 10°

⁸ L'analyse est valable dans l'hémisphère Nord car $\underline{\Omega}$ a alors une composante positive dans la direction de l'axe vertical orienté vers l'extérieur de la terre. Le paragraphe 3.3 traite du cas terrestre de la géométrie sphérique.

et 30° : La variation spatiale de la tension de vent crée donc une convergence du transport d'Ekman de sorte qu'un flux vertical apparaît pour conserver la masse à la base de la couche d'Ekman. L'existence de ce flux vertical permet de mettre en mouvement l'océan sous la couche d'Ekman comme nous allons le voir plus loin.

De façon analogue il est instructif de voir comment une couche d'Ekman de fond peut freiner un écoulement intérieur. Considérons donc la situation d'un écoulement géostrophique intérieur \underline{u}_I :

$$2\Omega \times \underline{u}_I = -\nabla p_I / \rho_0$$

Comme \underline{u}_I ne satisfait pas la condition de collage (2.1.3b) au fond, une couche limite est nécessaire pour que les termes visqueux redeviennent du même ordre que les termes géostrophiques. En introduisant la variable verticale de couche limite $\eta' = \left(\frac{z}{H} - 1 \right) / E_v^{1/2}$:

$$\underline{k} \times \underline{u} = -\nabla p_I + \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial \eta'^2} \quad (2.1.6)$$

$$\lim_{\eta' \rightarrow \infty} \underline{u} = \underline{u}_I$$

avec $\underline{u} = 0$ à $\eta' = 0$

La pression qui apparaît dans la couche limite n'est autre que la pression P_I car l'hydrostatique impose cette constance de la pression sur la couche limite en fluide homogène. (2.1.6) se ré-écrit :

$$\underline{k} \times \underline{u} = + \underline{k} \times \underline{u}_I + \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial \eta'^2} \quad (2.1.7)$$

dont la solution complexe U est :

$$U = U_I \left[1 - e^{-\eta' / \sqrt{2}(1+i)} \right] \quad (2.1.8)$$

Comme précédemment, le vecteur vitesse décrit une spirale entre la valeur géostrophique intérieure et la valeur nulle à la paroi. Le transport d'Ekman dû à la couche limite transporte naturellement le fluide des hautes vers les basses pressions mais est toujours confiné au fond, l'effet du frottement laissant intact le courant géostrophique intérieur. Les termes frictionnels apparaissent incapables finalement de freiner l'intérieur d'un écoulement géostrophique uniforme (ou comme précédemment de le générer si le vent est uniforme).

2.2. Spin-down/Spin-up

La mise en mouvement ou le freinage de l'intérieur de l'océan par le frottement est entièrement lié à cette hypothèse d'uniformité du forçage ou de l'écoulement géostrophique intérieur. Supposons que l'on ait affaire plutôt à un vortex géostrophique avec une distribution axisymétrique de pression P_I ⁹ plutôt qu'à un écoulement uniforme. Une section verticale à travers le vortex montre que le flot dans la couche limite de fond est convergent (divergent) dans le cas d'une basse (haute) pression du vortex. L'existence de cette vitesse verticale qui sort de la couche limite inférieure baptisée pompage d'Ekman par Charney – Eliassen induit un flot divergent (convergent) dans l'intérieur. Les forces de Coriolis agissent sur ce flot radial et induisent une circulation qui s'oppose à l'écoulement géostrophique de départ. C'est le spin-down, contrôlé par la couche d'Ekman de l'écoulement intérieur. Pour calculer cet effet et estimer le temps de spin-down (décroissance), il faut ré-introduire les termes inertiels. Si les nombres de Rossby $\varepsilon_T = (\Omega T)^{-1}$ et ε sont $\ll 1$, ces termes inertiels vont rester petits devant les termes géostrophiques de l'écoulement intérieur. Le mouvement sera dit alors quasi-géostrophique.

Intéressons-nous à la composante de la vorticité dans la direction de $\underline{\Omega}$ pour notre vortex axisymétrique. L'équation d'évolution se réduit à :

$$\frac{\partial \xi_I}{\partial t} = 2\Omega \frac{\partial w_I}{\partial z} \quad (2.2.1)$$

Comme le champ intérieur est indépendant de z , intégrons (2.2.1) entre le sommet de la couche d'Ekman inférieure et un niveau où $w_I = 0$ (de façon à faire apparaître le seul contrôle par la dissipation sur le fond. Par simplicité on reprend la même épaisseur H).

$$\frac{\partial \xi_I}{\partial t} = \frac{-2\Omega}{H} w_E \quad (2.2.2)$$

où w_E est précisément la vitesse verticale contrôlée par la CL inférieure. Si ε et ε_T sont petits alors w_E peut être calculé via la solution stationnaire (2.1.8) :

$$\frac{\partial w_E}{\partial \eta'} = -HE_v^{1/2} \nabla \cdot \underline{u} \quad (2.2.3)$$

Cette relation (2.2.3) montre déjà que w_E est $O(E_v^{1/2})$ plus petit que l'estimateur δU basé sur la continuité. Intégrant (2.2.3) entre la paroi au fond et le sommet de la couche d'Ekman:

$$w_E(\infty) = -E_v^{1/2} \int_0^\infty \nabla \cdot \underline{u} \, d\eta'$$

soit :

$$w_E(\infty) = \frac{1}{2} \left(\frac{v}{\Omega} \right)^{1/2} \xi_I$$

⁹ Une telle distribution équilibrée par les forces de Coriolis et V^2/R est encore solution exacte des équations d'Euler (terme non linéaire inclus).

De sorte qu'avec (2.2.2) :

$$\frac{\partial \xi_I}{\partial t} = -\frac{\xi_I}{T} \quad (2.2.4)$$

où T , le temps de spin-down (décroissance exponentielle) est $\frac{H}{(\nu\Omega)^{1/2}}$ ou encore $\Omega^{-1}(2 E_\nu)^{-1/2}$ ce qui montre bien que T est très supérieur à la période de rotation dans le régime considéré d'Ekman petit. C'est sur cette échelle de temps que s'effectue le contrôle par la friction des écoulements géostrophiques. De façon complètement analogue on montre que la génération d'écoulement géostrophique intérieur par une tension de vent variant spatialement cause un pompage à la base de la couche d'Ekman supérieure:

$$w_E = \frac{\nabla_x \tau}{\rho_0 2\Omega}$$

de sorte que la vorticité intérieure de même signe que le rotationnel de tension de vent apparaît :

$$\frac{\partial \xi_I}{\partial t} = \frac{\nabla_x \tau}{\rho_0 H} \quad (2.2.5)$$

Pour l'écoulement quasi-géostrophique intérieur, les couches limites ont été résolues une fois pour toutes et leur effet global est d'imposer ces pompages verticaux sur l'intérieur. En équilibrant simplement forçage et dissipation entre (2.2.4) et (2.2.5) on s'attend à récupérer une réponse océanique intérieure à un forçage de vent qui soit :

$$\frac{\xi_I}{T} = \frac{\nabla_x \tau}{\rho_0 H} \quad (2.2.6)$$

Quand on considère en laboratoire un bocal cylindrique tournant rempli d'eau forcé par un disque frottant en surface à une vitesse un peu différente de la rotation de base du bocal, c'est effectivement ce type d'écoulement qui est observé. Nous allons voir que la forme du container change assez considérablement les choses dans l'océan, non pas tant dans la structure des couches d'Ekman que dans la nature de l'écoulement géostrophique intérieur. D'une façon générale l'illustration expérimentale des théories précédentes sur la couche d'Ekman elle-même est très bonne.

Points complémentaires :

- Le spin-down dans (2.2.4), ainsi que l'épaisseur de la couche limite, dépendent explicitement de ν . Aux grandes échelles océaniques, ν représente le mélange turbulent dû aux tourbillons de plus petites échelles générées probablement par instabilité de cisaillement du courant à la base de la couche d'Ekman. Pour la couche limite planétaire atmosphérique et la couche de fond océanique, le tableau ci-dessous donne les temps de spin-down dus à ce mélange turbulent.

		Océan	Atmosphère
ν	($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$)	10^{-3}	10
H	(km)	5	10
T	(jour)	100	2
$\pi(\nu/\Omega)^{1/2}$	(m)	~ 10	~ 1000

- A la différence de (2.2.4), la relation (2.2.5) de forçage océanique par le vent est indépendante de ν et paraît donc plus robuste. Il faut néanmoins se rappeler que la difficulté est simplement repoussée puis que la tension est liée à la vitesse du vent par un coefficient de traînée qui est lui-même dépendant du mélange turbulent.
- La question de la stabilité des solutions (2.1.8) a été examinée. Des expériences en laboratoire ont montré que lorsque l'amplitude du flot augmente, des ondes apparaissent sous la forme de rouleaux horizontaux dont l'espacement est lié à la profondeur de la couche limite, rouleaux qui ont une orientation déterminée par rapport à la direction de l'écoulement géostrophique. La théorie en accord substantiel avec les expériences indique que la nature des instabilités est due au cisaillement et donc à la présence de points d'inflexion dans le profil de l'écoulement de base. Voir la revue de Greenspan (1969) p. 275–288.

2.3. La forme du container

Ayant vu premièrement que le frottement reste essentiellement confiné à la surface et au fond de l'océan (le problème des frontières méridiennes va être abordé plus loin) et deuxièmement que son effet net revient à imposer des vitesses verticales sur la circulation intérieure, nous allons examiner les réponses possibles de l'intérieur à de telles distributions de vitesse verticale-sources/puits lorsque les frontières supérieures et inférieures du domaine ne sont plus perpendiculaires à $\underline{\Omega}$.

Le théorème TPP

Un écoulement intérieur géostrophique d'un fluide homogène obéit à :

$$2 \rho_0 \underline{\Omega} \times \underline{u} = - \nabla p + \underline{g} \rho_0 \quad (2.3.1)$$

Si on prend le rotationnel de (2.3.1), les termes de droite s'annulent puisque \underline{g} dérive d'un potentiel (force conservative) et l'équation de vorticité se réduit au seul terme¹⁰ :

$$(2\underline{\Omega} \cdot \nabla) \underline{u} = 0 \quad (2.3.2)$$

¹⁰ On suppose l'écoulement non divergent.

Si l'axe O_z est le long de $\underline{\Omega}$ (O_x, O_y sont dans le plan perpendiculaire à $\underline{\Omega}$), les composantes du vecteur vitesse \underline{u} obéissent à :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (a)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (b)$$
(2.3.3)

Cette relation (2.3.2 ou 2.3.3) connue sous le nom de théorème de Taylor – Proudman – Poincaré (TPP) implique que le vecteur vitesse \underline{u} est invariant dans la direction de $\underline{\Omega}$. On peut sans exagération dire que ce théorème est le pilier central sur lequel repose notre compréhension de la circulation océanique. La relation (2.3.3a) est parfois décrite comme une conséquence de l'hydrostatique (petit rapport d'aspect $\delta \ll 1$). On la voit plus correctement ici comme une conséquence de la rotation rapide (et donc de $\varepsilon \ll 1$). La différence entre ces deux interprétations est clairement illustrée lorsque $\underline{\Omega}$ n'est plus parallèle à \underline{g} : Dans ce cas c'est bien la direction de $\underline{\Omega}$ qui dicte la dynamique indépendamment de la valeur de δ .

La relation (2.3.3b) est ce qui reste de l'équation pour la composante de la vorticité selon $\underline{\Omega}$, équation qui joue un rôle fondamental dans les théories qui vont suivre. Si les frontières qui contiennent le fluide sont placées en $z = h_S(x,y)$ et $z = h_F(x,y)$ respectivement en surface et au fond, le théorème TPP impose que les vitesses verticales sont identiques et donc que :

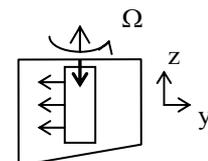
$$\underline{u} \cdot \nabla h = 0 \quad (2.3.4)$$

où $h = h_S - h_F$ est la hauteur de la colonne fluide, mesurée parallèlement à $\underline{\Omega}$. Dans cette solution libre à h constant l'écoulement refuse de monter sur la topographie. La pression qui est une fonction courant est ainsi constante le long des contours $h = \text{cte}$. La hauteur joue le rôle de la vorticité potentielle d'une quantité très importante pour la suite. La relation (2.3.4) va être mise en défaut si des forçages existent à droite bien sûr mais aussi si les contours de h sont bloqués par une frontière latérale (parallèle à $\underline{\Omega}$). Quelques exemples sont illustrés pour fixer les idées.

Cas 1 : Les surfaces supérieures et inférieures du container sont perpendiculaires à $\underline{\Omega}$. En l'absence de tout pompage d'Ekman, $w = 0$ partout. Un tel écoulement géostrophique arrivant sur un obstacle topographique sera effectivement bloqué par l'obstacle et le fluide devra contourner l'obstacle laissant une colonne (dite de Taylor) de fluide stagnant au-dessus de celui-ci dans la direction de $\underline{\Omega}$. On sent intuitivement que si l'obstacle est très petit, le fluide doit quand même pouvoir passer sur l'obstacle et la condition de formation d'une colonne de Taylor dépend bien du nombre de Rossby mais aussi de la hauteur relative de l'obstacle. (voir Huppert, 1973)

Cas 2 : Ici la surface inférieure (par exemple) n'est plus perpendiculaire à $\underline{\Omega}$.

La géométrie du cylindre coupé (sliced cylinder) largement utilisée en laboratoire, a un fond de pente constante α . Si une source ($w_s(x,y) < 0$) est imposée en surface (on ajoute de l'eau) (2.3.3b) implique que la vitesse verticale au fond $w_f = w_s$. Mais la vitesse normale au fond impose $w_f = \alpha v_f$. Comme v_f est indépendant de z d'après (2.3.3a), le fluide se déplace en bloc dans la direction des y négatifs à la vitesse :



$$v = w_s/\alpha \quad (2.3.5)$$

Cette relation est une des formes de la relation de Sverdrup¹¹. La continuité peut maintenant être invoquée pour déterminer u.

$$\frac{\partial h u}{\partial x} + \frac{\partial h v}{\partial y} = -w_s \quad (2.3.6)$$

où h(y) est la hauteur du fluide (nota dh/dy = -α). En développant 2.3.6 et en utilisant 2.3.5, on retrouve le fait que la divergence horizontale est nulle en accord avec 2.3.3b.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.3.7)$$

Comme nous allons voir, l'utilisation de (2.3.7) se heurte en fait à des difficultés liées aux conditions aux limites sur les frontières latérales que u doit aussi satisfaire. (Il paraît en effet délicat de satisfaire deux conditions aux limites avec une équation différentielle du premier ordre en x).

(i) Canal périodique en x de longueur L (ou annulus/tore)¹²

Dans cette géométrie la physique TPP impose une condition sur le forçage :

$$\int_0^L w_s dx = 0 \quad (2.3.8)$$

condition dite de Goldsbrough (un des premiers théoriciens qui a calculé la réponse océanique à des forçages de type évaporation/précipitation) et u obéit simplement à :

$$u = u_0 - \alpha^{-1} \int_0^x \frac{\partial w_s}{\partial y} dx$$

Le flot selon x est ainsi déterminé à une constante arbitraire u₀ qu'il ne paraît pas possible de déterminer avec la dynamique TPP : cette constante est une solution libre des équations TPP que l'on peut toujours ajouter, à savoir un courant constant arbitraire le long des isobathes.

(ii) Canal bloqué par des frontières en x = 0, L

L'arbitraire du courant le long des isobathes est levé par les conditions aux limites qui imposent u = 0 en x = 0 et L mais d'autres problèmes apparaissent. En effet que l'on intègre (2.3.7) depuis x = 0 ou x = L, la condition aux limites sur u « de l'autre côté » ne sera satisfaite que si la relation (2.3.7) de type Goldsbrough est également satisfaite¹³. Comme il n'y a pas de raisons évidentes que le forçage satisfasse 2.3.8, on conclut que cette condition très restrictive indique que certains des termes négligés dans (2.3.1) doivent redevenir importants le long de l'une ou l'autre frontière (voire des deux). Ce point est examiné au paragraphe 2.6.

¹¹ Le lecteur pourra se demander la relation existant avec le papier de Sverdrup de 1947, mais ceci est abordé plus loin.

¹² Le lecteur pourra aussi penser à la géométrie de l'ACC (Antarctic circumpolar current).

¹³ Il ne faut pas confondre cette relation avec le fait que le volume total doit être conservé, soit $\iint w_s dx dy = 0$.

2.4. L'établissement dans le temps des solutions TPP

Imaginons que les sources/puits précédemment imposés le soient de façon très lente de sorte que les accélérations restent petites (quoique non nulles maintenant) par rapport aux termes géostrophiques. Cette procédure garantit que les ondes d'inertie-gravité très rapides (de fréquence inférieure à 2Ω dans ce contexte) ne soient pas beaucoup excitées. Ceci veut dire que les échelles de temps des dits forçages T doivent être telles que $\Omega T \gg 1$ (où $\varepsilon_T \ll 1$ dans les notations précédentes). On suppose également que les amplitudes des mouvements restent petites de sorte qu'une linéarisation est permise ($\varepsilon \ll 1$).

L'équation pour la composante selon $\underline{\Omega}$ de la vorticité n'est plus (2.3.3b) mais (2.2.1) :

$$\frac{\partial \xi_z}{\partial t} = 2\Omega \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.4.1)$$

Sous ces hypothèses le mouvement reste proche de la géostrophie et la composante verticale de la vorticité ξ_z peut être approchée par sa valeur géostrophique $\xi_G = \frac{\nabla^2 p}{2\Omega\rho_0}$. Sous les

hypothèses précédentes les vitesses u, v (et donc p) restent à peu près indépendantes de z comme on peut le montrer en analysant les 2 équations pour les composantes de la vorticité perpendiculaire à $\underline{\Omega}$. On peut alors intégrer (2.4.1) selon z et obtenir une équation pour la pression. Choisissons comme dans le cas 2 du paragraphe 2.3 un forçage w_s en surface et une pente α au fond positive (le fond remonte dans la direction y) :

$$\frac{\partial \xi_G}{\partial t} = \frac{2\Omega}{H} (w_s - \alpha v_G) \quad (2.4.2)$$

En remplaçant ξ_G et v_G par leurs valeurs géostrophiques en fonction de la pression p , (2.4.2) devient :

$$\frac{\partial \nabla^2 p}{\partial t} + \beta \frac{\partial p}{\partial x} = \tilde{w}_s \quad (2.4.3)$$

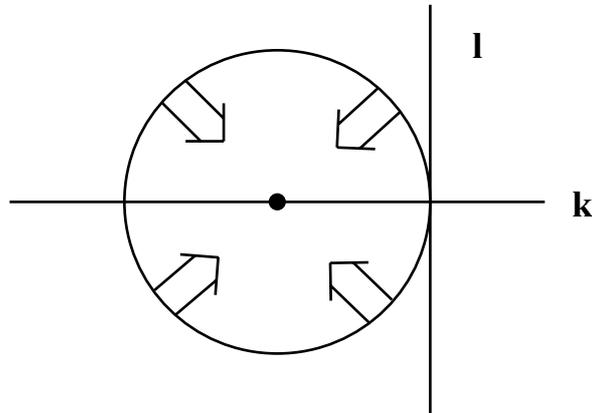
où pour des raisons d'analogie ultérieure on a posé $\beta = \frac{2\Omega\alpha}{H}$ et $\tilde{w}_s = \frac{4\Omega^2\rho_0}{H} w_s$. L'équation 2.4.3 gouverne l'évolution lente du système: les ondes d'inertie-gravité rapides ont été filtrées par l'hypothèse que la pression p reste une fonction courant à un ordre d'approximation acceptable.

(i) Le cas libre

(2.4.3) est l'équation des ondes de Rossby-Topographiques (RT), ondes parce que des solutions oscillatoires $p = \Re e(e^{ik \cdot x - \omega t})$ libres ($\tilde{w}_s = 0$) existent si la relation de dispersion suivante est satisfaite :

$$\omega = \frac{-\beta k}{k^2 + l^2}$$

où $\underline{k} = (k, \ell)$. La vitesse de phase selon Ox, ω/k , est toujours négative (c'est-à-dire laisse les petits fonds sur la droite). Le lieu de fréquence constante dans le plan k, ℓ est un cercle de centre $-\beta/2\omega$:



Pour un vecteur d'onde donné, la vitesse de groupe $\underline{C}_g = \nabla\omega = \left(\frac{\partial\omega}{\partial k}, \frac{\partial\omega}{\partial \ell} \right)$ est dirigée vers le centre du cercle (ω plus élevée). L'énergie du signal se propage rapidement (lentement) respectivement vers l'Ouest (Est) pour les nombres d'ondes dont le module $|\underline{k}|$ est respectivement plus petit ou plus grand que $\frac{\beta}{\sqrt{2}\omega}$. Ces ondes dispersives et anisotropes ont

des propriétés de réflexion étranges : supposons une onde longue incidente ($C_{gx} < 0$) sur une frontière située en $x = 0$. Comme $u = 0$ en $x = 0$, l'onde réfléchie doit avoir même fréquence et même nombre d'onde « ℓ » selon y que l'onde incidente. La figure ci-dessus montre directement que l'onde réfléchie a maintenant un nombre d'onde $k_r > k_i$. Il n'est pas difficile de voir que l'énergie cinétique de l'onde réfléchie dépasse celle de l'onde incidente dans le rapport k_r/k_i justement¹⁴. Il existe donc des possibilités de transfert d'énergie d'une composante de Fourier à une autre sous des hypothèses purement linéaires contrastant avec l'image habituelle présentée en turbulence. Ces propriétés ont été illustrées en laboratoire par Phillips et Ibbetson (1967).

(ii) Cas forcé

Si le forçage a des échelles spatiales L_F et temporelles T_F , on peut adimensionaliser \underline{x} et t dans (2.4.3) par L_F et T_F faisant apparaître $(\beta L_F)^{-1}$ comme la période des ondes RT d'échelle L_F .

$$\frac{(\beta L_F)^{-1}}{T_F} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 p + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\tilde{\omega}_s L}{\beta}$$

- Si $T_F \ll (\beta L_F)^{-1}$, la réponse est un spin-up d'Ekman classique, les ondes RT n'ayant pas le temps d'être excitées. Le terme du milieu est négligeable. (La solution en présence de friction de fond est décrite par 2.2.6).

¹⁴ Le flux d'énergie de l'onde incidente reste égal et opposé à celui de l'onde réfléchie.

- Si $T_F \sim (\beta L_F)^{-1}$, l'ajustement au forçage implique l'émergence de toute une famille d'ondes RT.
- Si $T_F \gg (\beta L_F)^{-1}$, le premier terme de gauche est négligeable et la réponse est une solution de Sverdrup de type (2.3.5).

Imaginons un problème de valeur initiale où le forçage $\tilde{w}_S(x,y)$ est allumé de façon impulsive à $t=0$ dans un canal bloqué en $x=0$, $x=L$. On va supposer un forçage périodique en y pour ramener le problème aux deux seules variables indépendantes x,t :

$$\tilde{w}_S = R_e(w_0 e^{ily}) \quad \text{avec } w_0 \text{ constant.}$$

Après adimensionalisation de x par L la largeur du bassin et de t par $(\beta L)^{-1}$, (2.4.3) devient :

$$p_{xxt} - \Lambda p_t + p_x = w_0 \frac{L}{\beta} \quad (2.4.5)$$

où $\Lambda = (1/L)^2$.

Les conditions initiales et aux frontières sont respectivement :

$$\begin{aligned} p(x,0) &= 0 \\ p(0,t) &= p(1,t) = 0 \end{aligned}$$

La solution générale de (2.4.5) n'est pas disponible mais on va s'en faire une idée lorsque $\Lambda \gg 1$. En effet on peut penser que dans ce cas le terme dispersif p_{xxt} n'est important que « près » des frontières et que donc loin de celles-ci :

$$- \Lambda p_t + p_x = w_0 \frac{L}{\beta} \quad (2.4.6)$$

Comme w_0 est constant, la solution juste après allumage du forçage est indépendante de x et vaut :

$$p = -\frac{w_0 L}{\beta \Lambda} t \quad (2.4.7)$$

C'est le spin-up d'Ekman. L'information sur l'existence des frontières est fournie par les ondes RT. Les ondes les plus rapides sont longues et ont une vitesse de groupe négative ($-\Lambda^{-1}$), elles sont donc générées en $x=1$. La solution (2.4.7) n'est valable qu'avant le passage du front d'onde c'est-à-dire pour $x-1 < \frac{-t}{\Lambda}$. Après le passage du front d'onde, la solution est la solution de Sverdrup qui satisfait la condition aux limites en $x=1$:

$$p_I = \frac{w_0 L}{\beta} (x-1) \quad (2.4.8)$$

La solution de Sverdrup intérieure p_I est donc valable « jusqu'à cette frontière » mais doit être corrigée près de l'autre frontière en $x=0$. Dès le départ un front d'ondes courtes est aussi

généralisé en $x = 0$. Ces ondes sont beaucoup plus lentes que les ondes longues (les plus rapides d'entre elles ont une vitesse de groupe de $1/8\Lambda$ obtenue pour $k = -\sqrt{3\Lambda}$). Lorsque ce front d'ondes courtes intersecte « l'intérieur », (2.4.8) n'est plus valable. Il existe une solution exacte de l'équation qui gouverne ces ondes courtes à savoir :

$$p_{xxt} + p_x = 0 \quad (2.4.9)$$

Si on introduit la variable de similarité $\eta = 2\sqrt{xt}$, (2.4.9) devient une équation différentielle ordinaire pour la variable η :

$$\eta^2 p_{\eta\eta\eta} + \eta p_{\eta\eta} + (\eta^2 - 1) p_\eta = 0$$

Si bien que p_η obéit à l'équation des fonctions de Bessel d'ordre un et donc :

$$p(\eta) = -J_0(\eta) \text{ et } -Y_0(\eta) + \text{cste}$$

Seule la solution J_0 permet de satisfaire la condition aux limites en $x = 0$:

$$p(\eta) = p_I(0) (1 - J_0(\eta)) \quad (2.4.10)$$

En multipliant par la constante $p_I(0)$ on obtient une solution oscillante en x et t qui satisfait la condition aux limites en $x = 0$ et approche p_I lentement lorsque t est grand $\sim (xt)^{-1/4}$

Si w_0 est négatif (on injecte du fluide) le flot intérieur (2.4.8) est dirigé vers les grandes profondeurs. Au voisinage de $x = 0$, ce flux retourne vers les petits fonds (puisqu'il ne peut y avoir de transport net à un y donné). La solution (2.4.10) montre que ce transport (mesuré par $p_I(0)$) apparaît entre la frontière $x = 0$ et une position x_0 qui correspond au premier zéro de J_0 , soit pour $2\sqrt{x_0 t} \cong 2.4$. Ainsi ce transport de retour se retrouve « coincé » dans un courant de bord toujours plus mince lorsque t croît : une couche limite apparaît.

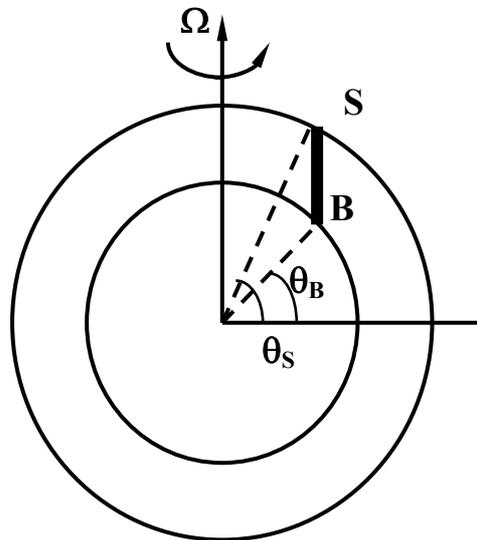
Commentaires :

- L'analyse du problème de l'établissement dans le temps de la solution de Sverdrup montre que celle-ci peut être prolongée jusqu'à la frontière amont des ondes longues RT en $x = 1$. Les équations pour u ou pour la pression peuvent être intégrées à partir de cette frontière amont.
- Au voisinage de la frontière aval des ondes RT longues, la solution oscille sur des échelles spatiales toujours plus fines. Un courant de retour apparaît dans une veine dont la largeur ne peut être déterminée que par l'ajout des termes pour l'instant négligés, non-linéarité et/ou dissipation.
- Les références sur les bases de cet ajustement sont Lighthill (1968) et Anderson-Gill (1975).

2.5. Le flot entre deux sphères concentriques

Le cas géophysique apparaît plus complexe que les exemples décrits jusqu'à présent puisque le champ de gravité terrestre est radial et n'est donc pas parallèle à Ω (sauf aux pôles).

Pourtant on remarque que la gravité n'intervient jamais dans les résultats précédents, parce que 1) nous avons supposé un fluide homogène et 2) une absence de surface libre (toit rigide à la surface). Effectivement sous ces deux hypothèses le poids du fluide par unité de volume est constant horizontalement de sorte qu'aucun déséquilibre dû à ce terme n'est introduit. On en déduit immédiatement que le théorème TPP qui implique la conservation de la hauteur de fluide mesuré parallèlement à l'axe de rotation entre le fond et la surface de l'océan reste valable.



Pour des sphères parfaitement concentriques¹⁵, cette distance h augmente des pôles vers l'équateur car la pente de la surface supérieure est toujours moindre que celle de la surface inférieure. La dynamique TPP indique donc que l'écoulement zonal (le long des parallèles) est la seule possibilité pour un écoulement non forcé. Dès lors l'analogie avec l'étude du cylindre coupé des paragraphes (2.3, 2.4) est complète si on remplace le α introduit en (2.3.5) par la différence des pentes $\alpha_S - \alpha_B$ aux points B et S de la figure ci-dessus. Si H désigne la distance radiale entre les deux sphères on voit que pour les enveloppes minces que sont l'océan et l'atmosphère ($H \ll \text{Rayon terre}$), on peut écrire :

$$h \sim \frac{H}{\sin \theta}$$

θ désignant la latitude. (La singularité de cette relation à $\theta = 0$ provient de ce que, à l'équateur, H n'est plus du tout la projection de h sur le rayon).

Ainsi l'équivalent de la relation de Sverdrup (2.3.5) produit-elle un écoulement aux moyennes latitudes dans notre océan sur la sphère vers l'équateur car le pompage d'Ekman y est négatif (Vent d'ouest $> 30^\circ$, Alizé $\theta < 30^\circ$) : un déplacement vers l'équateur à la bonne vitesse permet au pompage d'Ekman de « combler » le déficit de hauteur de colonne et d'assurer que les vitesses le long de Ω sont constantes (mais non nulles !) et que le théorème TPP est toujours vérifié. Cette dynamique est due à la rotation rapide ($\varepsilon \ll 1$) et pas du tout à la minceur des enveloppes fluides ($\delta \ll 1$) : elle est également valable pour des fluides épais, les « fat bodies » de Lighthill, et peut être aussi étendue à la région équatoriale (Schopp – Colin de Verdière 1997).

¹⁵ La forme de la terre n'est pas une sphère car la rotation a eu tendance à la déformer en la rétrécissant aux pôles et en la gonflant à l'équateur. Importante pour la géodésie, la différence (~ 20 km) entre les rayons équatoriaux et polaires est jugée sans conséquence pour la dynamique océanique.

Le développement traditionnel que nous allons présenter maintenant masque cette simplicité physique essentiellement par le choix du système de coordonnées sphériques qui n'est pas du tout naturel pour traiter de la rotation autour d'un axe fixe (qui avantage les coordonnées cylindriques). Les coordonnées sphériques sont choisies à cause de la simplicité d'expression des conditions aux limites en surface et au fond (et bien sûr aussi pour comparer avec les observations). Exprimé en coordonnées longitude ϕ , latitude θ , rayon selon la verticale z et vitesses u, v, w dans ces 3 directions, le terme de Coriolis de la relation (2.3.1) s'écrit :

$$- 2\Omega \sin \theta v + 2\Omega \cos \theta w \quad (2.5.1a)$$

$$2\Omega \sin \theta u \quad (2.5.1b)$$

$$-2\Omega \cos \theta u \quad (2.5.1c)$$

Pour des enveloppes minces $\delta \ll 1$, on voit que le deuxième terme dans (2.5.1a) est plus petit que le premier à $O\left(\frac{\delta}{\tan \theta}\right)$. Si on néglige ce terme il faut aussi négliger le terme (2.5.1c) de façon à conserver l'énergie cinétique. De sorte que pour les enveloppes minces, (2.3.1) devient en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} \rho_0 f \underline{k} \times \underline{u} &= -\nabla p \\ 0 &= -\frac{\partial p}{\partial z} - g\rho_0 \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

où $f = 2 \Omega \sin \theta$ est le paramètre de Coriolis et \underline{k} un vecteur unitaire radial. La pression, maintenant hydrostatique, implique si ρ est constant que :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (2.5.3)$$

La composante verticale de l'équation de vorticité (obtenue en éliminant p dans (2.5.2)) donne :

$$\beta v = -f \nabla_H \cdot \underline{u} = + f w_z \quad (2.5.4)$$

où $\beta = 2 \Omega \cos \theta / R_T$.

Comme l'axe z est maintenant vertical (radial) et non plus parallèle à $\underline{\Omega}$, il n'apparaît pas clairement que (2.5.3) – (2.5.4) et (2.3.3) sont en fait équivalents ! Cette équation de vorticité (2.5.4), qui indique que le flot géostrophique horizontal est « divergent » si le flot a une composante méridienne, a une importance considérable dans les théories de la circulation océanique. Le terme de droite est l'étirement (stretching) des lignes de vorticité planétaire et l'advection méridienne de vorticité planétaire apparaît en réponse à ce terme. Une première conséquence immédiate s'obtient en intégrant (2.5.4) verticalement jusqu'à la base de la couche d'Ekman supérieure.

$$\beta H v = f (w_\epsilon - w_F) \quad (2.5.5)$$

Si la vitesse verticale w_F est nulle au fond, on voit bien l'analogie entre (2.3.5) et (2.5.5), le terme β jouant le rôle de la pente α fois $2 \frac{\Omega}{H} \times \tan \theta$. S'il existe une topographie au fond qui s'écarte de la forme sphérique, (2.5.5) devient :

$$\underline{u} \cdot \nabla \left(\frac{f}{H} \right) = \frac{fw}{H^2} \epsilon \quad (2.5.6)$$

La quantité f/H est la limite grande échelle de la vorticité potentielle (vp). On retrouve ici la vp comme la projection sur la direction radiale de la hauteur de la colonne parallèle à l'axe de rotation. Si le flot est non forcé, le fluide est contraint de suivre les contours f/H (plutôt que les parallèles lorsque H est constant). La dynamique TPP rend un écoulement océanique excessivement sensible aux variations topographiques.

Commentaires additionnels :

- Les théories de la circulation océanique sont souvent formulées non pas sur la sphère mais sur un plan tangent à celle-ci à une latitude θ_0 donnée: l'axe x est orienté vers l'est, y vers le nord et z vers le haut. Il suffit d'exprimer le gradient dans ces coordonnées et d'écrire $f = f_0 + \beta_0 y$ où f_0 et β_0 sont maintenant des constantes à la latitude θ_0 . Cette approximation justifiable pour $L/R_T \ll 1$ est souvent violée quand l'objet de l'étude grande échelle n'est pas quantitatif.
- On voit qu'une pente du fond α qui remonte vers les $y > 0$ (le nord) est équivalente à un $\beta = 2 \Omega \alpha/H$. Les ondes de Rossby sur la sphère (voir 2.4 pour les ondes Rossby topographiques) ont donc une vitesse de phase vers l'ouest.
- Les références sur l'approximation traditionnelle des termes de Coriolis sont Philips, 1966 (cas moyenne latitude), Colin de Verdière – Schopp (1994) (cas équatorial).

2.6. Fermeture dissipative de la circulation forcée par le vent

Ayant montré l'analogie complète qui existe entre effet β et effet topographique, nous allons rester avec la formulation classique en sphérique et voir comment nous pouvons fermer une circulation de Sverdrup pour laquelle l'intégrale zonale du forçage n'est pas nulle. Nous avons déjà montré que le spin-up de la circulation de Sverdrup localise une couche limite seulement sur le bord ouest (frontière aval) et que la vitesse zonale u et la pression peuvent être alors déduits de la relation de Sverdrup en intégrant la continuité à partir du bord Est (frontière amont). La présence d'une couche limite ouest qui tend vers 0 lorsque $t \rightarrow \infty$ indique la fin de cette jolie théorie quasi-inviscide. En pratique les cisaillements importants générés là vont sans doute conduire à des instabilités et à la génération de mouvements tourbillonnaires complexes, les cisaillements étant verticaux au voisinage du fond ou latéraux au contact de la frontière ouest. Dans l'un ou l'autre cas, l'effet des cisaillements sera de générer de la turbulence dont les tensions de Reynolds associées auront tendance à stabiliser¹⁶ l'écoulement. Nous allons simplement paramétriser ces tensions de Reynolds en

¹⁶ Localement l'écoulement grande-échelle peut être renforcé par l'effet des tourbillons. On parlera alors de viscosité négative, un phénomène lié au processus de cascade inverse en 2 dimensions.

fonction des cisaillements moyens avec une viscosité verticale ou latérale ad hoc. Considérons pour commencer l'effet de la friction sur le fond paramétrisé avec un coefficient de mélange vertical v_T . L'effet de la couche d'Ekman sur le courant géostrophique intérieur qui en résulte a été analysé en 2.1. Un pompage d'Ekman proportionnel à la vorticité intérieure apparaît dont le signe est juste ce qu'il faut pour amortir exponentiellement la vorticité intérieure. Dans ce cas le mouvement intérieur stationnaire sur un fond plat (un sphère en fait) obéit à :

$$\beta v_I = f \frac{w_\epsilon}{H} - r \xi_i \quad (2.6.1)$$

avec r l'inverse du temps de spin down. Sur un plan β , la divergence horizontale associée avec la dynamique 2.5.4 est $O(L/R_T)$, si bien que lorsque ce rapport est petit¹⁷, la pression est approximativement une fonction courant :

$$\psi = P / \rho_0 f_0$$

de sorte que (2.6.1) devient :

$$r \nabla^2 \psi + \beta \psi_x = \frac{\rho_0 f_0^2}{H} w_\epsilon \quad (2.6.2)$$

Cette équation est celle du modèle de Stommel (1948) qui, le premier, a montré que les solutions présentaient une intensification à l'ouest sous l'effet d'une distribution symétrique des vents. La dérivation de son modèle était différente : tension de vent et termes de friction Rayleigh apparaissaient dans les équations du mouvement intérieur alors qu'ici nous avons partitionné verticalement le domaine en couches d'Ekman minces et en intérieur géostrophique et (2.6.2) ne détermine que le mouvement intérieur. Cette équation a besoin de conditions aux limites latérales mais comme il n'y a pas de friction latérale (pour l'instant), la condition aux frontières se réduit à $\underline{u} \cdot \underline{n} = 0$, \underline{n} étant la normale à la frontière. Comme \underline{u} est géostrophique, ceci se réduit à :

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = 0$$

Cette condition sera vérifiée simplement¹⁸ par :

$$\psi = 0 \quad (2.6.3)$$

L'ordre de grandeur du terme de friction dans (2.6.2) par rapport au terme β est $\epsilon_r = r/\beta L$, nombre que l'on suppose petit lorsque L , l'échelle du forçage intérieur, est utilisée pour le scaling des dérivées spatiales :

¹⁷ Cette approximation n'est pas une nécessité mais le maintien des coordonnées sphériques n'apporte pas de « physique nouvelle ».

¹⁸ Il faudra revenir sur ce point en présence d'îles et lorsque la stratification sera introduite.

$$\varepsilon_r \nabla^2 \psi + \psi_x = F \quad (2.6.4)$$

où F désigne maintenant le forçage ($= \rho_0 L f_0^2 \frac{W_\varepsilon}{\beta H}$).

On choisit par simplicité un domaine rectangulaire de frontière $x = 0$, a et $y = 0$, b . L'échelle du forçage, (le rotationnel de vent moyen), n'est pas très différente de celle des basins de sorte que a et b sont $O(1)$. Le cas classique consiste à choisir $F = + F_0 \sin \pi y/b$, $F_0 < 0$ correspondant au pompage négatif de gyres subtropicaux. On pourrait chercher une solution exacte de cette équation qu'il faudrait ensuite représenter graphiquement. Il est \hat{O} combien plus instructif de chercher une solution approchée dont les domaines de validité renseignent sur la physique de la solution. Comme $\varepsilon_r \ll 1$, le mouvement intérieur de Sverdrup obéit à :

$$\psi_I = \int_a^x F dx'$$

où la condition aux limites à l'Est a été satisfaite en accord avec la discussion sur le spin-up du régime de Sverdrup du paragraphe 2.4. Ce choix présuppose que le bord Est ne supporte pas de couches limites, ce que nous allons vérifier. La solution intérieure ψ_I ne satisfait pas la condition aux limites en $x = 0$ puisque le forçage ne satisfait pas aux conditions de Goldsbrough. Des corrections de bord doivent donc être apportées pour satisfaire cette condition aux limites dont le terme ψ_B doit tendre vers 0 dans l'intérieur.

$$\psi = \psi_I + \psi_B$$

En reportant dans (2.6.4) on obtient :

$$\varepsilon_r \nabla^2 \psi_B + \psi_{Bx} = 0 \quad (2.6.5)$$

après avoir négligé le terme $\varepsilon_r \nabla^2 \psi_I$.

Pour satisfaire la condition aux limites, les termes frictionnels doivent (re)devenir importants dans une couche limite d'épaisseur δ . Il faut donc re-adimensionaliser la coordonnée x avec $\eta = x/\delta$:

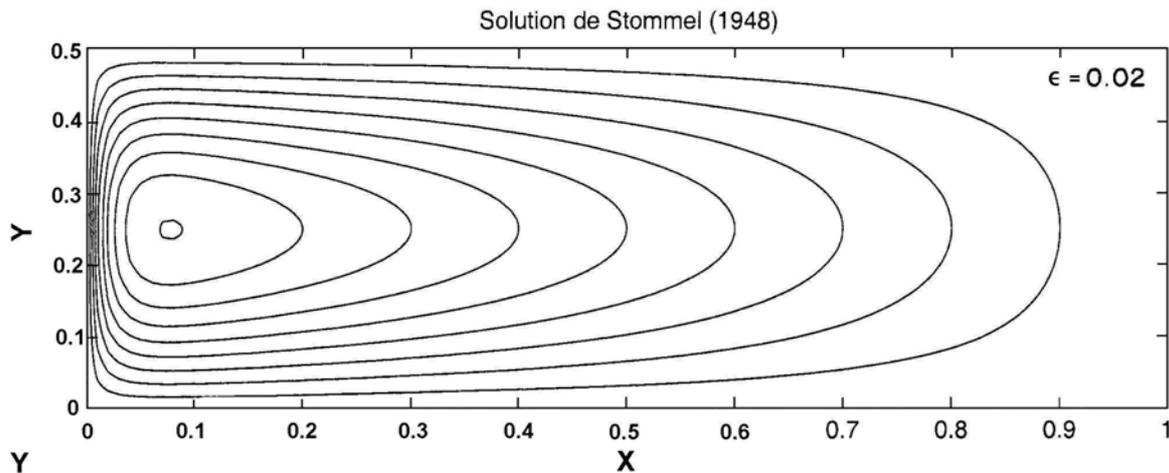
$$\frac{\varepsilon_r}{\delta} \psi_{B \eta \eta} + \varepsilon_r \delta \psi_{B yy} + \psi_{B \eta} = 0$$

L'équilibre entre le premier et troisième terme dicte l'épaisseur de la couche limite $\delta = \varepsilon_r$, alors que le deuxième terme apparaît alors négligeable à l'ordre ε_r^2 . Reste à discuter l'équation ordinaire :

$$\psi_{B \eta \eta} + \psi_{B \eta} = 0$$

dont les solutions de la forme $\psi_B = A e^{-\eta} + B$ montrent clairement la présence d'une couche limite sur le bord Ouest (et seulement sur le bord Ouest). Après considération de la condition aux limites en $\eta = 0$, la solution ψ totale s'écrit :

$$\psi = F_0(x - a) \sin \frac{\pi y}{b} \left(1 - e^{-x/\epsilon_r}\right) \quad (2.6.6)$$



Cette solution (2.6.6) montre que le flot de Sverdrup (vers le Sud pour $F_0 < 0$) retourne vers le Nord dans une couche limite de Stommel de bord Ouest, d'épaisseur r/β faible par rapport à la largeur du bassin et aux échelles de forçages. Le flot vers le Nord entraîne une tendance négative de vorticité ($-\beta v$) qui doit être équilibrée par une tendance positive. Comme la vorticité relative dans la couche limite Ouest $\partial v/\partial x$ est négative, le pompage d'Ekman au fond, qui est négatif, fournit cette tendance positive.

Dans l'image TPP, une colonne de fluide parallèle à $\underline{\Omega}$ remontant vers le Nord ne peut conserver son épaisseur que si le « fluide en excès » est éjecté dans la couche limite de fond. Une couche limite de bord Est demanderait un pompage d'Ekman de la couche limite de fond vers l'intérieur incompatible sous la dynamique TPP avec un déplacement vers le Nord.

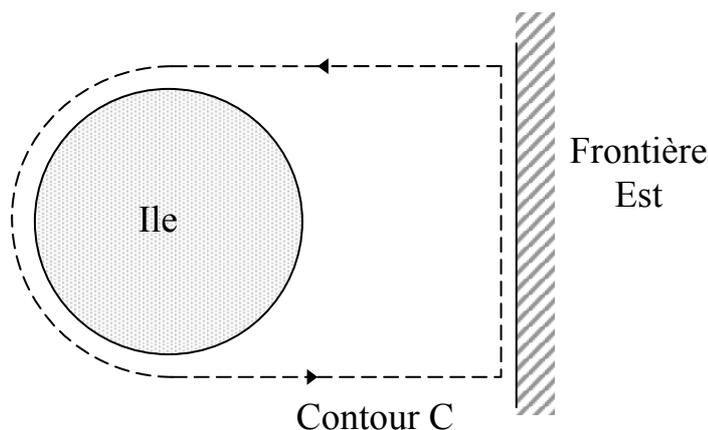
Plutôt que de s'appuyer sur la friction sur le fond pour fermer la circulation de Sverdrup, on peut s'appuyer sur la dissipation latérale paramétrisant les produits d'instabilités causés par les cisaillements horizontaux. Dans le modèle de Munk, on rajoute simplement dans l'équation (2.6.1) le terme de diffusion $A_H \nabla^2 \xi$ à la place du terme de friction sur le fond. Maintenant les vitesses normales et tangentielles doivent s'annuler sur les bords. L'analyse techniquement plus complexe procède de façon similaire, l'épaisseur de la couche limite Ouest étant $(A_H/\beta)^{1/3}$. La présence du biharmonique crée des oscillations de courant dans la direction zonale. Une couche limite de bord Est apparaît aussi mais dont le rôle mineur se borne à amener la vitesse tangentielle de Sverdrup à 0 à cette frontière (Voir Pedlosky 1987 p. 271-282).

Commentaires additionnels

- La paramétrisation des tensions de Reynolds dues aux instabilités/turbulence par une loi de diffusion classique avec un coefficient de diffusion positif est consistante avec l'existence d'une couche limite de bord Ouest. L'observation de ces courants de bord Ouest dans tous les océans renseigne ainsi indirectement sur l'aspect dissipatif des mouvements tourbillonnaires.
- La nature topographique profonde de l'effet bêta a permis de réaliser des expériences de laboratoire avec le cylindre coupé qui illustre bien la physique de ces solutions (Voir Beardsley 1969, Greenspan 1969, Colin de Verdière (1977)).
- L'introduction de la friction dans le problème du spin-up permet de limiter l'épaisseur de la couche limite transitoire qui variait en $t^{1/2}$ à une valeur finie donnée par la dissipation.
- Le cas d'une île au milieu d'un gyre a été considéré en référence à l'Australie¹⁹. Une partie de la difficulté vient de ce que la condition aux limites de vitesse normale nulle sur l'île (par exemple avec le modèle de Stommel (2.6.2)) implique seulement que ψ est une constante, mais une constante qu'il faut maintenant déterminer. L'autre partie vient de ce que la friction intérieure ne peut pas être négligée. Si on prend le produit scalaire de l'équation de la quantité de mouvement avec l'élément différentiel ds le long de la frontière et qu'on intègre autour du périmètre de l'île, les circulations des forces de pression et de Coriolis sont nulles et il reste nécessairement un équilibre entre la circulation du vent et la dissipation :

$$\oint_{\text{île}} \underline{u} \cdot \underline{ds} = \oint_{\text{île}} \underline{\tau} \cdot \underline{ds} \quad (2.6.7)$$

(Ce résultat est d'ailleurs aussi valable autour de tout contour ψ qui n'entoure pas nécessairement l'île). Il est logique de considérer que les couches limites vont se situer sur le bord Est de l'île de sorte qu'en choisissant un contour C comme sur la figure, on peut (peut-être) s'affranchir de la dissipation.



¹⁹ Une grande île pour que les hypothèses grandes échelles soient satisfaites.

La circulation autour de C de l'équation de quantité de mouvement donne alors :

$$-(f_N - f_S)\psi_I = \oint_C \tau \cdot dS$$

où ψ_I est la valeur de la fonction courant sur l'île et f_N et f_S les valeurs de paramètre de Coriolis sur les deux segments zonaux Nord et Sud du contour. Cette astuce de Godfrey, 1989 détermine ψ_I correctement (avec 75 % d'erreur) dans une grande gamme de paramètres dans les simulations numériques de Pedlosky et al 1997. Si la pression de Sverdrup présente un extremum sur le bord Est de l'île, ces auteurs montrent aussi qu'une recirculation apparaît.

- Le cas des frontières zonales (bord d'un bassin ou îles) est assez différent du cas des frontières méridiennes mais la friction doit également ré-entrer dans le problème dès lors que les vitesses méridiennes de Sverdrup sont non nulles. Plus généralement c'est le cas lorsque les frontières sont parallèles aux contours de vorticité potentielle, ici réduite à $f_0 + \beta y$. En repartant de (2.6.4), la correction frictionnelle apparaît si le fluide sélectionne une nouvelle échelle δ selon y maintenant. En introduisant la nouvelle variable $\xi = y/\delta$:

$$\frac{\varepsilon_r}{\delta^2} \psi_{B\xi\xi} + \varepsilon_r \psi_{Bxx} + \psi_{Bx} = 0$$

Le terme frictionnel redevient $O(1)$ si la largeur de la couche limite $\delta = \varepsilon_r^{1/2}$, (sensiblement plus épaisse que la couche de Stommel). Avec ce choix ψ_B obéit à une équation de diffusion de la chaleur où x joue le rôle du temps :

$$\psi_{B\xi\xi} + \psi_{Bx} = 0$$

Lorsque le temps (-x) augmente, on s'attend donc à voir une couche limite qui s'épaissit en $\sqrt{-x}$ c'est-à-dire en allant vers l'ouest.

2.7. Effets non linéaires

La physique présentée jusqu'à présent dépend de l'hypothèse d'un petit nombre de Rossby. Celle-ci peut être vérifiée facilement pour la circulation intérieure calculée précédemment. La première chose est d'estimer le pompage d'Ekman. Celui-ci (W_E) est d'ordre $\tau/\rho_0 2\Omega L$ où L est l'échelle caractéristique de variation du vent. Avec un vent de 10^{-1} N m^{-2} qui varie sur une dizaine de degrés de latitude (1000 km), $W_E \sim 7 \cdot 10^{-7} \text{ m s}^{-1} \approx 22 \text{ m/an}$. Ceci conduit à des vitesses méridiennes par la théorie de Sverdrup $V \sim O(W_E R_T/H)$ de l'ordre du mm par seconde pour $H = 4 \text{ km}$. Les vitesses zonales U obtenues par la continuité peuvent atteindre sur le bord ouest $U \sim O(V a/L)$ soit des valeurs cinq fois plus grandes que V pour un bassin de largeur $a = 5000 \text{ km}$. L'application de cette théorie donne donc des nombres de Rossby $O\left(\frac{W_E}{2\Omega H} \frac{R_T}{L} \frac{a}{L}\right)$ qui sont peu différents de 10^{-5} . Sur cette base, la théorie de Sverdrup semble solide vis-à-vis des non linéarités, les difficultés, s'il y en a, ne pouvant provenir que des couches limites de bord Ouest qui ramènent tout le transport de Sverdrup. Sur un bassin de

5 000 km, ce transport $O(Vha)$ atteint $20 \cdot 10^6 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ (20 Sverdrup). Malheureusement nous n'avons aucun moyen de connaître l'épaisseur des couches limites qui dépendent de coefficients de viscosité inconnus, la tradition étant plutôt inverse, d'estimer la viscosité par l'épaisseur observée des couches limites δ de l'ordre de 50 km. Dans ces conditions la vitesse de retour V_w prédite dans la couche limite est $O(V a/\delta) = 0,1 \text{ m s}^{-1}$. Le nombre de Rossby $\varepsilon_w = \frac{V_w}{2\Omega\delta} = \frac{w_\varepsilon}{2\Omega H} \frac{R_T a}{\delta}$ qui atteint maintenant $1.4 \cdot 10^{-2}$, est certes 1000 fois plus grand que

dans l'intérieur mais toujours assez petit. Cette estimation cache en fait une réalité plus complexe. Dans une couche limite de bord Ouest (comme dans une couche limite ordinaire sur une aile d'avion) les vitesses sont anisotropes, la vitesse méridienne le long de la frontière étant beaucoup plus grande que la vitesse zonale perpendiculaire à la frontière, une conséquence des variations spatiales lentes (rapides) dans les directions le long (perpendiculaire) à cette frontière. Pour une frontière lisse, les variations spatiales de l'écoulement le long de la frontière restent données par l'échelle L du forçage du vent. Si on estime maintenant le nombre de Rossby pour l'équation du mouvement dans la direction perpendiculaire à la frontière, le rapport du terme d'advection sur le terme de Coriolis atteint $\varepsilon_w \frac{\delta^2}{L^2}$ alors que le même rapport pour l'équation du mouvement dans la direction le long de la frontière est juste ε_w . Ceci veut dire que le flot parallèle à la frontière reste géostrophique²⁰ à une très bonne approximation améliorée de l'ordre δ^2/L^2 et on ne peut pas en dire autant évidemment de la vitesse normale. Comme l'équation qui gouverne la dynamique de Sverdrup est une équation de vorticité qui couple les deux directions, la validité de l'approximation linéaire est contrôlée par l'équation de quantité de mouvement le long de la frontière.

Le nombre de Rossby est aussi le rapport de la taille de la vorticité relative par rapport à la vorticité planétaire 2Ω mais pour l'équation de vorticité on voit qu'il faut considérer le rapport de la taille des *gradients* de vorticité relative et planétaire respectivement²¹. Le premier est mesuré par l'échelle de l'écoulement alors que le deuxième est mesuré par le rayon de la terre. La mesure M de la non-linéarité dans l'équation de vorticité est donc $\varepsilon R_T/L$ dans l'intérieur et $\varepsilon_w R_T/\delta$ dans la couche limite. Comme R_T/L est $O(5)$ dans l'intérieur, le flot reste là bien linéaire à la différence du flot de couche limite pour lequel R_T/δ atteint 100 et M devient $O(1)$. C'est la faiblesse du gradient de vorticité planétaire qui invalide l'hypothèse linéaire dans la couche limite. Dès lors que les termes non linéaires sont là, une grande variété de comportements du fluide est possible comme des instabilités de cisaillement, des équilibres multiples, des transitions vers des régimes périodiques, apériodiques toujours sous l'action d'un forçage indépendant du temps. Cette complexité découverte par les simulations numériques reste l'objet de recherches en cours. Que l'on regarde réalité ou résultats de modèles numériques, on est frappé par le fait que les tourbillons instationnaires ne sont présents qu'en sortie de la couche limite Ouest alors que l'écoulement qui rejoint la couche limite à l'entrée reste laminaire. Une explication de ce comportement peut être fournie par la contribution des termes non linéaire examinée par Charney (1955). On suppose connue un écoulement zonal intérieur (uniforme pour simplifier) et on va calculer l'évolution de ce flot en présence d'une frontière méridienne. Les ambitions sont donc très restreintes puisque seule une solution locale au voisinage de la frontière est recherchée. Le flot intérieur vers l'Ouest obéit à :

²⁰ Ceci est à la base des estimations des transports courant de bord Ouest mesurée par la différence de pression de chaque côté du jet.

²¹ Ceci a tendance à surestimer les non-linéarités car, en fait, on doit estimer $\nabla\xi$ dans la direction du flot.

$$\psi_I = + Uy \quad (U > 0)$$

et une frontière Ouest est disposée en $x = 0$. L'équation de vorticité :

$$\underline{u} \cdot \nabla \xi + \beta v = 0$$

s'écrit avec la fonction courant $\underline{u} = \underline{k} \times \nabla \psi$:

$$J(\psi, \nabla^2 \psi) + \beta \psi_x = 0 \quad (2.7.1)$$

Après adimensionalisation par une échelle L et une vitesse U intérieure, (2.7.1) devient :

$$M J(\psi, \nabla^2 \psi) + \psi_x = 0 \quad (2.7.2)$$

où $M = U/\beta L^2$ la mesure de la non-linéarité est supposée petite. ψ_I satisfait (2.7.2) mais pas la condition aux limites : $\psi = 0$ en $x = 0$.

La solution intérieure ψ_I doit donc être corrigée. Pour que les termes non linéaires redeviennent $O(1)$, le flot doit évoluer sur une échelle perpendiculaire à la frontière beaucoup plus petite que L . On ré-adimensionalise la coordonnée x (axe x normal à la frontière par $\eta = x/\delta$ et (2.7.2) devient :

$$\frac{M}{\delta^2} \left[\psi_{\eta} (\psi_{\eta\eta y} + \delta^3 \psi_{yyy}) - \psi_y (\psi_{\eta\eta\eta} + \delta \psi_{\eta yy}) \right] + \psi_{\eta} = 0 \quad (2.7.3)$$

dictant le choix $\delta = M^{1/2}$ (dimensionnellement la largeur de la couche limite est $(U/\beta)^{1/2}$, l'échelle inertielle de Charney). Après élimination des termes en δ^2 et δ^3 , on peut réécrire (2.7.3) sous la forme de l'équation d'advection pour la vorticité potentielle simplifiée $\psi_{\eta\eta} + y$:

$$J(\psi, \psi_{\eta\eta} + y) = 0 \quad (2.7.4)$$

Cette relation pour être satisfaite implique que la vorticité potentielle $\psi_{\eta\eta} + y$ soit constante sur une ligne de courant et donc que :

$$\psi_{\eta\eta} + y = F(\psi)$$

où F est une fonction à déterminer.

Lorsque $\eta \rightarrow \infty$, ψ tend vers ψ_I . Donc :

$$F(\psi_I) = y = + \psi_I$$

de sorte que F est l'identité et ψ obéit à :

$$\psi_{\eta\eta} - \psi = -\psi_I \quad (2.7.5)$$

dont la solution exprime bien une couche limite en $x = 0$

$$\psi = \psi_I (1 - e^{-x/\delta})$$

Si l'écoulement est vers l'Ouest on s'aperçoit qu'il est tout à fait possible d'établir une couche limite laminaire. Ceci est dû au fait que le signe négatif de la vorticité relative qui apparaît lorsque l'écoulement va vers le Nord est consistant avec la distribution du profil de vitesse dans la couche limite (les lignes de courant les plus internes ont rejoint la couche limite depuis des "latitudes plus sud" et ont donc gagné plus de vorticité relative négative et donc plus de vitesse que des lignes de courant plus externes).

Regardons maintenant si le fluide d'une couche limite Ouest peut rejoindre un écoulement intérieur vers l'est, $\psi_I = -Uy$, $U > 0$. Tout le raisonnement précédent reste valable bien sûr sauf que la fonctionnelle F devient une multiplication par -1 et l'équation (2.7.5) devient :

$$\psi_{\eta\eta} + \psi = \psi_I \quad (2.7.7)$$

équation qui *ne supporte plus* de solutions de couche limite en $x = 0$ et dont les variations rapides sont maintenant globales. On s'aperçoit ainsi que ce qui compte pour supporter une couche limite inertielle n'est pas la frontière Ouest ou Est mais le sens du courant intérieur²². Les variations globales impliquées par (2.7.7) sont dues physiquement au fait que seul un courant vers l'Est peut maintenir des ondes de Rossby stationnaires dont les vitesses de phases sont vers l'Ouest. Ainsi la non-linéarité permet-elle une entrée laminaire du flot de Sverdrup dans la couche limite de bord Ouest. Les sorties vers l'Est impliquent au contraire des structures tourbillonnaires qui persistent de sorte qu'on ne peut rattacher cette solution à la solution de Sverdrup dans les régimes Est. Au sortir de la couche limite, une dose massive de friction permettra de dissiper la vorticité relative (négative dans le cas d'un courant de bord Ouest orienté vers le Nord).

La solution présentée est en fait un cas local d'une solution globale de (2.7.1). Une classe de solutions "libres" inertielles ont été en effet examinées par Fofonoff (1954). La conservation de la vorticité potentielle $\nabla^2\psi + \beta y$ le long des lignes de courant ψ donnée par (2.7.1) signifie que :

$$\nabla^2\psi + \beta y = F(\psi)$$

Dans l'exemple précédent, la fonctionnelle F était déterminée par raccordement entre la couche limite et l'intérieur. Fofonoff a examiné le cas linéaire :

$$F(\psi) = -\beta/U \psi + \beta y_0$$

ψ satisfaisant maintenant :

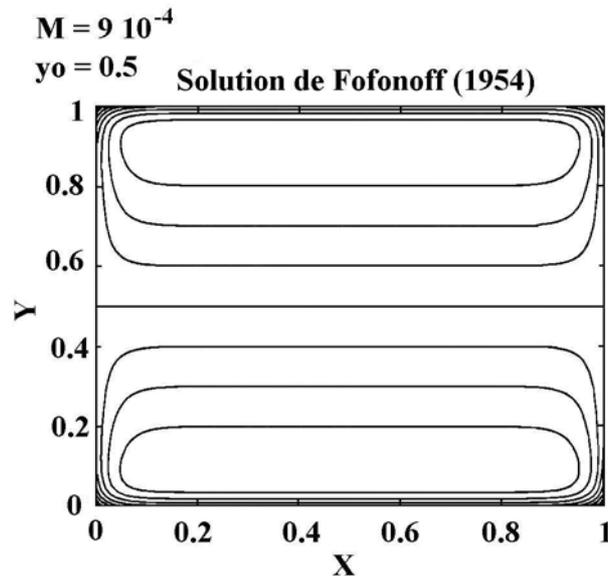
²² Il est parfaitement possible d'avoir une couche limite de bord Est qui vient joindre un flot intérieur vers l'ouest de sorte que c'est l'aspect irréversible de la dissipation qui sélectionne ultimement le bord ouest pour fermer la circulation.

$$M \nabla^2 \psi + \psi = U(y_0 - y) \quad (2.7.8)$$

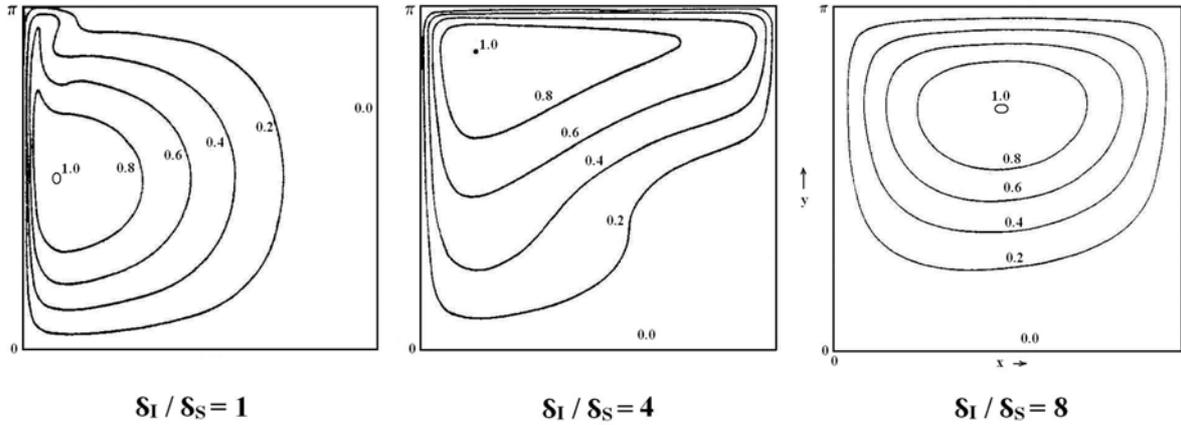
où les coordonnées spatiales ont été adimensionalisées par L la taille du bassin. On peut trouver une solution générale de cette équation satisfaisant $\psi = 0$ sur un domaine (carré par exemple $x = 0, 1$ et $y = 0, 1$) mais il est plus instructif de construire la solution approchée lorsque $M = U/\beta L^2$ est petit. Dans ce cas la solution intérieure $\psi_I = U(y_0 - y)$ est un flot zonal de vitesse U , vers l'Est ou l'Ouest selon que U est positif ou négatif. Au voisinage des frontières le terme de vorticité relative est requis pour satisfaire $\psi = 0$. Selon que U (et donc M) est positif (négatif), la nature de (2.7.8) est hyperbolique (elliptique). Dans le cas hyperbolique une infinité de solutions est possible pour lesquelles l'importance de la vorticité relative n'est pas confinée aux frontières. Pour le cas elliptique la solution intérieure est bordée de couches limites d'épaisseur $\delta = M^{1/2}$ présente sur les 4 frontières :

$$\psi = U(y_0 - y) [1 - e^{-x/\delta} - e^{-(1-x)/\delta}] - U y_0 e^{-y/\delta} - U (y_0 - 1) e^{-(1-y)/\delta}$$

Cette solution est illustrée ci-dessous. Notez que les coins ne sont pas bien traités par ces solutions de couche limite.



L'impossibilité d'une fermeture complète de la circulation, soit par le frottement, soit par la non-linéarité, implique évidemment que ces deux ingrédients doivent être considérés ensemble, l'effet non linéaire (frictionnel) étant dominant dans les régions d'entrée (sortie) respectivement. Ce cas mixte est d'une grande complexité technique d'une part et, d'autre part, les solutions obtenues numériquement montrent une grande diversité du fait de leur sensibilité à la nature de frottement (sur le fond ou latéral) et du choix de la condition aux limites dans le cas du frottement latéral, glissement (tension nulle, vorticité relative nulle) ou non-glissement. Une revue récente est fournie par Pedlosky 1996, pp. 50-91 dont nous reprenons ici quelques éléments. La majorité des efforts se sont focalisés sur le cas d'un seul gyre dans un bassin carré forcé par un pompage d'Ekman négatif. Initialement Bryan (1963) et Veronis (1966) considèrent respectivement un frottement latéral (non-glissement) et un frottement sur le fond et étudient l'allure de la solution lorsque l'amplitude du forçage augmente. Bien entendu la grille du modèle doit résoudre les couches limites latérales dues au frottement sur le fond (δ_s), à la friction latérale (δ_M) et à la non-linéarité (δ_l).



La nouveauté de ces solutions provient du régime où δ_I atteint puis dépasse $O(\delta_S, \delta_M)$. Les calculs montrent que la symétrie Nord-Sud est brisée et qu'une intensification dans le coin Nord Ouest du gyre apparaît dès que δ_I excède δ_S ou δ_M . Lorsque Veronis augmente encore ce paramètre, une couche limite sur le mur nord apparaît puis quand δ_I/δ_S atteint 8, on observe essentiellement un mode de Fofonoff. C'est ce qu'on appelle la cascade inertielle (inertial runaway). La friction en sortie de couche limite devient incapable de dissiper localement la vorticité relative négative injectée dans la couche limite de bord Ouest. Cette vorticité apparaît donc sur le mur Nord puis quand elle atteint le mur Est, le flot vers le Sud se décharge progressivement de cette vorticité relative et rejoint l'intérieur. On parle alors d'une résonance avec le mode de Fofonoff. Dans ce cas la solution de Sverdrup intérieure n'est plus du tout une bonne solution car elle a été complètement contaminée par l'éjection de vorticité relative hors de la couche limite de bord Ouest. On peut estimer l'ordre de grandeur de la nouvelle circulation intérieure U_I par rapport à l'amplitude de la circulation de Sverdrup U_S dans cet "inertial runaway". Premièrement l'équilibre intégral forçage/dissipation (2.6.7) implique que la vitesse tangentielle v_i le long des murs obéit à :

$$\beta U_S \sim r \frac{v_i}{L}$$

où L est la taille du bassin. Mais la conservation de la masse dans la couche limite inertielle indique que v_i est aussi $O(U_I L / \delta_I)$. La combinaison des deux nous donne :

$$\frac{U_I}{U_S} = \frac{\delta_I}{\delta_S}$$

invalidant la solution de Sverdrup intérieure dans le régime inertiel. L'évolution des solutions en présence de friction latérale a été étudiée par Bryan (1969), Boning (1986), Ierley et Sheremet (1995). Les résultats dépendent fortement de la nature de la condition aux limites.

Pour des conditions de glissement (slip), une zone de recirculation apparaît dans le coin nord ouest lorsque $\delta_I/\delta_M = 1$, zone dans laquelle la vorticité potentielle est relativement uniforme²³ (Böning 1986). Lorsque le forçage augmente, Ierley and Sheremet montre que des solutions multiples existent pour δ_I/δ_M légèrement supérieur à un. Pour le même forçage on obtient deux solutions à recirculation plus ou moins étendues et une solution très intense du type inertial runaway à la Fofonoff. Si l'on augmente encore l'amplitude, seule la dernière persiste. Le cas du non-glissement est numériquement plus difficile puisqu'il faut bien résoudre la sous-couche de Munk (δ_M) sur laquelle la vitesse tangentielle est mise à zéro. Pour des $\delta_I/\delta_M \sim O(1)$, Bryan (1963) montre des solutions avec recirculation dans le coin nord ouest et des oscillations amorties vers l'Est qui ne sont rien d'autre que des ondes de Rossby stationnaires dans un courant vers l'Est. Avec des forçages plus grands il semble difficile d'obtenir une solution à l'équilibre : des instabilités apparaissent pour créer une turbulence géostrophique.

En conclusion, il apparaît que le choix des conditions à la paroi et du frottement (latéral ou sur le fond) dicte des solutions qui dépendent beaucoup trop fortement de ces choix. Compte tenu de notre méconnaissance de la friction à ces échelles, la sagesse conventionnelle qui consiste à la diminuer au maximum conduit à une résonance vers le mode de Fofonoff (inertial runaway) pour lequel la solution intérieure de Sverdrup n'est plus valable. Cette situation peu enviable incite à se tourner vers l'addition d'autres ingrédients dans le problème. On ne voit pas bien en effet l'intérêt de poursuivre dans une voie où la paramétrisation des petites échelles semble cruciale sans avoir inclus la source essentielle de ces petites échelles à savoir les instabilités barotropes et baroclines.

2.8. Stabilité de la circulation

Il est apparent que certaines simulations numériques effectuées par une marche dans le temps des équations avec un vent indépendant du temps ne convergent pas vers un équilibre stationnaire même après un temps considérable d'intégration. Une forme de turbulence 2D apparaît qui se superpose à la circulation moyennée dans le temps et un équilibre s'établit au sens statistique cette fois (lorsque les moyennes et variances des courants n'évoluent plus). Cette situation n'est pas surprenante si on regarde l'océan pour lequel, aux moyennes latitudes, l'énergie cinétique turbulente est de plusieurs ordres de grandeur supérieure à l'énergie moyenne. Il nous faut tenir compte de cette dualité et comprendre les relations d'échange entre circulation moyenne et turbulence. La première étape dans cette direction est de considérer la stabilité d'un écoulement donné.

Techniquement on ajoute une perturbation arbitraire à l'écoulement donné et on déduit une équation pour les perturbations dans laquelle les termes quadratiques, cubiques etc... en amplitude des perturbations sont négligées et on parle alors de stabilité linéaire (puisque l'équation obtenue pour les perturbations est effectivement linéaire).

Le problème qui nous intéresse ici a été étudié pour la première fois par Rayleigh dans le contexte d'un écoulement parallèle, plan et cisailé.

²³ Cette homogénéité de v_p dans des régions à forte recirculation est un des thèmes importants de la circulation en fluide stratifié.

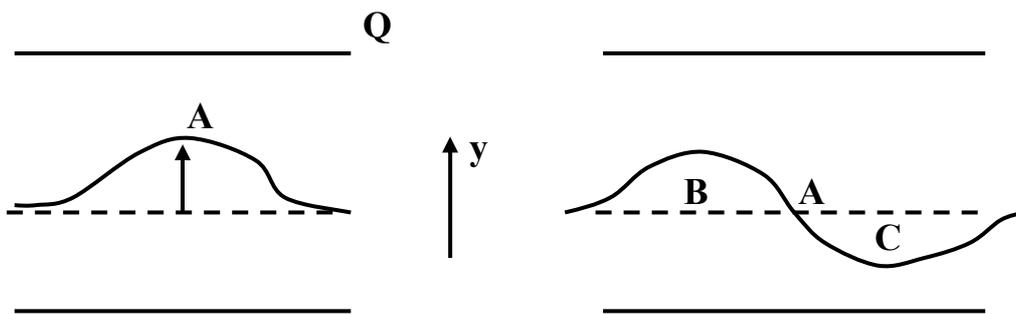
L'écoulement de base obéit ici à :

$$J(\psi, Q) = F + D \quad (2.8.1)$$

où Q la vorticité est $\nabla^2\psi + \beta y$, F le forçage stationnaire et D la dissipation. L'ajout d'une perturbation (ψ', q') à cet écoulement de base obéit à l'équation linéarisée :

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + J(\psi, q') + J(\psi', Q) = 0 \quad (2.8.2)$$

Où q' est simplement $\nabla^2\psi'$ ²⁴. On remarque en particulier que le forçage stationnaire a disparu. La dissipation a été omise de 2.8.2 parce que généralement la première analyse est d'isoler la nature physique des instabilités qui sont indépendantes de la dissipation. Le deuxième terme représente l'advection des perturbations par l'écoulement moyen de sorte qu'une instabilité, s'il y a, ne peut venir que du troisième terme, l'advection de la vp moyenne par les perturbations. Imaginons un écoulement parallèle à la Rayleigh où dQ/dy est positif (par exemple).



Imaginons qu'une perturbation a déformé le contour Q comme sur la figure. Au point A , l'anomalie de $vp q'$ est négative. Cette anomalie induit des perturbations de vitesse respectivement positive (négative) sur la gauche (droite de A) qui déforment à leur tour le contour Q .

En B et C apparaissent des vp respectivement positives et négatives qui se combinent pour créer en A une vitesse négative opposée au déplacement perturbé initial : le système a l'air stable puisque la particule A est ramenée vers sa position d'équilibre. Le raisonnement est indépendant du signe de $\frac{dQ}{dy}$. Imaginons maintenant la situation d'un extremum de Q (un

minimum par exemple). La particule A déplacée vers les $y > 0$ acquiert encore une vp négative qui déplace B et C comme précédemment. Si les vitesses induites par B rappellent toujours A vers sa position d'équilibre, il n'en est plus de même en C qui a acquis aussi de la vp négative et dont les vitesses associées repoussent A de sa position d'équilibre. Comme on ne sait pas qui l'emportera de B ou de C , on ne peut conclure à la stabilité... Cette description est confirmée par le théorème de Rayleigh (Appendice 1) qui stipule qu'une condition

²⁴ Cette formulation en vorticité potentielle est adoptée car elle inclut les effets topographiques éventuels

nécessaire d'instabilité est l'existence de points d'inflexion (et donc d'extremum de la vorticité) dans l'écoulement. Ceci se transpose directement ici en l'existence de zéro du gradient de $v_p \frac{dQ}{dy}$. A l'inverse, l'absence de zéro est une condition suffisante de stabilité. La condition nécessaire d'instabilité pour un courant zonal est donc :

$$\beta - U_{yy} = 0 \quad (2.8.3.)$$

à une latitude y où l'on voit immédiatement que β est un effet stabilisant sur l'écoulement.

Si L désigne l'échelle méridienne de variation du courant, on peut s'attendre à une telle instabilité si L est plus petit que l'échelle inertielle $\left(\frac{U}{\beta}\right)^{1/2}$. Celles-ci sont donc peu probables

pour la solution de Sverdrup intérieure. Près des frontières où au contraire il semble que ce soit justement cette échelle inertielle qui gère la largeur des couches limites, on peut certes penser à une déstabilisation possible de l'écoulement, mais il ne faut pas oublier que le résultat précédent s'applique à un écoulement parallèle et non pas à un gyre. Le cas du gyre (écoulement non parallèle) est un bon exemple d'application du théorème d'Arnold (Appendice 1). Supposons qu'il existe une relation fonctionnelle entre Q et ψ pour l'écoulement moyen. Il est possible de montrer (Pedlosky, 1987, p. 617-623) qu'une condition suffisante de stabilité est que $\frac{dQ}{d\Psi} > 0$ avec dans le cas contraire une instabilité possible. Ce

théorème généralise le théorème de Rayleigh. Il montre immédiatement que le flot inertiel de Fofonoff lorsque l'écoulement intérieur est vers l'Ouest est linéairement stable dans tout le domaine, un résultat exceptionnel. Il faut garder à l'esprit qu'une des hypothèses fortes derrière ce résultat est la conservation de v_p pour l'écoulement moyen et qu'il ne s'appliquera donc pas si forçage et dissipation sont présents...

Dans toute instabilité la source d'énergie provient d'une forme d'énergie (cinétique, potentielle ou élastique) associée au flot moyen. Ici, dans ces circulations en apesanteur d'un fluide incompressible, la seule énergie disponible est l'énergie cinétique. Si on compare l'énergie cinétique de 2 profils de courants dans un canal par exemple (frontière y_1 et y_2), qui possèdent la même quantité de mouvement $\int_{y_1}^{y_2} U dy$, il est évident que celui qui présente les

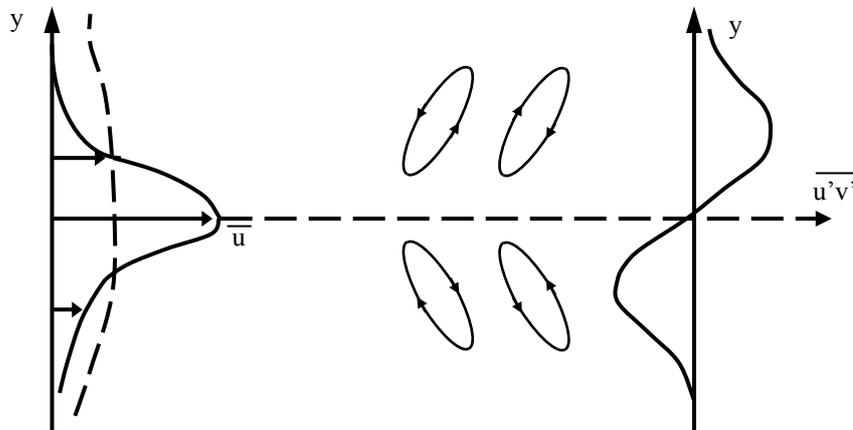
plus forts cisaillements possède le plus d'énergie cinétique $\frac{1}{2} \int_{y_1}^{y_2} U^2 dy$. Les perturbations qui se nourrissent de cette énergie cinétique la consomment. Quand l'énergie cinétique du flot moyen diminue, le profil du courant moyen se lisse et les conditions d'instabilité disparaissent : l'effet net des perturbations est globalement de ramener le système vers la stabilité. Cette évolution des perturbations à amplitude finie et le calcul de leur effet sur le courant moyen relève d'analyses non linéaires de stabilité. Plus prosaïquement, on peut suivre ces évolutions dans une simulation numérique par exemple en partitionnant les vitesses en moyenne et perturbations.

Dans le cas du canal zonal périodique en x (avec frontière en y_1 et y_2), la moyenne naturelle est la moyenne zonale selon la coordonnée x (notée par une barre supérieure). L'équation pour la quantité de mouvement zonale \bar{u} peut s'écrire :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - f \bar{v} = - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} \quad (2.8.4)$$

Dans ce contexte, les vitesses perturbées doivent développer une corrélation nette de façon à faire apparaître des tensions de Reynolds $\overline{u'v'}$ dont la divergence influe sur le courant moyen. En multipliant 2.8.4 par \bar{U} et en intégrant sur la largeur du canal le taux de changement de l'énergie cinétique moyenne par les perturbations est mesurée par le terme :

$$\int_{y^1}^{y^2} \overline{u'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} dy = - \int_{y^1}^{y^2} \bar{u} \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} dy$$



Sur le dessin ci-dessus, les tourbillons instables à droite créent une divergence du transport de quantité de mouvement au centre du jet et donc le ralentissent. Assez loin de l'axe du jet, on s'attend à avoir des tourbillons faibles de sorte que $\overline{u'v'} \sim 0$ et donc dans la région intermédiaire il y a convergence du transport, le flot moyen accélère : la quantité de mouvement moyenne est redistribuée par les tourbillons du centre du jet vers les bords, le flot moyen est lissé et l'énergie cinétique moyenne chute. Par contre, les perturbations n'influent pas sur la quantité de mouvement totale $\int_{y^1}^{y^2} \bar{u} dy$ puisque les effets non linéaires des tourbillons n'apparaissent que via la divergence des tensions de Reynolds dont l'intégrale est nulle. On remarquera que les flux turbulents sont opposés au gradient moyen de \bar{u} (ils sont down-gradient) finalement comme les flux dus aux mouvements moléculaires responsables de la diffusion intrinsèque. L'effet de tels flux turbulents est paramétrisé lorsque la grille du modèle que l'on considère ne permet pas la représentation explicite des tourbillons instables et fréquemment en analogie avec la diffusion moléculaire on écrit une relation du type:

$$\overline{u'v'} = - \nu_T \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$$

où ν_T viscosité turbulente n'est plus une caractéristique physique de l'eau mais de l'écoulement. Compte tenu de l'analogie ci-dessus, ν_T est positif. Si on poursuit cette analogie, la viscosité moléculaire est le produit d'un libre parcours moyen et de la vitesse typique moléculaire, alors ν_T pourrait être, très grossièrement, évalué par le produit entre la

taille des tourbillons et de leur vitesse. Bien entendu, ce type de paramétrisation n'a pas de raison particulière d'être très bonne et on peut seulement espérer que les résultats du modèle n'en dépendent pas trop violemment. Starr (1966) dans son livre « Physics of negative Phenomena » cite beaucoup d'exemples pour des fluides quasi 2D où la viscosité est en fait négative. Cela veut dire que les tourbillons transfèrent leur énergie au courant moyen (il suffit d'invertir la position des tourbillons de la figure entre le haut et le bas). Dans ce cas, on parle de rectification, un processus qui demande bien sûr une autre source d'énergie pour les tourbillons que l'instabilité de cisaillement juste décrite.

2.9 L'approximation du toit rigide

Nous avons considéré depuis le début que la surface supérieure de l'océan pouvait être assimilée à une plaque rigide indéformable, capable de supporter des différences de pression et des différences de vitesse (normale). C'est sous cette hypothèse que nous avons pu déduire que la circulation océanique en fluide homogène était en état d'apesanteur.

A une surface libre d'équation $z = \eta(x, y, t)$ nous devons avoir continuité de la pression et continuité de la vitesse normale. Si les mouvements du fluide supérieur, l'atmosphère, sont négligés, les conditions deviennent en $z = \eta$:

$$p = \text{cste} \quad (2.9.1.a)$$

$$w = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \underline{u}_H \nabla \eta \quad (2.9.1.b)$$

Comme nous l'avons vu, la pression peut être considérée hydrostatique pour les mouvements de grande échelle horizontale ($\delta = H/L \ll 1$), et ceci d'ailleurs indépendamment de la fréquence du phénomène. Les équations en eau peu profonde (shallow water) basées sur cette approximation ont été trouvées par Laplace²⁵ (1776) pour étudier les marées (considérées comme un phénomène de haute fréquence, le régime « inertiel », par rapport à la circulation océanique de fréquence sub-inertielle). Nous avons vu également lorsque $\underline{\Omega}$ est parallèle à \underline{g} que la pression hydrostatique est également la conséquence d'une rotation rapide ($\varepsilon = U/2\Omega L \ll 1$). Pour la circulation océanique sur la sphère terrestre, on voit qu'il y a donc deux raisons indépendantes ($\delta \ll 1, \varepsilon \ll 1$) pour que la pression soit hydrostatique hormis les problèmes de direction entre $\underline{\Omega}$ et \underline{g} . On peut montrer théoriquement que ces derniers n'interviennent que dans une mince bande équatoriale non hydrostatique dans la limite de rotation rapide ($\varepsilon \ll 1, \varepsilon \ll \delta$). Il n'y a pas pour l'instant de données expérimentales montrant que ce régime apparaît dans l'océan.

En conséquence, l'hypothèse de pression hydrostatique est généralement faite dans la plupart des modèles de circulation océanique. La pression exercée par le « toit rigide » sur le fluide est maintenant remplacée par $\rho g \eta$ soit le poids (par unité de volume) de la colonne « au-dessus » d'un point considéré. Le gradient horizontal de pression $\rho g \nabla \eta$ est ainsi lié à l'existence d'ondulations de la surface libre et en fluide homogène est indépendant de la

²⁵ Ces équations incluaient déjà les termes de Coriolis...

profondeur. Il est facile de modifier notre théorie de la circulation océanique pour tenir compte de la condition aux limites sur w . Comme sous la dynamique TPP, les mouvements libres conservent la vorticité potentielle approchée en sphérique f/H (voir équation 2.5.6), et que la surface libre n'est autre qu'une topographie, le fluide conserve maintenant la nouvelle vp $f/(\eta + H)$. Les ondulations de la surface libre $\eta = O(UL f/g)$ estimées géostrophiquement sont de l'ordre de la dizaine de centimètres ($U = 1 \text{ cm s}^{-1}$, $L = 1000 \text{ km}$) et atteignent un maximum d'environ 1 m à travers le Gulf Stream. Compte tenu de la topographie du fond, cet effet est donc complètement négligeable.

Si on relâche maintenant la dynamique TPP, en ré-introduisant les termes liés à la vorticité relative, la vp peut être approchée compte tenu de la petitesse de η/H par :

$$Q = (f + \xi)/(H + \eta) \approx H^{-1} (f + \xi - f\eta/H) \quad (2.9.2)$$

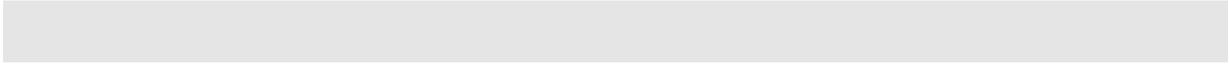
où les termes produits $\xi\eta$ ont été négligés. Notre analyse précédente nous faisait négliger le terme $f\eta/H$ devant le gros terme f mais la situation est très différente car nous devons comparer ξ et $f\eta/H$ et pour les mouvements quasi-géostrophiques la vorticité relative est elle-même petite par rapport à f . Comme pour ces mouvements QG, la « pression » $g\eta/f$ est une fonction courant, on peut écrire :

$$\xi - f\eta/H \approx g/f (\nabla^2 \eta - \eta/R_e^2) \quad (2.9.3)$$

où R_e le rayon externe de déformation $(gH)^{1/2}/f$ représente la distance parcourue par une onde externe de gravité pendant une période d'inertie. Sous cette forme, on voit tout de suite que le terme d'étirement des lignes de vorticité planétaire par la surface libre est négligeable si l'échelle L du mouvement est inférieure à ce rayon externe. Comme R_e est de l'ordre de 2000 km aux moyennes latitudes, la création de vorticité relative par les ondulations de la surface libre est souvent négligée en remplaçant 2-7-1b par la condition du toit rigide :

$$w = 0 \quad (2.9.4)$$

(2.9.4) signifie que le terme $D_H \eta / Dt$ est plus petit que w à l'ordre L^2 / R_e^2 . Cette condition n'implique donc rien sur un éventuel équilibre de termes de façon à ce que $\frac{\partial \eta}{\partial t} + \underline{u}_H \cdot \nabla \eta = 0$.



III. Effet de la stratification en densité sur la circulation océanique

3.1 Introduction

Les distributions de température, salinité et densité sur la section méridienne illustrent plusieurs points.

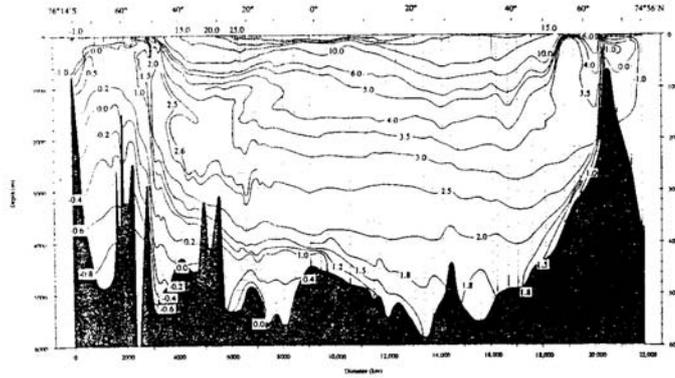


Fig. 5a. Potential temperature (°C) on the north-south section.

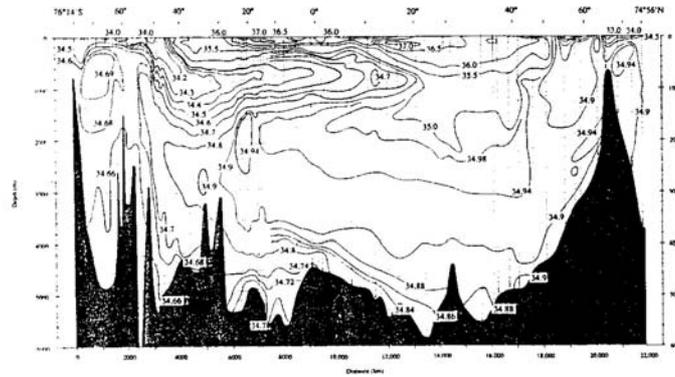


Fig. 5b. Salinity on the north-south section.

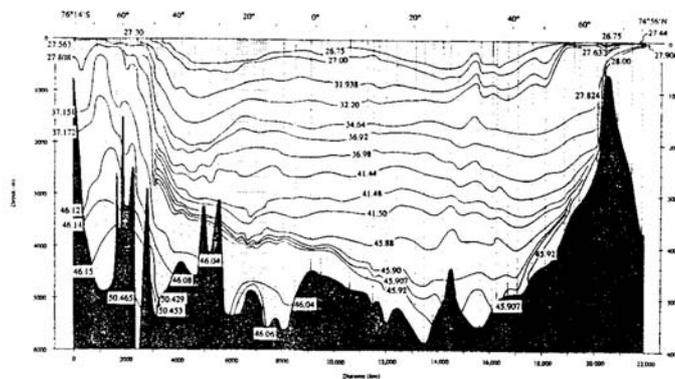


Fig. 5c. Potential density ($\sigma_0 - \sigma_4$) in the north-south section.

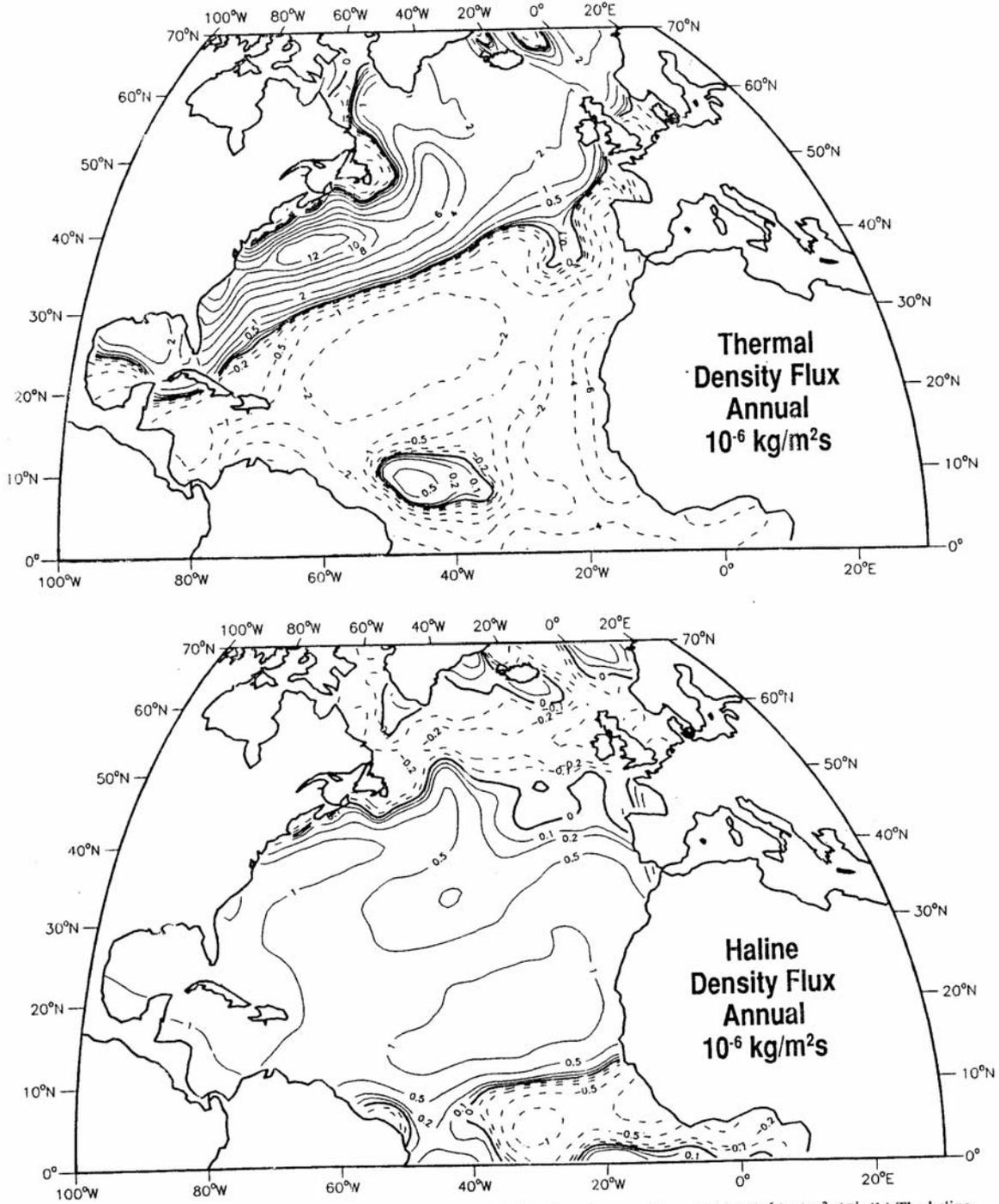


FIG. 5. (a) The thermal contribution to the annual average density flux into the ocean ($-\rho\alpha F_T$) in $10^{-6} \text{ kg (m}^2 \text{ s)}^{-1}$. (b) The haline contribution to the annual average density flux into the ocean ($\rho\beta F_S$) in $10^{-6} \text{ kg (m}^2 \text{ s)}^{-1}$.

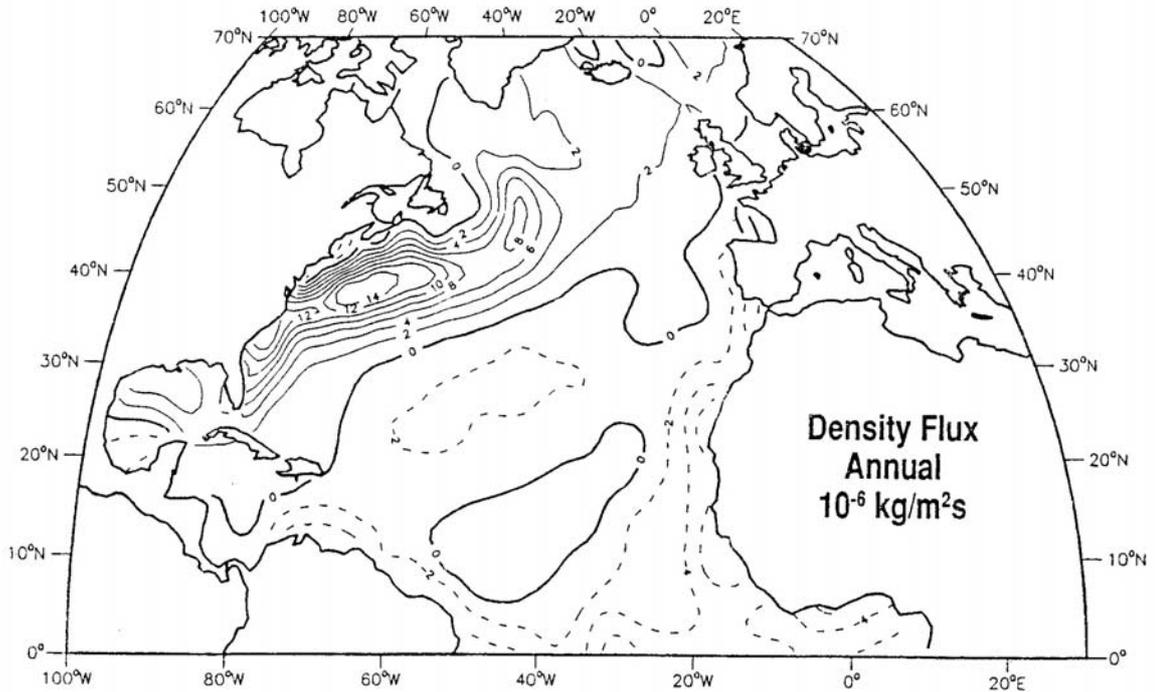


FIG. 4. The annual average density flux into the ocean in $10^{-6} \text{ kg (m}^2 \text{ s}^{-1})^{-1}$.

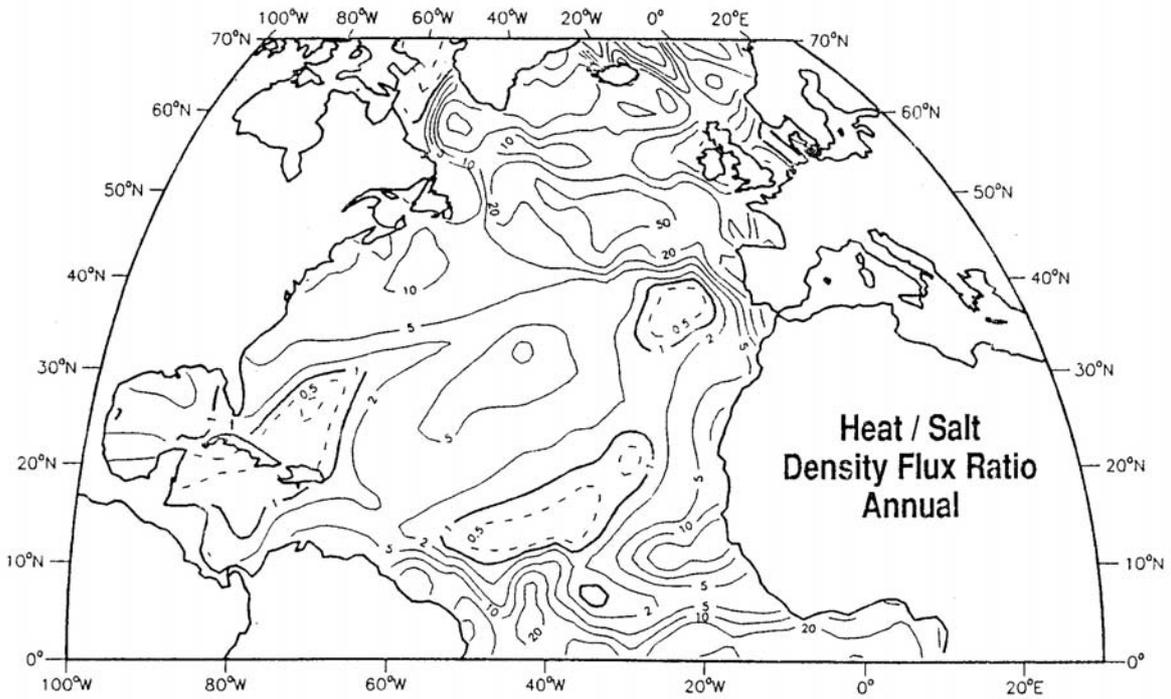


FIG. 5. (Continued) (c) The absolute value of the ratio of the heat and salt density fluxes, $|\alpha F_T / \beta F_S|$.

Les températures de surface élevées dans les tropiques, basses dans les régions polaires sont la manifestation de l'existence de flux de chaleur à la surface air-mer, positifs dans les tropiques (gain pour l'océan), négatifs dans les régions polaires (pertes pour l'océan).

Ces flux sont le résultat de l'addition des flux solaires incidents Q_S , des flux infrarouges émis par la surface de la mer (loi de Stefan-Boltzmann), des flux turbulents Q_T causés par les différences de température entre la mer et l'air (appelés flux de chaleur sensible) et des flux liés à l'évaporation (si l'humidité de l'air est inférieure à l'humidité saturante à la température de la mer, l'évaporation se déclenche et un refroidissement apparaît). On écrira :

$$Q = Q_S - \sigma T^4 + Q_T - LE$$

où E est l'évaporation ($\text{kg m}^{-2} \text{s}^{-1}$), L la chaleur latente $L = 2.5 \cdot 10^6 \text{ J Kg}^{-1}$, $\sigma = 5.7 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$

Les pertes de chaleur (net $Q < 0$) indiquée sur la figure sont paradoxalement intensifiées sur l'ouest du bassin plutôt que dans les régions polaires. Compte tenu de l'intensification à l'Ouest de la circulation du gyre subtropical déjà mentionnée, le Gulf Stream en apparaît comme le responsable : Les eaux chaudes venant des tropiques sont soumises à évaporation et perdent leur chaleur localement au large des côtes américaines (chaleur qui est un des moteurs de la cyclogenèse dans l'atmosphère). Vu comme un forçage de la circulation océanique, on s'aperçoit que ce flux de chaleur fait donc lui-même partie intégrante de la solution cherchée. Si on considère maintenant les écarts à l'équilibre, les flux infrarouges et de chaleur sensible, ont un effet net qui a toujours tendance à éliminer une anomalie de SST. En effet, si une anomalie positive de SST (écart à une moyenne climatologique par exemple) apparaît quelque part, un flux de chaleur vers l'atmosphère se met en route de sorte qu'une anomalie négative du flux de chaleur amortit l'anomalie (feedback négatif).

La salinité, l'autre composant ayant une action sur la densité, répond aux flux d'eau douce évaporation-précipitation (figure) qui présente la même intensification à l'ouest. La cause en est les vents d'Ouest froids d'origine continentale qui se chargent en humidité sur le Gulf Stream. On peut rappeler que Goldsbrough avait proposé une explication de l'intensification à l'ouest de la circulation océanique sur la base de cette intensification observée du forçage pour les flux d'eau-douce mais comme nous l'avons vu, les raisons de l'intensification sont d'abord dynamiques et le forçage air - mer n'en est qu'une conséquence. A grande échelle les fortes (faibles) salinités des régions subtropicales (polaires) sont le résultat d'excès d'évaporation (précipitation). A la différence de ce qui se passe pour les flux de chaleur, les anomalies de salinité n'ont par contre aucun effet sur les flux E-P. Cette différence de comportement des anomalies de T et S est une cause possible de variabilité intrinsèque du système climatique (voir paragraphe 4.6).

Flux de chaleur et d'évaporation/précipitation n'ont un effet sur la circulation océanique que s'ils influent sur la densité. On parle assez souvent de flottabilité (buoyancy) plutôt que de densité reliée à celle-ci par :

$$b = - \frac{g\rho}{\rho_0}$$

où ρ_0 est une densité de référence. Si l'équation d'état à la surface s'écrit :

$$\rho = \rho_0 [1 - \alpha_s (T - T_0) + \beta_s (S - S_0)]$$

où α_s et β_s sont les coefficients d'expansion thermique et haline en surface on voit que le flux de flottabilité de surface B_S devient :

$$B_S = g\alpha_s Q - g\beta_s (E-P)$$

La figure montre que généralement, le flux de chaleur dépasse le flux E-P dans son effet sur la flottabilité d'un facteur 2 (à voir), un facteur que l'on retrouve dans l'effet sur la densité des distributions de T et S. Il faut noter de plus que les flux de chaleur et sel s'opposent dans leur effet sur la densité puisque les uns créent des eaux denses aux pôles et les autres à l'équateur.

Ce flux de flottabilité B_S qui varie dans l'espace demande une circulation océanique : en effet, sous l'effet de ce flux des eaux denses (légères) sont créées dans les régions subpolaires (subtropicales). Ces variations de densité créent des anomalies de pression positives (négatives) dans les régions subtropicales (subpolaires) en surface. En effet comme la masse est conservée, une diminution de ρ implique une augmentation du volume et donc une élévation de la surface libre $\delta h/h = -\delta\rho/\rho$ et inversement dans les régions subpolaires²⁶. Il se crée donc un gradient de pression vers le pôle en surface. Ceci va accélérer le fluide dans la même direction, accélération qui va être contrée par l'effet de la rotation qui aura tendance à dévier le fluide vers l'Est. Si on descend en profondeur, la relation hydrostatique montre que le gradient de densité vers le pôle va affaiblir régulièrement le gradient de pression méridien et le renverser à une certaine profondeur de compensation. Le gradient de pression dirigé maintenant vers l'équateur force le fluide dense de l'équateur vers les pôles. Cette circulation dite « thermohaline » a pour objet de combler les déficits de chaleur et de sel des régions polaires par des transports nets horizontaux de ces quantités. Typiquement, l'intensité de cette boucle de convection océanique à grande échelle est de l'ordre de la quinzaine de Sverdrups dans l'Atlantique. Si on considère un bassin océanique fermé et que les flux de masse perdus en surface (E-P) sont négligés, l'intégrale zonale du transport méridien a travers le bassin s'annule :

$$\int_{\text{Ouest}}^{\text{Est}} \int_{\text{Fond}}^{\text{Surface}} \rho v \, dx \, dz = 0$$

de sorte que 15 Sv vont vers le pôle et 15 Sv dessous vers l'équateur. On doit se préoccuper du devenir de ces 15 Sv horizontaux lorsqu'on s'approche de la frontière Nord du bassin. Comme le refroidissement de surface se fait plus intense, la colonne d'eau se trouve déstabilisée au sens de la convection de Rayleigh-Bénard puisque le fluide lourd se trouve en surface. Des cellules de convection apparaissent (à très grand nombre de Rayleigh) dont l'effet net est de mélanger le fluide verticalement. La source d'énergie est ici le flux d'énergie potentielle alimentée par le forçage air-mer qui accumule des eaux lourdes en surface. Vues à grande échelle, les eaux denses « plongent » par continuité à l'approche de la frontière Nord et alimentent la branche de retour de la circulation thermohaline. A l'inverse, cette branche de retour profonde doit remonter en surface lorsque la frontière Sud du bassin est approchée pour boucler le circuit. En effet, une intégration horizontale sur le bassin à la profondeur de compensation donne :

²⁶ Si un toit rigide est imposé, le volume est conservé mais la masse ne l'est plus et les anomalies de pression sont dues aux réactions du toit.

$$\int_{\text{Ouest}}^{\text{Est}} \int_{\text{Sud}}^{\text{Nord}} \rho w \, dx \, dy = 0$$

Une des questions majeures est de comprendre comment ce réchauffement des eaux profondes vers la surface peut s'effectuer en pratique. Dans les régions polaires, une belle instabilité est là pour faire le travail. Dans les régions subtropicales et tropicales qu'en est-il ?

Comme la figure le montre, l'océan est partout stratifié stablement. Ceci est diagnostiqué par la fréquence de Brunt Väisälä au carré $N^2 = -g/\rho_0 \, d\bar{\rho}/dz$ qui est toujours positive sauf justement de façon intermittente dans les zones de formation d'eau profonde près des pôles. De nombreuses conjectures ont été proposées pour effectuer ce « mélange » en milieu stratifié stablement. Aucune n'étant suffisamment convaincante aujourd'hui, la question reste essentielle. Si un mélange interne a lieu on se rend compte immédiatement que l'effet net du dit mélange est de remonter des eaux lourdes et de faire descendre des eaux légères de sorte que l'énergie potentielle du système augmente : Une autre source d'énergie est nécessaire pour effectuer ce travail, comme l'énergie cinétique associée aux cisaillements de courants ou le déferlement d'ondes internes de gravité près d'obstacles topographiques causée par les phénomènes de marée pour ne citer que deux exemples parmi beaucoup d'autres de cette catégorie. Une autre idée qui a vu le jour est de dire que les eaux denses « remontent » par mélange le long des surfaces iso-densités (isopycnes) qui effectivement atteignent la surface dans l'autre hémisphère. Le scénario serait que la modification « diabatique » (le réchauffement) de ces masses d'eaux se feraient par les flux de chaleur air-mer en surface lorsque la circulation revient vers l'équateur via les couches d'Ekman.

Si cette question du mélange en milieu stable focalise beaucoup d'énergies aujourd'hui, cette « description grande échelle à la surface » de la circulation thermohaline pose de nombreuses autres questions et de difficultés :

- Quel est l'effet de la rotation sur la circulation directe méridienne dont on a l'intuition ?
- Comment s'effectue le couplage entre la circulation thermohaline et la circulation forcée par le vent ?
- Quelle est la stabilité de ces circulations ?

On s'aperçoit rapidement que la réponse à ces questions est d'une difficulté autrement plus grande que le problème en fluide homogène analysé au chapitre 2. La théorie demande en effet que circulation et stratification en densité soient maintenant calculées simultanément. On pourrait se dire que l'ajout d'une seule variable dépendante, la densité, n'est pas catastrophique en soi. La difficulté vient de ce qu'en accord avec la discussion précédente, la circulation doit transporter chaleur et sel de façon à satisfaire aux demandes imposées par les flux de surface. Alors que nous avons linéarisé avec plus ou moins de succès la circulation forcée par le vent au chapitre 2, les termes d'advection dans les équations des traceurs T et S apparaissent à l'ordre zéro. C'est donc la non-linéarité de la circulation thermohaline qui est la cause de la difficulté du sujet. Ce chapitre présente quelques processus et se borne à montrer le détail des difficultés sur un certain nombre de cas fortement idéalisés de la circulation forcée par le vent en présence de stratification. Le problème de la circulation thermohaline sera abordé au Chapitre 4.

Auparavant, nous allons décrire quelques-uns des outils simplifiés qui ont été mis, au fil du temps, à notre disposition.

3.2 Approximation de Boussinesq

Un certain nombre d'approximations rassemblées sous le nom de Boussinesq permettent de simplifier un peu les équations de départ. La première chose est de voir que la gamme de variation de la densité causée par les variations de température, salinité et pression observée dans l'océan est faible. Les variations relatives de densité sont données par :

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = -\alpha_S\Delta T + \beta_S\Delta S + (\rho C_S^2)^{-1}\Delta p \quad (3.2.1)$$

où α_S, β_S et ρC_S^2 (C_S est la vitesse du son) sont des coefficients eux-mêmes fonctions de T, S et p . Mais ces effets ne sont pas très importants (en dehors de la variation de α_S avec la température). L'ordre des grandeurs des termes $\alpha\Delta T, \beta\Delta S$ est de l'ordre de 10^{-2} au maximum ($\Delta T \sim 20^\circ\text{C}, \Delta S \sim 2 \text{ psu}, \alpha_S=10^{-4}, \beta_S=0.7$). Le dernier terme dans 3.2.1 est maximisé pour une particule plongeant de la surface au fond et subissant une variation de pression hydrostatique $\Delta p = \rho g H$ de sorte que le dernier terme est $O(\text{Hg}/C_S^2)$. La quantité C_S^2/g est une grande longueur ($\sim 200 \text{ km}$ pour $C_S=1500\text{ms}^{-1}$) de sorte que le dernier terme est aussi petit. Ainsi les faibles variations de densité permettent tout d'abord d'effectuer l'approximation classique du fluide incompressible :

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0 \quad (3.2.2)$$

L'équation de conservation de la masse devient alors une équation de conservation du volume, qui filtre les ondes acoustiques très rapides. (Une discussion plus complète est fournie par Batchelor, 1967, p 167).

Si on écrit maintenant :

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 + \frac{\rho'}{\rho_0}(\underline{x}, t)$$

où ρ_0 (de l'ordre de 10^3 kg m^{-3} pour fixer les idées), est une fonction de z la quantité variable ρ'/ρ_0 est très petite. On va maintenant considérer un océan au repos. La pression associée p_0 obéit à :

$$-p_{0z} - \rho_0 g = 0 \quad (3.2.3)$$

où z est un axe orienté verticalement. Les perturbations ρ' et p' de l'océan en mouvement sont définies *en référence* à cet état de repos:

$$p = p_0 + p'$$

$$\rho = \rho_0 + \rho'$$

Les équations du mouvement pour les perturbations se réécrivent après usage de (3.2.3) :

$$\left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0}\right) \left(\frac{D\underline{u}}{Dt} + 2\underline{\Omega} \times \underline{u} \right) = -\frac{\nabla p'}{\rho_0} + \underline{g} \frac{\rho'}{\rho_0} + \nu \nabla^2 \underline{u} \quad (3.2.4)$$

L'approximation de Boussinesq consiste à négliger dans le terme de gauche le terme $\frac{\rho'}{\rho_0}$ devant 1 et à ne garder les variations de densité que dans le terme de gravité :

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + 2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{u} = -\frac{\nabla \rho'}{\rho_0} + \frac{\mathbf{g}}{\rho_0} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (3.2.5)$$

Finalemnt, les effets de pression seront négligés dans l'équation d'état de l'eau de mer qui sera linéarisée vis-à-vis des variations de température et salinité et on négligera les variations verticales de ρ_0 :

$$\rho = \rho_0[1 - \alpha_S(T - T_0) + \beta_S(S - S_0)] \quad (3.2.6)$$

Les équations (3.2.2), (3.2.5) et (3.2.6) constituent les équations de Boussinesq. Ces équations sont généralement aussi employées dans les modèles numériques réalistes (à l'exception de (3.2.6)). A ces équations doivent être ajoutées les 2 équations d'advection/diffusion pour les « traceurs » T et S :

$$\frac{DT}{Dt} = k_T \nabla^2 T \quad (3.2.7a)$$

$$\frac{DS}{Dt} = k_S \nabla^2 S \quad (3.2.7b)$$

.Dans ces équations apparaissent des coefficients de diffusivité moléculaires différents pour la température et pour le sel dont la différence importante ($k_T \gg k_S$) est à l'origine d'une instabilité de petite échelle appelée double diffusion.

3.3 Rotation et stratification

Examinons la limite de rotation rapide lorsque la densité varie maintenant spatialement. Le rotationnel de (3.2.5) avec les termes d'accélération négligés fournit dans cette limite une équation de vorticité modifiée :

$$(2 \mathbf{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{g} \times \nabla \rho / \rho_0 \quad (3.3.1)$$

équation qui se décline en coordonnées sphériques, longitude ϕ croissante vers l'Est, latitude θ croissante vers le Nord et coordonnée radiale verticale vers le haut avec les composantes de la vitesse u, v, w selon ces 3 directions :

$$(2 \mathbf{\Omega} \cdot \nabla) u = (g/\rho_0 r) \partial \rho / \partial \theta \quad (3.3.2a)$$

$$(2 \mathbf{\Omega} \cdot \nabla) v = -\frac{g}{\rho r \cos \theta} \partial \rho / \partial \phi + \frac{2\Omega \cos \theta}{r} w \quad (3.3.2b)$$

$$(2 \mathbf{\Omega} \cdot \nabla) w = \frac{2\Omega \cos \theta}{r} v \quad (3.3.2c)$$

On s'aperçoit que deux termes métriques (liés aux variations du référentiel) apparaissent en (b) et (c). L'équation (c) de vorticité verticale n'est pas modifiée par les couples de flottabilité qui agissent uniquement dans le plan horizontal (équations (a) et (b)). Comme l'opérateur $2\Omega \cdot \nabla$ s'écrit :

$$2\Omega \cos \theta \frac{\partial}{r \partial \theta} \dots + 2\Omega \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \dots$$

On voit que (c) n'est autre que l'équation 2.5.4 dans la limite où le premier terme de l'opérateur est négligeable devant le second ce qui se produit lorsque $\delta / \tan \theta \ll 1$ où δ est le rapport d'aspect H/L. On voit incidemment que suffisamment proche du plan équatorial, le premier terme de l'opérateur qui prend en compte la projection horizontale $\Omega \cos \theta$ du vecteur rotation n'est plus négligeable. Hors de cette zone, les équations de vorticité (3.3.2) deviennent pour des bassins océaniques peu profonds ($\delta \ll 1$) :

$$f \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{g}{\rho_0 r} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \quad (3.3.3a)$$

$$f \frac{\partial v}{\partial r} = - \frac{g}{\rho_0 r \cos \theta} \frac{\partial \rho}{\partial \phi} \quad (3.3.3b)$$

$$f \frac{\partial w}{\partial r} = \beta v \quad (3.3.3c)$$

où r le rayon de la terre est supposé constant ($= R_T$) dorénavant et $\beta = 2 \Omega \cos \theta / R_T$ capture les variations du paramètre de Coriolis avec la latitude. Les deux premières sont appelées équations du vent thermique dans la littérature. De l'observation de profils T et S en deux stations séparées d'une certaine distance, ces relations permettent de déterminer le courant horizontal au travers des deux stations à une constante d'intégration près. L'essentiel de la connaissance de la circulation océanique jusqu'au début des années 70²⁷ est venu de l'application de cette relation sur des sections transocéaniques. Les observateurs étaient bien conscients du problème de la constante d'intégration qui varie d'une paire de stations à une autre. Comme la circulation est généralement intensifiée en surface, mettre la constante à zéro entraîne une erreur faible sur le courant de surface et la circulation au-dessus de 1000 m disons, a été assez bien cartographiée dans les années 60. Diverses méthodes ont été proposées pour trouver, ce qui est équivalent, un niveau de mouvement nul. Toutes ces méthodes utilisent des hypothèses additionnelles moins robustes que la géostrophie et l'hydrostatique qui ne sont valables souvent que localement. En tous cas, étant donné l'observation de la stratification en densité, les relations (3.3.3a) et (3.3.3b) donnent le cisaillement vertical de courant, ce qui est après tout déjà remarquable.

L'existence de mouvement cisailé ruine la dynamique TPP et le concept de colonne de Taylor qui a été si fructueux en fluide homogène. Il en reste un peu car l'équation verticale de vorticité n'a pas changé de sorte qu'on peut l'intégrer verticalement entre les deux couches d'Ekman supérieures et inférieures (z_S, z_F).

²⁷ Dans les années 70, des méthodes directes de mesure de vitesse sont apparues (courantométrie sur mouillage fixe, flotteurs dérivants, ADCP). Evidemment, la circulation profonde restait comparativement inconnue.

$$\beta \int_{Z_F}^{Z_S} v \, dz = f(W_E - W_F) \quad (3.3.4)$$

Si on néglige provisoirement la friction sur le fond et la topographie, (3.3.4) re-fournit la relation de Sverdrup qui reste valable en stratifié :

$$\beta \int_{Z_F}^{Z_S} \rho_o v \, dz = f \underline{k} \cdot \nabla_x \frac{\tau}{f} \quad (3.3.5)$$

Si on inclut dans l'intégrale, le transport d'Ekman (équation 2.1.5)²⁸, (3.3.5) devient :

$$\beta \int_{Z_F}^0 \rho_o v \, dz = \underline{k} \cdot \nabla_x \tau \quad (3.3.6)$$

Ceci est en fait la relation que Sverdrup a proposée dans son article de 1947 qui montre que le rotationnel du vent contrôle l'intégrale verticale de la circulation méridienne (loin des frontières des bassins bien sûr). L'hypothèse sous jacente est que les vitesses verticales (et donc horizontales) au fond sont négligeables dans leur effet de « stretching » des lignes de vorticité planétaire. En d'autres termes, compte tenu de la forme compliquée du fond des océans, (3.3.6) n'est valable que si la circulation est piégée en surface. Ceci ne s'appliquera pas à la circulation thermohaline qui a justement une branche profonde transportant les eaux denses des pôles vers l' quateur, sauf si cette circulation thermohaline reste confinée sur le bord des bassins.

Les équations (3.3.3) sont des blocs importants de construction d'une théorie de la circulation océanique. Les difficultés sont cependant grandes comme nous l'avons déjà mentionné non pas tant à cause de la dynamique qu'à cause de la non linéarité des équations de traceurs T/S et donc de la thermodynamique. Cette non linéarité rend les solutions stationnaires instables (comme dans le cas atmosphérique) de sorte que des tourbillons très énergétiques apparaissent. Ces tourbillons ont des échelles assez petites (~ 50 km) par rapport à la taille des bassins et dominant largement l'énergie cinétique de la circulation moyenne (dans le temps ou dans l'espace). Des petites particules lâchées dans ces champs de tourbillons ont des mouvements aléatoires qui remplissent souvent les conditions de marche au hasard d'un processus de diffusion classique. Cette turbulence dite quasi-géostrophique car les vitesses restent assez proches de leurs valeurs géostrophiques est particulièrement présente aux latitudes supérieures à 30 . Si l'on se focalise sur une théorie de la circulation grande échelle au sens du chapitre 2, on voit qu'une théorie statistique sera nécessaire pour prendre en compte l'effet moyen des tourbillons sur les mouvements de grande échelle. Des paramétrisations assez grossières de cet effet statistique ont été proposées dans l'atmosphère et dans l'océan plutôt dans le contexte du problème des évolutions à long terme du climat car même avec un modèle numérique, il reste assez problématique d'intégrer le système océan-atmosphère sur des milliers d'années tout en résolvant la structure des tourbillons. Mais pourquoi intégrer sur des milliers d'années ? Essentiellement parce que l'océan, la composante lente du système, réagit avec ce type d'échelle de temps. Imaginons un océan composé d'une boîte subtropicale et d'une boîte polaire gagnant et perdant respectivement une quantité Q (W m⁻²) de chaleur à l'interface air-mer. Les boîtes sont stratifiées stablement par une anomalie de température ΔT existant entre la couche de surface d'épaisseur h₁, et la

²⁸ Ceci suppose que la stratification ne modifie pas le résultat. Souvent le brassage vertical est tel près de la surface qu'une couche mélangée de densité constante apparaît. Si l'épaisseur de cette couche de mélange est plus grande que celle de la couche d'Ekman, le résultat 2.1.5 s'applique.

couche de fond d'épaisseur h_2 . Pour calculer l'intensité de la circulation méridienne, on utilise la continuité :

$$h_1 v_1 + h_2 v_2 = 0$$

La deuxième équation équilibre le flux méridien de chaleur entre les boîtes avec la perte en surface :

$$\rho_o C_p v_1 T_1 h_1 L + \rho_o C_p v_2 T_2 h_2 L = QA$$

où C_p la chaleur spécifique $\sim 4800 \text{ J Kg}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, L la largeur du bassin et A son aire. En éliminant $v_2 h_2$, on trouve :

$$M = V_1 h_1 L = \frac{QA}{\rho_o C_p \Delta T}$$

Soit le transport de la circulation méridienne en fonction du flux de chaleur en surface et de l'anomalie ΔT . En mettant des valeurs observées typiques $Q = 50 \text{ W m}^{-2}$, $\Delta T = 10^\circ\text{C}$, $A = 3 \cdot 10^3 \times 5 \cdot 10^3 \text{ km}^2$, l'estimateur ci-dessus donne un transport $M = 15 \cdot 10^6 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$. On peut estimer un temps d'ajustement de la circulation thermohaline par un temps de ventilation en divisant le volume du bassin par ce transport méridien soit $(h_1 + h_2) A/M = 150$ ans environ. En fait, cette estimation sous estime d'un ordre de grandeur le temps d'ajustement des masses d'eaux profondes (voir Chapitre 4) mais elle montre déjà le type d'échelle de temps sur lequel vont réagir les couches de la thermocline. La dynamique réagit beaucoup plus vite que la stratification sur des échelles de la dizaine d'années de sorte qu'il y a de la place pour des théories dynamiques qui prennent la stratification de l'océan comme une donnée à priori. Les progrès assez importants des 20 dernières années sur ce type de problèmes justifient leur présentation en premier. Celle ci sera suivie par le problème largement plus ouvert de la circulation thermohaline proprement dite qui détermine la stratification.

3.4. Les équations quasi-géostrophiques

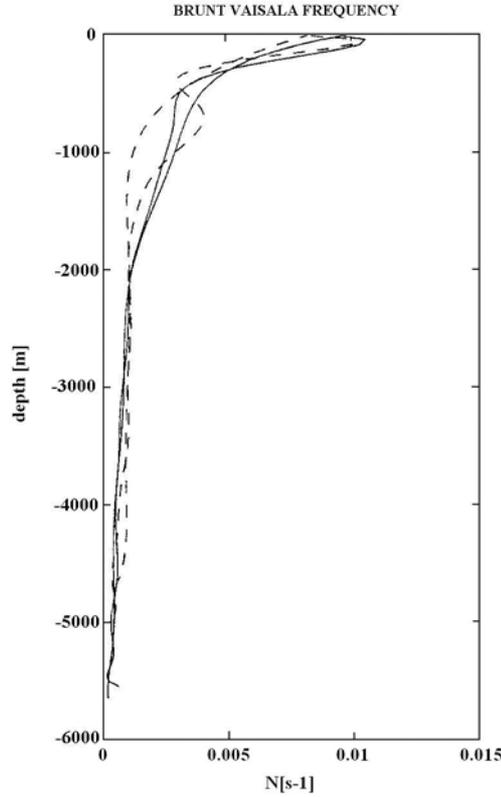
Lorsque la stratification moyenne du fluide est imposée, une théorie puissante a été élaborée principalement par Charney (1947) pour calculer les mouvements lents de l'atmosphère sur des échelles de temps grandes par rapport à la journée. Essentiellement il s'agit de filtrer les ondes de gravité rapides de période inférieure à f^{-1} dont on pense que les interactions avec la circulation ne jouent qu'un rôle mineur. Notons cependant que les mesures directes de courant montrent qu'il y a vraiment beaucoup d'énergie aussi dans les ondes de gravité océanique et il semble que ces problèmes commencent à être considérés en océanographie²⁹. Ces ondes de gravité qui existent aussi en fluide homogène avec une propagation très rapide $(gH)^{1/2} = 200 \text{ m s}^{-1}$ sont excitées entre autres par le potentiel de gravitation de la lune et du soleil. Elles ont été purement éliminées au chapitre 2 par l'approximation du toit rigide. On peut ne pas faire cette approximation du toit rigide et malgré tout les filtrer, ce que l'on fait en écrivant que la pression est une fonction courant. Nous allons effectuer exactement la même démarche en milieu stratifié. On va se placer sur un plan β cartésien de sorte que $f = f_o + \beta y$, l'axe x vers l'Est, l'axe y vers le Nord et l'axe z vertical vers le haut.

²⁹ Dans l'atmosphère les ondes de gravité ont un rôle identifié dans la « traînée » sur les montagnes, rôle qui est maintenant pris en compte dans les GCM atmosphériques.

La stratification en terme de la variable flottabilité s'écrit :

$$b = \bar{b}(z) + b'(\underline{x}, t)$$

où b' est une perturbation de la stratification et \bar{b} une moyenne fonction de z qui est donnée. Dans ces notations, la fréquence de Brünt Väisälä moyenne est simplement $N = (d\bar{b}/dz)^{1/2}$.



La figure montre sur quelques profils typiques des moyennes latitudes qu'elle est supérieure à f d'au moins un ordre de grandeur. Cette observation garantit que les ondes internes de gravité ont des fréquences supérieures à f . Si on suppose que les mouvements restent proches de l'équilibre géostrophique (c'est-à-dire ε et $\varepsilon_T \ll 1$), l'écoulement est quasi-non divergent horizontalement. Cependant il y a une condition supplémentaire à respecter car un écoulement méridien géostrophique sur la sphère est divergent, comme nous l'avons déjà vu, induisant une divergence horizontale $\beta v/f$. Pour minimiser cette divergence il faut que l'échelle L_y méridienne des mouvements soit telle que $\gamma = \beta L_y / f_0 \ll 1$, condition assurée justement par la validité du plan β . On suppose dans la dérivation des équations QG que γ est $O(\varepsilon)$. La procédure standard est d'effectuer une expansion des variables dépendantes en termes de puissances de ε après une adimensionalisation des équations (3.2.5) :

$$\varepsilon_T \frac{\partial \underline{u}_H}{\partial t} + \varepsilon \underline{u}_H \cdot \nabla \underline{u}_H + (1 + \gamma y) \underline{k} \times \underline{u}_H = -\nabla \phi \quad (3.4.1)$$

avec :

$$\varepsilon_T = (f_0 T)^{-1}, \varepsilon = U / f_0 L, \gamma = \beta L / f_0$$

où $\phi = P/\rho_0$ a été adimensionalisée par $f_0 UL$.

$$\delta^2 \left(\varepsilon_T \frac{\partial w}{\partial t} + \varepsilon \cdot \underline{u} \cdot \nabla w \right) = -\phi_z + b' \quad (3.4.2)$$

L'échelle de flottabilité étant $f_0 UL/H$, l'équation thermodynamique devient :

$$\varepsilon_T \frac{\partial b'}{\partial t} + \varepsilon u \cdot \nabla b' + B_u w = 0 \quad (3.4.3)$$

où $B_u(z) = (NH/f_0 L)^2$ est le nombre de Burger. Ce nombre de Burger fait apparaître une échelle de longueur NH/f_0 , rayon interne de déformation de Rossby qui est au moins de l'ordre de 10 fois la profondeur sur la base du rapport N/f_0 déjà mentionné. L'approximation QG en fluide stratifié fait l'hypothèse que B_u est $O(1)$. L'échelle horizontale du mouvement ne doit pas être trop grande par rapport au rayon interne pour que le terme de perturbation b' reste beaucoup plus petit que le terme moyen. Cette hypothèse qui interdit donc les grands déplacements verticaux des surfaces iso-densité est une des plus restrictives vis-à-vis de la réalité océanique.

(i) L'approximation QG₁ : $(\varepsilon_T, \varepsilon) \ll 1$, $B_u \sim O(1)$, $\gamma \sim O(\varepsilon)$

A l'ordre 0 en ε on obtient :

$$\underline{k} \times \underline{u}_0 = -\nabla \phi_0 \quad (3.4.4a)$$

$$-\phi_{0z} + b_0 = 0 \quad (3.4.4b)$$

$$\partial w_0 / \partial z = 0 \quad (3.4.4c)$$

$$w_0 = 0 \quad (3.4.4d)$$

Le mouvement à l'ordre 0 est en équilibre géostrophiques à la latitude de référence f_0 . Le stretching $\partial w_0 / \partial z$ est nul mais la nouveauté est que la stratification moyenne « impose » $w_0 = 0$ aux échelles où $B_u \sim O(1)$: Elle constitue une sorte de toit rigide interne. Cette nouvelle condition est entièrement compatible avec (a), (b) et (c). Les équations à l'ordre 0 sont simplement diagnostiques et pour retrouver les termes prognostiques (les dérivées temporelles) il faut aller à l'ordre 1 en ε :

$$\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon} \frac{\partial \underline{u}_{0H}}{\partial t} + \underline{u}_0 \cdot \nabla \underline{u}_{0H} + \frac{\gamma y}{\varepsilon} \underline{k} \times \underline{u}_0 + \underline{k} \times \underline{u}_1 = -\nabla \phi_1 \quad (3.4.5a)$$

$$-\phi_{1z} + b_1 = 0 \quad (3.4.5b)$$

$$\nabla \cdot \underline{u}_1 = 0 \quad (3.4.5c)$$

$$\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon} \frac{\partial b_0}{\partial t} + \underline{u}_0 \cdot \nabla b_0 + B_u w_1 = 0 \quad (3.4.5d)$$

Les champs d'ordre 1 sont toujours hydrostatiques même si δ n'est pas petit lorsque B_u est $O(1)$. Par contre ils ne sont plus géostrophiques. En prenant le rotationnel de (3.4.5.a), on voit que la divergence de ces termes gouverne l'évolution des champs d'ordre 0 :

$$\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon} \frac{\partial \xi_0}{\partial t} + \underline{u}_0 \cdot \nabla \xi_0 + \frac{\gamma}{\varepsilon} v_0 = \frac{\partial w_1}{\partial z} \quad (3.4.6)$$

On peut poser :

$$D_0 / Dt = \varepsilon_T / \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \dots + \underline{u}_0 \cdot \nabla \dots$$

On élimine w_1 en utilisant (3.4.5d) pour obtenir :

$$\frac{D_0}{D_t} \xi_0 + \frac{\gamma}{\varepsilon} v_0 = - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{B_u} \frac{D_0}{Dt} b_0 \right)$$

ou encore en tenant compte de (3.4.4a) et (3.4.4b) pour vérifier que $u_{0z} \cdot \nabla b_0$ est nul :

$$\frac{D_0}{D_t} \left(\xi_0 + \frac{\partial (B_u^{-1} b_0)}{\partial z} + \frac{\gamma y}{\varepsilon} \right) = 0 \quad (3.4.7)$$

La quantité $q = \xi_0 + \partial B_u^{-1} b_0 / \partial z + \gamma y / \varepsilon$ n'est autre que la forme QG de la vorticité potentielle. On peut isoler dans le nouveau terme la quantité b_0 / \bar{b}_z la hauteur de la surface iso- b perturbée par rapport à l'état de référence. [En effet comme les perturbations de b sont petites, on écrit $b(z) = \bar{b}(z_r) + (z - z_r) \bar{b}'_z$ et donc $b' = (z - z_r) \bar{b}'_z$]

Comme les champs d'ordre 0, ξ_0 et b_0 , s'expriment directement par (3.4.4) en fonction de la pression ϕ_0 , (3.4.7) est une équation différentielle partielle pour la seule pression ré-écrite dimensionnellement avec la fonction courant ψ (où $\psi = P / \rho_0 f_0$)

$$\frac{\partial}{\partial t} + J(\psi, \dots) \left\{ \nabla^2 \psi + f_0^2 \frac{\partial}{\partial z} (\psi_z / N^2) + \beta y \right\} = 0 \quad (3.4.8)$$

L'équation (3.4.7) montre directement l'importance du nombre de Burger. Si B_u est grand (L/R_i petit), la stratification est si forte que les surfaces iso-densité sont quasi-rigides et chaque couche interne évolue de façon tout à fait indépendante de ses voisines. Le couplage vertical ne devient important qu'à l'échelle du rayon interne lorsque $B_u \sim O(1)$. Lorsque B_u est petit (L/R_i grand), la vorticité relative devient négligeable devant le terme de stretching et l'effet de la rotation l'emporte. Cette limite ne doit pas être poursuivie trop loin car la dérivation de l'équation QG repose sur l'hypothèse que la stratification de base est suffisamment forte. Cette hypothèse implique que les vitesses verticales à l'ordre 0 en ε (3.4.4d) sont nulles et que le terme d'advection verticale peut être linéarisé i.e. $w \bar{b}'_z$. Cette linéarisation simplifie considérablement l'expression du terme de stretching.

(ii) La limite **ASE** (Active Scalar Equation) $\varepsilon \ll 1$, $B_u \ll 1$, $\gamma \sim O(\varepsilon)$.

C'est la limite échelle intermédiaire de la quasi-géostrophie (ou encore forte rotation ou encore faible stratification). On reste à une échelle petite devant le rayon de la terre (plan β) mais grande devant le rayon interne (qui doit lui-même donc être petit). On repart des équations (3.4.1), (3.4.2) et (3.4.3) Le seul changement est que maintenant le terme d'advection verticale est du même ordre que les autres, c'est-à-dire, $B_u \sim O(\varepsilon)$. On s'aperçoit que si les vitesses verticales imposées en surface et au fond sont $\leq O(\varepsilon)$, alors $\partial w_o / \partial z = 0$ et (3.4.4) implique $w_o = 0$. Peu de choses sont changées par rapport au cas précédent sauf à l'ordre 0 pour l'équation de densité qui devient :

$$\frac{\partial b_o}{\partial t} + \underline{u}_o \cdot \nabla b_o = 0 \quad (3.4.9)$$

Si on remplace b et \underline{u}_0 par leurs expressions en fonction de la pression ϕ on voit que (3.4.9) devient l'équation du traceur actif (Active Scalar Equation) :

$$\frac{\partial \phi_{oz}}{\partial t} + J(\phi_o, \phi_{oz}) = 0 \quad (3.4.10)$$

une équation peu étudiée dans la littérature. Si on divise (3.4.10) par \bar{b}_z et qu'on dérive par rapport à z , on obtient :

$$\frac{\partial \dots}{\partial t} + J(\phi_o, \dots) \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\phi_{oz} / \bar{b}_z \right) \right] = 0 \quad (3.4.11)$$

où la quantité advectée n'est autre que la vorticité potentielle QG qui apparaît en (3.4.7) lorsque précisément vorticité relative et planétaire sont négligées devant le terme d'étirement des iso-densités. Dans ces conditions l'équation pour la densité apparaît aussi comme une équation pour la vorticité potentielle.

(iii) La limite **QG₂** ou **PG** (planétaire-géostrophique) $\varepsilon \ll 1$, $B_u \ll 1$, $\gamma \sim O(1)$.

Ce régime identifié comme la quasigéostrophie de 2^{ème} espèce par Philips (1963) est semblable au précédent à une exception près : on suppose que les échelles peuvent atteindre le rayon de la terre. De sorte que le plan β n'est plus strictement valide et que ce régime doit être normalement étudié en coordonnées sphériques.

A l'ordre 0 en ε , les équations sont :

$$f / f_o \underline{k} \times \underline{u}_o = -\nabla \phi_o \quad (3.4.12a)$$

$$-\phi_{oz} + b_o = 0 \quad (3.4.12 b)$$

$$\nabla \cdot \underline{u}_o = 0 \quad (3.4.12c)$$

$$\frac{\partial b_0}{\partial t} + \underline{u}_0 \cdot \nabla b_0 + w B_u / \varepsilon = 0 \quad (3.4.12d)$$

La grande différence est que la géostrophie imposée à l'échelle planétaire n'implique plus que le flot soit non divergent à l'ordre 0. Si on prend le rotationnel de (3.4.12a) on obtient après utilisation de (3.4.12c) l'équation de vorticité planétaire géostrophique déjà mentionnée :

$$\beta v_0 = f \frac{\partial w_0}{\partial z} \quad (3.4.13)$$

Si on multiplie (3.4.12d) par f et que l'on dérive ensuite par rapport à z , on voit qu'on obtient après utilisation de 3.4.13 une variante planétaire du régime ASE précédent (réécrite dimensionnellement) :

$$\frac{D}{Dt}(fb_z) = 0 \quad (3.4.14)$$

Expression qui exprime la conservation de la vorticité potentielle fb_z . Il n'est plus nécessaire de faire la distinction entre stratification de référence et perturbée puisque cette dernière n'est plus une « petite » perturbation permettant la linéarisation. Il faut remarquer que dans cette limite l'advection se fait par le champ de vitesse 3D et non plus seulement par le champ horizontal comme dans QG ou ASE. En introduisant dans (3.4.14) la variable M reliée à P par :

$$P = \partial M / \partial z$$

on voit que :

$$f \underline{k} \times \underline{u}_H = -\nabla M_z$$

$$b = M_{zz}$$

Si de plus w est zéro au fond (fond plat), alors 3.4.13 implique:

$$w = \frac{\beta M_x}{f^2}$$

Ces 2 expressions pour le champ de vitesse et b permettent de ré-écrire (3.4.12d), l'équation de densité, en fonction de la seule variable M :

$$M_{zzt} + f^{-1} J(M_z, M_{zz}) + \frac{\beta M_x}{f^2} M_{zzz} = 0 \quad (3.4.15)$$

Cette « M équation » sera discutée au chapitre 4. Cette limite planétaire géostrophique (petit B_u) est appropriée pour l'océan puisque le rapport de la taille des bassins sur le rayon interne est typiquement $O(100)$ (et seulement 10 pour l'atmosphère). Comme dans la discussion du chapitre 2, la dynamique PG est une dynamique intérieure. L'hypothèse de B_u petit n'est plus valable dans les courants de couche limite et l'équation en M ne peut d'ailleurs pas satisfaire les conditions aux limites de vitesses normale nulle sur l'ensemble d'un bassin. Des termes frictionnels Laplacien rajoutés à (3.4.12a) ont permis d'utiliser ce système plutôt que (3.4.14) pour calculer des solutions de bassin numériquement. Comme en fluide homogène, il n'y a

pas de raison particulière pour que les couches limites visqueuses ainsi créées soient particulièrement réalistes.

Commentaires :

Nous avons exploré les limites ε et $\varepsilon_T \ll 1$ qui montrent l'importance du champ de vitesse rotationnel pour l'advection dans QG_1 . Divers modèles Balance, Semi-géostrophique et beaucoup d'autres ont été proposés pour améliorer la précision au-delà du QG. Les modèles de Balance par exemple diffèrent par les termes retenus dans l'équation de vorticité et de divergence. Cette dernière est toujours diagnostique (de façon à filtrer les ondes de gravité) mais se complique notablement lorsque ε augmente (Gent-McWilliams, 1983). Le champ de vitesse associé à la partie divergente devient important (il l'est déjà en PG).

(iv) Conditions aux limites pour QG_1

A la surface et au fond, les conditions aux limites sont des conditions sur la vitesse verticale. Celle-ci s'exprime dimensionnellement à partir de l'équation de flottabilité :

$$w = -\frac{1}{b_z} \left[\frac{\partial b'}{\partial t} + J(\psi, b') \right]$$

comme b' se relie hydrostatiquement à la pression et celle-ci géostrophiquement à la fonction courant, on peut réécrire:

$$w = -\frac{f_0}{b_z} \left[\frac{\partial}{\partial t} \psi_z + J(\psi, \psi_z) \right] \quad (3.4.16)$$

Il ne faut pas oublier que la vitesse verticale dans QG_1 est $O(\varepsilon)$ de sorte que les forçages qui apparaissent via ces conditions limites sur w doivent respecter cette hypothèse. Ce doit être le cas du pompage d'Ekman en surface imposé par le rotationnel du vent mais aussi de la vitesse verticale au fond s'il y a de la topographie. Si le relief h varie sur une échelle Δh par rapport à la profondeur moyenne H , la condition aux limites au fond $w = \underline{u} \cdot \nabla h$ impose donc que :

$$\Delta h/H \leq O(\varepsilon)$$

Seules de petites ondulations du fond de l'ordre de quelques centaines de mètres sont donc permises avec QG_1 . Les modèles numériques créés à partir de QG_1 ont souvent été des modèles discrétisés selon la verticale en couches de densité constante, l'étude adiabatique donc, se focalisant sur la réponse à un forçage mécanique (le vent). Rien n'interdit pourtant dans la formulation QG_1 de mettre des forçages thermodynamiques. Ils entrent simplement dans l'équation de densité (3.4.16) et apparaissent ainsi comme une source de vortex stretching supplémentaire dans l'équation de vorticité (3.4.8). Ces forçages eux aussi doivent respecter les conditions de petits w .

Les conditions aux limites latérales sont plus délicates car un handicap de QG_1 apparaît rapidement. En effet près d'une côte, la vitesse normale devient très petite de sorte que l'équilibre dans la direction le long de la côte s'écarte forcément de la géostrophie. En revanche, il n'y a pas de difficultés pour les vitesses le long de la côte. L'approximation QG_1 qui impose la géostrophie à l'ordre 0 dans les deux directions ne respecte pas cette anisotropie des vitesses et donc des échelles horizontales le long et perpendiculaire à la côte. Les ondes de

Kelvin sont justement des modes d'oscillation de gravité *avec cette anisotropie* et on ne peut donc pas espérer qu'ils soient représentés correctement par QG_1 . Comme ces modes « côtiers » sont non dispersifs, ils persistent aux fréquences sub-inertielles et leur présence est importante si on veut discuter de l'ajustement de courants de bords à l'échelle du rayon interne.

La première condition à respecter vient de la condition $\underline{u}_0 \cdot \underline{n} = 0$ sur la frontière qui implique par (3.4.4a)

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial s} = 0 \quad (3.4.17)$$

où s est l'abscisse curviligne le long de la frontière. Ceci implique que :

$$\phi_0 = c(t) \quad (3.4.18)$$

Comme l'équation prognostique pour QG_1 est (3.4.5a), l'annulation de la vitesse normale à l'ordre 1 en ε , $\underline{u}_1 \cdot \underline{n} = 0$ à la paroi implique :

$$\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon} \frac{\partial \underline{u}_0 \cdot \underline{t}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\phi_1 + 1/2 |\underline{u}_0|^2 \right) \quad (3.4.19)$$

où \underline{t} est un vecteur unitaire tangent à la paroi (sens direct) et après usage de (3.4.4a) cette équation devient :

$$\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial t \partial n} = - \frac{\partial}{\partial s} \left(\phi_1 + 1/2 |\underline{u}_0|^2 \right) \quad (3.4.20)$$

Cette condition aux limites couple les pressions à l'ordre 0 et à l'ordre 1. Comme ces dernières ne sont jamais calculées explicitement avec QG_1 , une intégration de (3.4.19) le long de la frontière permet de les éliminer et on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \oint \frac{\partial \phi_0}{\partial n} ds = 0 \quad (3.4.21)$$

Cette condition peut être retrouvée directement à partir de l'équation de vorticité (3.4.6) en l'intégrant horizontalement jusqu'aux frontières à un z donné. La conservation de la masse entraîne $\iint w_{1z} dA = 0$ et (3.4.21) s'ensuit directement. Physiquement (3.4.21) exprime la constance de la circulation géostrophique autour du domaine. Si le flux de masse dans le domaine (dû au pompage d'Ekman par exemple) est nul, aucune vorticité nette (et donc circulation) ne peut apparaître. Bien entendu si des termes de forçage/dissipation sont ajoutés, leurs contributions intégrales apparaîtront dans (3.4.21). Ainsi les conditions aux limites consistent en (3.4.17) et (3.4.21), cette dernière relation permettant de déterminer la constante $c(t)$ dans (3.4.18). Ces conditions aux limites filtrent les ondes de Kelvin du système QG_1 . On peut montrer que ces conditions qui assurent la conservation de la masse, assurent aussi la conservation de l'énergie.

3.5. Les ondes quasi-géostrophiques

Les ondes de Rossby et Rossby topographiques ont été décrites au chapitre II. Nous allons voir comment la stratification modifie les premières en nous bornant au cas où ces ondes apparaîtraient comme des perturbations d'un fluide stratifié au repos. En pratique comme dans l'atmosphère, ces ondes interagissent avec la circulation moyenne. Compte tenu de la complexité du problème, ces interactions seront présentées dans le paragraphe suivant. Nous allons voir en fait que ces ondes sont assez semblables à ce qui existe en fluide homogène et qu'un des rôles de la stratification est de les ralentir dans des proportions importantes (comme dans le cas des ondes internes de gravité comparées aux ondes externes). En conséquence de ce ralentissement ces ondes sont réellement de très basse fréquence de sorte qu'elles sont fortement susceptibles de devenir intrinsèquement non linéaires et d'interagir avec la circulation moyenne (qui est elle-même lente). En comparant respectivement vorticité relative et terme de vortex-stretching au terme linéaire βy dans (3.4.8), on voit que leur linéarité se mesure avec le paramètre H déjà introduit au paragraphe 2.7 :

$$\frac{U}{\beta L^2} = \left(\frac{\delta_I}{L} \right)^2$$

où $\delta_I = (U/\beta)^{1/2}$ est l'échelle inertielle déjà rencontrée et avec :

$$\frac{U}{\beta L^2} B_u^{-1} = \left(\frac{\delta_R}{H} \right)^2$$

où δ_R est l'échelle verticale qui correspond naturellement à δ_I soit, soit $\delta_R = f/N \delta_I$.

	U(m s ⁻¹)	L(km)	(δ_I/L) ²	(δ_R/H) ²
Méso-échelle	0.25	50	5	0.5
Grande-échelle	0.01	500	2 10 ⁻³	0.1

Le tableau montre, avec $N/f = 50$, $\beta = 2 \cdot 10^{-11} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ et $H = 4 \text{ km}$, que les tourbillons dits de méso-échelle (à l'échelle du rayon interne) sont fortement non linéaires. En revanche pour les anomalies de plus grande échelle que l'on commence à détecter à la surface des océans, l'advection de vorticité relative est négligeable. Par contre l'advection du terme de vortex stretching est plus difficile à négliger. Comme les anomalies s'étendent sur de grandes distances, les ondulations internes des surfaces iso-densité ne sont pas petites et l'approximation PG est à préférer au QG₁. Ces ondes peuvent s'étudier plutôt avec l'équation M (3.4.15). On voit dans le dernier terme de (3.4.15) cette non linéarité supplémentaire associée avec cette forte variation de ces isopycnes qui est tout à fait appropriée géophysiquement.

Conscient des limitations de ces linéarisations, cherchons néanmoins des solutions libres du problème (3.4.8) linearisé :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla^2 \psi + f_0^2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\psi_z}{N^2} \right) + \beta \psi_x = 0 \quad (3.5.1)$$

Nous n'allons pas considérer ici l'effet des frontières latérales, mais seulement celui du fond et de la surface. Comme les effets topographiques seront présentés ultérieurement, on suppose un fond plat et de 3.4.16 on déduit : $\psi_{zt} = 0$ en $z = -H$. En surface on peut soit mettre la même condition (toit rigide) soit garder la surface libre. Dans ce dernier cas la condition aux limites en surface est :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \rho_0 g w$$

ou encore en fonction de ψ :

$$\psi_{zt} + \frac{N^2}{g} \psi_t = 0 \quad \text{en } z = 0 \quad (3.5.2)$$

On voit immédiatement que le deuxième terme 3.5.2 va être complètement négligeable si les variations verticales de la solution se font sur une échelle verticale petite par rapport à l'échelle de variation de la densité $H_S = g/N^2 = \rho / -\bar{\rho}_z$. Compte tenu des très grandes valeurs de H_S dans l'océan (> 1000 km), le premier terme dans 3.5.2 va dominer pour les solutions qui présentent des variations verticales (dites baroclines) de l'ordre de grandeur de l'épaisseur du fluide et l'approximation du toit rigide est excellemment justifiée³⁰. Si ψ ne varie pas selon la verticale, l'onde ne sentira pas la stratification et tout se passera comme si le fluide était homogène. Pour une telle solution dite barotrope, le deuxième terme dans 3.5.2 redevient important et on retrouve la condition de surface vue au chapitre 2.

Des solutions à variables séparées peuvent être cherchées sous la forme $A(x,y,t) \pi(z)$. Après injection dans (3.5.1), les fonctions A et π obéissent à :

$$f_0^2 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\pi_z}{N^2} + \lambda^2 \pi = 0 \quad (3.5.3)$$

avec $\pi_z + \frac{N^2}{g} \pi = 0$ en $z = 0$ et $\pi_z = 0$ en $z = -H$.

et

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla^2 A - \lambda^2 A \right) + \beta A_x = 0 \quad (3.5.4)$$

On voit que la partie horizontale de la solution obéit à la même équation que les ondes de Rossby en fluide homogène (équation 2.4.3) sous réserve de la détermination de la constante de séparation λ^2 . Celle-ci est déterminée par la solution du problème de Sturm-Liouville (3.5.3). Une infinité de valeurs propres et de modes propres sont solutions de (3.5.3) et chaque mode vertical a des caractéristiques de propagation horizontale données par (3.5.4). Pour illustrer concrètement la solution, considérons le cas $N = \text{cste}$. (Il n'est pas totalement réaliste car l'océan est plus stratifié en surface qu'au fond). Les modes verticaux sont de la

³⁰ Cette discussion est complètement indépendante de l'approximation QG. Le résultat sera valable aussi pour les ondes de gravité interne.

forme $A \cos\left(\frac{\lambda N_z}{f_0}\right) + B \sin\left(\frac{\lambda N_z}{f_0}\right)$. Après utilisation des conditions aux limites, un système homogène d'ordre 2 est obtenu pour les inconnues A et B. Des solutions non triviales existent si le déterminant associé s'annule, fournissant l'équation aux valeurs propres :

$$\tan x = H/H_S x^{-1} \quad (3.5.5)$$

où on a posé $x = \lambda NH/f_0$.

Comme $H/H_S \ll 1$, les racines de 3.5.5 sont solutions de $\tan x = 0$ (sauf au voisinage de $x = 0$). Cette approximation donne les valeurs propres baroclines :

$$\lambda_n = \frac{f_0}{NH} n\pi, n = 1, 2, \text{etc...}$$

le mode barocline associé étant à peu près :

$$\pi_n = \cos(n\pi z/H)$$

Au voisinage de $x = 0$, $\tan x \sim x$ et cette approximation donne une racine supplémentaire :

$$x_0 = \left(\frac{H}{H_S}\right)^{1/2} \quad \text{soit} \quad \lambda_0 = \frac{f_0}{\sqrt{gH}}$$

Le mode vertical associé, quasi constant, est le mode dit barotrope. Comme on reconnaît en λ_0 l'inverse du rayon externe de déformation, ce mode n'est autre que l'onde de Rossby déjà vu en fluide homogène mais sans faire l'approximation du toit rigide. Les modes baroclines sont définis par leurs rayons internes λ_n^{-1} qui décroissent comme $1/n$. En reportant dans 3.5.4, on voit que les ondes de Rossby baroclines ayant pour solution $\pi_n(z) e^{ikx - \omega t}$ ont une relation de dispersion complètement analogue à ce qui a été vu en 2.4 avec des vitesses de phase toujours vers l'Ouest.

$$\omega_n = -\frac{\beta k}{k^2 + l^2 + \lambda_n^2}$$

Avec $N/f_0 = 50$ et $H = 4$ km, les rayons internes λ_1^{-1} , λ_2^{-1} , λ_3^{-1} valent respectivement 63, 31, 21 km. Chaque mode a une fréquence maximum (obtenue pour $l = 0$ et $k = -\lambda_n$) qui vaut :

$$\omega_n^{\max} = \frac{\beta}{2} \lambda_n^{-1}$$

Pour les trois premiers modes verticaux à une latitude de 30° seules les ondes de période supérieures respectivement à environ 4, 8, 12 mois existent. Les ondes qui ont des échelles grandes par rapport aux rayons internes deviennent non dispersives et ont les vitesses les plus élevées :

$$\frac{\omega_n}{k} = C_n = -\frac{\beta}{\lambda_n^2} \quad (3.5.6)$$

Ces vitesses respectivement de 8 cm s^{-1} , 2 cm s^{-1} , 0.9 cm s^{-1} pour les trois premiers modes verticaux s'atténuent très rapidement avec le degré du mode. Elles sont petites par rapport aux vitesses des particules dans les tourbillons de méso-échelle. Ces périodes très lentes et les vitesses de déplacement associées très petites ne conviennent donc pas pour décrire les échelles de temps plus rapides (de l'ordre du mois) des tourbillons de méso-échelle qui ont des échelles horizontales proches des rayons internes. Par contre la circulation générale et ses perturbations de plus grande échelle ont des vitesses qui sont dans la gamme de ces vitesses des premiers modes baroclines de sorte que ces derniers sont probablement très importants pour en décrire les évolutions.

3.6. La circulation forcée par le vent et la catastrophe de Gill

Bien que l'approximation QG_1 restreigne assez fortement l'extension méridienne des écoulements ($\gamma \ll 1$), ce modèle a fourni des éléments importants de la réponse d'un fluide stratifié à un forçage mécanique en surface et l'identification de ces limitations a été particulièrement fructueux pour faire émerger de nouvelles idées. Le problème est facile à formuler. Étant donné un forçage par un pompage d'Ekman à la base de la couche d'Ekman inférieure et les conditions aux limites sur la vitesse verticale w données par (3.4.16) et sur les vitesses horizontales (3.4.18) et (3.4.21), il s'agit de calculer ψ via (3.4.8).

La nouveauté par rapport au cas du fluide homogène est évidemment de découvrir quelle est la structure verticale de la circulation forcée par le vent en présence de stratification. Pour la circulation intérieure l'examen des non-linéarités de (3.4.8) montre que l'advection de vorticité relative peut être négligée à une très bonne approximation ($Bu \ll 1$) devant le terme de vortex stretching. Par contre, comme nous l'avons dit, des ondes avec des vitesses dans la gamme de celles de la circulation océanique, sont associées avec le terme de vortex stretching, de sorte qu'une certaine prudence s'impose. Néanmoins la simplicité suggère de regarder tout d'abord le problème linéaire.

On formule le problème linéaire du spin-up de la circulation forcée par un vent "allumé" de façon impulsive en $t = 0$, de sorte que pour $t > 0+$:

$$w = \frac{-f_0}{N^2} \psi_{zt} = w_E(\underline{x}) \quad \text{en } z = 0 \quad (3.6.1)$$

$$w = 0 \quad \text{en } z = -H$$

où w_E est un pompage d'Ekman imposé en surface et le fond est plat. Puisque les modes verticaux que nous avons étudiés forment une base complète, orthogonale de fonctions, il est approprié de chercher la solution de 3.5.1 et 3.6.1 sous la forme :

$$\psi(\underline{x}, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\underline{x}, t) \pi_n(z) \quad (3.6.2)$$

les π_n étant les modes verticaux pour une stratification de référence donnée. En multipliant 3.5.1 par π_n et en intégrant entre $z = -H$ et $z = 0$, les propriétés des π_n et les conditions aux limites permettent d'obtenir l'équation pour les A_n :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 A_n - \lambda_n^2 A_n) + \beta A_{nx} = \pi_n(0) f_0 w_E \quad (3.6.3)$$

Maintenant que les conditions aux limites en surface et au fond sont satisfaites, les conditions latérales sur un bassin avec des frontières méridiennes $x = 0, L$ sont imposés. En formulant exactement comme dans le cas du spin-up du fluide homogène (voir 2.4), on prend un forçage périodique en y et constant en x , de sorte que (3.6.3) après adimensionalisation de x par L et de t par $(\beta L)^{-1}$ devient :

$$R_{nxt} - \Lambda_n R_{nt} + R_{nx} = \frac{L}{\beta} \pi_n(0) f_0 w_E^0 \quad (3.6.4)$$

où $\Lambda_n = (1^2 + \lambda_n^2) L^2$ et w_E^0 sont des constantes. L'équation gouvernant le spin up stratifié est exactement identique avec (2.4.5) à la différence près que les valeurs de Λ_n sont considérablement plus élevées pour $n > 0$. Comme Λ_n est le nombre au carré de rayons de déformations par largeur de bassin, il est $O(1)$ pour le mode barotrope mais typiquement déjà 10^4 pour le 1^{er} mode barocline et augmentant comme n^2 pour les suivants. La solution pour un mode donné est la même qu'en fluide homogène mais la solution de Sverdrup pour ce mode s'établit à la vitesse des ondes longues du mode en question (soit $-\Lambda_n^{-1}$). Si on parle en jour pour ajuster la solution de Sverdrup barotrope dans le sillage des ondes longues, on va parler en années pour l'ajustement des modes baroclines. Pour un bassin de 5 000 km, les temps de transit des trois premiers modes verticaux mentionnés paragraphe 3.5 sont respectivement de 1.7, 6.9, 15 ans etc... Comme Λ_n tend vers l'infini avec n la solution de Sverdrup ne s'ajustera que pour t infini. On peut se demander quelle sera la forme de la solution intérieure lorsque $t \rightarrow \infty$. En équilibrant les deux derniers termes à droite de 3.6.4 et en intégrant à partir du bord Est on trouve :

$$A = \text{cste} e^{ily} (x - 1) \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n(0) \pi_n(z)$$

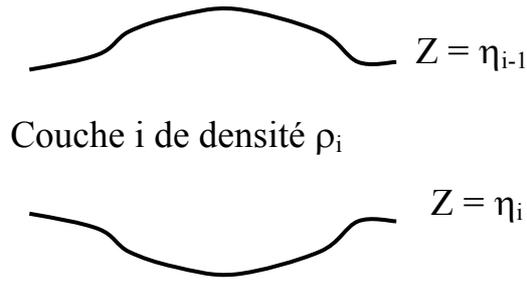
La somme de la série infinie n'est pas autre chose que la fonction de Dirac (1 en $z = 0$ et 0 ailleurs) de sorte que la structure verticale de la solution de Sverdrup en stratifié reproduit très fidèlement celle du forçage. Comme nous avons vu que l'intégrale verticale de la solution de Sverdrup est toujours reliée à w_E par (3.3.5), le transport de Sverdrup devient infini puisque confiné en surface. Cette solution ultime décrit ce qu'on appelle la catastrophe de Gill (Anderson-Gill 1975), catastrophe car il est clair que la solution mathématique à t infini nous emmène assez loin de la réalité physique. Si on se place à t fini, la situation décrite n'est pas si négative car elle nous apprend déjà que le passage des premiers modes baroclines a tendance à mettre au repos les couches profondes de l'océan qui était auparavant mises en mouvement dans la partie barotrope de l'écoulement. Si ce passage est donc possible sur des échelles de quelques années, on s'attend à ce que la circulation forcée par le vent soit intensifiée en surface. C'est un résultat déjà important bien que l'on soit loin d'avoir cerné les éléments qui contrôlent l'échelle verticale de cette circulation. Le caractère irréaliste de la solution à t infini amène à revoir nos hypothèses. On peut en fait critiquer :

1. L'hypothèse linéaire : pour une stratification donnée en QG, le forçage dû au vent est peut-être suffisamment intense pour que les modes baroclines à partir d'un certain degré soient fortement perturbés par la circulation de Sverdrup établie par les modes graves qui sont déjà passés notamment le premier, le mode barotrope).
2. L'hypothèse adiabatique-inviscide : il est peut-être impossible d'obtenir une circulation intérieure répondant à ce forçage mécanique sans générer en même temps des mouvements turbulents de plus petites échelles qui viendraient par exemple "lisser" la structure verticale singulière à t infini.
3. L'hypothèse QG : on a supposé que les perturbations en densité sont petites de sorte que les surfaces iso-densité restent confinées autour de leur position moyenne. Mais si le vent ou l'autre forçage majeur, les flux de chaleur sont suffisamment intenses pour déformer les surfaces iso-densité, celles-ci peuvent atteindre la surface. Le forçage peut alors les exciter directement dans ces endroits sans l'écran de la stratification moyenne des couches supérieures.
4. L'hypothèse d'une circulation intérieure : On a supposé que les effets de couche limite restent confinés aux parois et que ces couches limites ne se séparent pas. La réalité océanique est peut-être plus proche de la réalité aérodynamique qu'on ne le pense et peut-être est-ce justement des phénomènes de séparation de couches limites qui forcent en grande partie l'intérieur ?
5. L'hypothèse de la séparation des branches thermohalines et mécanique de la circulation : L'océan est forcé conjointement par le vent et les flux de chaleur (et $E - P$) et peut-être la comparaison d'une solution uniquement forcée par le vent avec les observations est par nature vouée à l'échec ?

Les réponses à ces questions sont loin de faire l'unanimité. On va néanmoins relaxer quelques-unes de ces hypothèses et examiner leurs conséquences. Compte tenu des difficultés techniques qui apparaissent, la remise en cause de certaines d'entre elles va être faite dans des cadres très idéalisés notamment pour ce qui concerne la représentation verticale de la stratification. Ceci nous amène à présenter les équations dans des modèles à couches de densité constante.

3.7 Les modèles à couches

Pour étudier les ondes longues de gravité on utilise souvent un modèle à une couche de fluide où la coordonnée verticale est la hauteur de la surface libre. Cette coordonnée joue le rôle de la pression sous l'hypothèse hydrostatique. Comme la coordonnée suit les mouvements verticaux de la surface libre, il s'agit d'une coordonnée lagrangienne qui permet de s'affranchir de la prise en compte explicite de la vitesse verticale. Celle-ci n'est pas nulle bien sûr mais est une variable asservie aux trois autres (vitesses horizontales et surface libre). Les modèles à couches de densité constante sont utilisés de la même manière pour "discrétiser" une stratification continue en densité. Les hauteurs des interfaces entre couches sont de nouvelles variables indépendantes et le mélange entre couches est interdit (on verra plus loin comment relaxer cette hypothèse). Sous l'hypothèse hydrostatique, les vitesses horizontales sont constantes dans chaque couche et subissent un saut à chaque interface. Les vitesses verticales sont données par la vitesse de déplacement des interfaces.



Considérons une couche i de densité ρ_i , d'épaisseur h_i prise en sandwich entre un interface supérieur ($z = \eta_{i-1}$) et inférieur ($z = \eta_i$). La relation hydrostatique et la continuité de la pression à l'interface η_i permettent de relier la pression p_i à un niveau fixe de la couche i à la pression p_{i+1} à un niveau fixe de la couche i + 1 :

$$p_{i+1} - p_i = (\rho_{i+1} - \rho_i) g \eta_i \quad (3.7.5)$$

D'autre part l'épaisseur h_i de la couche i est composé d'une partie fixe H_i et d'une partie variable reliée aux interfaces :

$$h_i = H_i + \eta_{i-1} - \eta_i \quad (3.7.6)$$

Avec ces deux relations de récurrence on peut trouver facilement les gradients de pression dans les modèles avec un nombre arbitraire de couche soit avec les variables η_i soit avec les variables h_i .

L'équation de continuité devient en variables h_i :

$$\frac{\partial h_i}{\partial t} + \nabla \cdot (h_i \underline{u}_i) = 0 \quad (3.7.7)$$

Pour les 2 couches par exemple les gradients de pression des couches supérieure et inférieure sont respectivement en variables η_i ou h_i :

$$\nabla p_1 = g \rho_1 \nabla \eta_0 = g \rho_1 \nabla (h_1 + h_2)$$

$$\nabla p_2 = g \rho_1 \nabla \eta_0 + g (\rho_2 - \rho_1) \nabla \eta_1 = g \rho_1 \nabla h_1 + g \rho_2 \nabla h_2$$

Dans le modèle à 2 couches il n'y a que deux degrés de liberté sur la verticale donc que deux modes verticaux, le mode barotrope et le premier mode barocline. Il est instructif de les déterminer en présentant une méthode systématique de recherche valable pour un nombre arbitraire de couches (Lamb, 1945). Supposons pour simplifier que l'approximation du toit rigide soit faite. Les équations du mouvement linéarisées pour chaque couche s'écrivent :

$$\mathfrak{L}(\underline{u}_i) = -\frac{\nabla p_i}{\rho_0} \quad (3.7.8)$$

où $\mathfrak{L}(\underline{u}_i)$ est l'opérateur linéaire "accélération" convenablement adapté à la dynamique choisie. La décomposition présentée n'est pas réduite à la seule dynamique QG. Puisque η_0 est nul,

l'équation de continuité 3.6.7 linéarisée pour chaque couche i s'écrit uniquement en fonction de l'interface η_i , lui-même relié à la différence des pressions $p_1 - p_2$ par (3.7.5) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(p_1 - p_2) + \rho_0 g' H_1 \nabla \cdot \underline{u}_1 &= 0 \quad (a) \\ \frac{\partial}{\partial t}(p_2 - p_1) + \rho_0 g' H_2 \nabla \cdot \underline{u}_2 &= 0 \quad (b) \end{aligned} \quad (3.7.9)$$

expressions où $g' = g(\rho_2 - \rho_1)/\rho_0$ est ce qu'on appelle la "gravité réduite" (réduite par un facteur $\Delta\rho/\rho_0$ qui, comme nous l'avons vu, est très petit). Il n'est pas facile de trouver des solutions de (3.7.8) et (3.7.9) car les mouvements des deux couches sont couplés par le déplacement de l'interface. Pour découpler le système, l'idée est de chercher des combinaisons linéaires des variables dépendantes de chaque couche qui obéissent à des équations ne faisant intervenir qu'une seule de ces combinaisons linéaires. En choisissant $\hat{u} = \underline{u}_1 + \mu \underline{u}_2$, on voit par (3.7.8) que \hat{u} est lié à une pression $\hat{p} = p_1 + \mu p_2$ via :

$$\mathfrak{f}(\hat{u}) = -\frac{\nabla \hat{p}}{\rho_0} \quad (3.7.10)$$

Si on additionne (3.7.9a) divisé par H_1 à μ fois (3.7.9b) divisée par H_2 on fait apparaître :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[p_1 \left(\frac{1}{H_1} - \frac{\mu}{H_2} \right) + p_2 \left(-\frac{1}{H_1} + \frac{\mu}{H_2} \right) \right] + \rho_0 g' \nabla \cdot \hat{u} = 0 \quad (3.7.11)$$

Pour que (3.7.11) et (3.7.10) forment un système "découplé", il faut que le premier terme entre crochets de (3.7.11) soit justement proportionnel à \hat{p} et donc exiger que :

$$p_1 \left(\frac{1}{H_1} - \frac{\mu}{H_2} \right) + p_2 \left(-\frac{1}{H_1} + \frac{\mu}{H_2} \right) = s \hat{p} \quad (3.7.12)$$

où s est une constante de proportionnalité, *valeur propre*, à déterminer. En remplaçant dans (3.7.12) \hat{p} par sa valeur $p_1 + \mu p_2$, on obtient une équation homogène linéaire en p_1 , p_2 . Comme elle doit être satisfaite pour p_1 et p_2 arbitraires, les coefficients multipliant p_1 et p_2 dans (3.7.12) doivent s'annuler :

$$\begin{aligned} \frac{1}{H_1} - \frac{\mu}{H_2} &= s \\ -\frac{1}{H_1} + \frac{\mu}{H_2} &= s\mu \end{aligned} \quad (3.7.13)$$

Ces deux équations pour les inconnues s et μ fournissent les modes verticaux. μ obéit à l'équation du second degré :

$$\mu^2 r + \mu(r - 1) - 1 = 0$$

où $r = H_1/H_2$ et dont les racines μ^\pm associées aux valeurs s^\pm sont :

$$\mu^- = -1 \quad ; \quad s^- = H/H_1H_2$$

$$\mu^+ = r^{-1} \quad ; \quad s^+ = 0$$

Le mode + dit barotrope est associé à la combinaison linéaire $H_1 \underline{u}_1 + H_2 \underline{u}_2$ qui n'est autre que le transport intégré sur les deux couches. Le fait que $s^+ = 0$ traduit le fait qu'avec un toit rigide, ce transport intégré est non divergent. Lorsque $\underline{f}(\underline{u})$ représente l'accélération des ondes de gravité, les ondes associés ont un ajustement à vitesse infinie : tout se passe comme si le fluide était infiniment profond.

Le mode – dit barocline est associé à la combinaison linéaire $\underline{u}_1 - \underline{u}_2$ et à la pression $p_1 - p_2$ (qui n'est autre que l'interface). Il traduit donc les mouvements internes et son équation de continuité est :

$$\frac{\partial p^-}{\partial t} + \rho_0 g' \frac{H_1 H_2}{H} \nabla \cdot \underline{u}^- = 0 \quad (3.7.14)$$

Lorsque \underline{f} représente l'accélération des ondes de gravité, on voit tout de suite que ce mode correspond aux ondes internes dont la vitesse de propagation $C_1^2 = g' H_1 H_2 / H$ est considérablement plus faible que celle du mode externe $C_e^2 = gH$ (obtenue lorsque l'approximation du toit rigide n'est pas faite). Pour $H_1/H_2 = 1/4$ (une couche de surface de 1 km pour un océan de 5 km de profondeur) et un $\Delta\rho/\rho_0$ de $4 \cdot 10^{-3}$, $C_1/C_e \sim 2.5 \cdot 10^{-2}$. Considérablement plus lentes que les ondes externes, ces ondes internes ont cependant des vitesses encore rapides par rapport aux vitesses de la circulation générale et des ses tourbillons (ici $C_1 = 1.8 \text{ m s}^{-1}$).

Une fois obtenue la dynamique pour chaque mode vertical, on peut re-composer le mouvement de chaque couche. En définissant vitesse (et pression) barotrope et barocline par :

$$H \underline{u}^+ = H_1 \underline{u}_1 + H_2 \underline{u}_2$$

$$\text{et } \underline{u}^- = \underline{u}_1 - \underline{u}_2$$

On obtient :

$$\underline{u}_1 = \underline{u}^+ + \frac{H_2}{H} \underline{u}^-$$

$$\underline{u}_2 = \underline{u}^+ - \frac{H_1}{H} \underline{u}^-$$

Les vitesses associées au mode barotrope sont identiques dans chaque couche alors que les vitesses baroclines, opposées dans chaque couche, sont dans le rapport $u_1/u_2 = -H_2/H_1$. L'intensification observée en surface de la circulation océanique (et des tourbillons) indique sur la base de ce rapport l'importance du mode barocline pour ces mouvements.

Pour simplifier encore leurs équations, les océanographes font souvent usage du modèle à gravité réduite ou encore à 1 1/2 couche qui stipule que la vitesse dans la couche 2 est nulle (et donc également le gradient de pression). Ceci apparaît pour une composition particulière du mode barotrope et du mode barocline à savoir $\underline{u}^+ = H_1/H \underline{u}^-$. Compte tenu des rapports des vitesses dans les couches 1 et 2 du mode barocline, on voit que cette approximation dépend

d'une grande profondeur de la couche 1 par rapport à la couche 2 et donc de la proximité de la thermocline de la surface. Dans le cas à 1 ½ couche avec surface libre, (3.7.5) et (3.7.6) indique que surface libre η_0 et interface η_1 sont liés par :

$$\eta_0 = -\frac{(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1} \eta_1$$

et h_1 l'épaisseur de la seule couche active est :

$$h_1 = -\frac{\rho_2}{\rho_1} \eta_1 = \frac{\rho_2}{(\rho_2 - \rho_1)} \eta_0 \quad (3.7.15)$$

Les variations d'épaisseur de la couche sont donc très grandes par rapport à celles de la surface libre mais la reflètent parfaitement.

3.8 L'instabilité barocline

Compte tenu de l'incapacité d'une théorie linéaire de décrire la circulation océanique en présence de la stratification, il va nous falloir prendre en compte la présence des termes d'advection dans la dynamique. Avant de tenter de déterminer cette circulation moyenne et compte tenu de la présence manifeste des tourbillons océaniques et de leur caractère barocline nous allons tout d'abord étudier le problème de la stabilité d'un écoulement donné a priori. La situation océanique n'est pas sans rappeler celle de l'atmosphère des moyennes latitudes où les jets zonaux "intensifiés en altitude" apparaissent très souvent perturbée par les dépressions cycloniques que nous connaissons bien. Charney (1947) et Eady (1949) ont, les premiers, découvert l'instabilité dite barocline par laquelle un écoulement cisailé verticalement en milieu stratifié devient instable lorsque la rotation augmente. Compte tenu du rôle généralement pacificateur de la rotation, le concept est déroutant. L'objectif n'est pas ici de faire un résumé détaillé de cette instabilité (voir Pedlosky, 1987) mais d'en montrer les bases physiques et de nous permettre dans un deuxième temps d'apprécier la valeur, vis-à-vis de cette instabilité, des solutions diverses apportées pour remédier à la catastrophe de Gill.

• *Modèle à 2 couches*

L'essentiel de cette instabilité peut être décrit dans le cadre d'un modèle à deux couches proposé par Phillips (1951). L'approximation du toit rigide sera effectuée. Notre circulation océanique consiste dans sa plus simple expression à un courant, géostrophique, zonal, constant dans la première couche superposé sur un autre similaire dans la deuxième couche mais d'amplitude différente. Leurs fonctions courant respectives sont :

$$\bar{\psi}_1 = -U_1 y \quad \text{et} \quad \bar{\psi}_2 = -U_2 y$$

Comme U_1 et U_2 sont différents, (3.7.5) nous indique qu'une pente de l'interface $\bar{\eta}_1$ existe lorsque le flot est géostrophique :

$$\bar{\eta}_{1y} = \frac{f_0}{g'}(U_1 - U_2) \quad (3.8.1)$$

où $g' = g(\rho_2 - \rho_1)/\rho_0$. Cette relation (dite de Margules) n'est pas autre chose que l'équation du vent thermique pour le modèle à deux couches. Si on suit l'idée donnée par les observations que le flot de la couche 2 est plus faible que celui de la couche 1, (3.8.1) indique que l'interface remonte vers le pôle (équateur) pour un courant de surface vers l'Est (Ouest). La question de base que l'on se pose est : ce courant moyen est-il stable ? Pour répondre à cette question, il faut tout d'abord obtenir la version à deux couches du modèle quasi-géostrophique (3.4.8) si on part sur l'idée que les perturbations de ce type d'écoulement, des tourbillons de diamètre de l'ordre de la centaine de kms et des vitesses de l'ordre de la dizaine de cm s^{-1} , leur permettent d'être efficacement décrits par l'approximation QG_1 . Le plus instructif est de repartir de l'équation de vorticité réécrite dimensionnellement et valable dans chacune des deux couches :

$$H_i \frac{D_i}{Dt} (\xi_i + By) = (-1)^i f_0 w_1 \quad (3.8.2)$$

où D_i/Dt est l'opérateur d'advection par les vitesses géostrophiques. Si on suppose que l'interface η_1 entre les deux couches est imperméable au transfert de particules fluides d'une couche vers l'autre alors :

$$w_1 = \frac{D_i}{Dt} \eta_1 \quad (3.8.3)$$

L'équation qui joue en fait le rôle de l'équation pour la température (ou la flottabilité) est l'équation de continuité pour chacune des couches (ici linéarisée comme dans QG_1) :

$$\frac{\partial h_i}{\partial t} + \underline{U}_i \cdot \nabla h_i + H_i \nabla \cdot \underline{u}_i = 0 \quad (3.8.4)$$

En effet dans un modèle à couche de densité (et donc de température) constante, la conservation de la chaleur se résume à une conservation de la masse. Mais compte tenu de (3.7.6) et de l'approximation du toit rigide, (3.8.3) et (3.8.4) sont en fait des "équations identiques". En effet h_i est simplement $(-1)^i \eta_1$ et $H_i \nabla \cdot \underline{u}_i = -(-1)^i w_1$. Physiquement lorsque l'épaisseur de la couche 1 diminue, on peut dire que sa masse diminue mais donc aussi sa température moyenne $\rho_1 h_1$ au bénéfice de celle de la couche du bas puisque $\sum_i \rho_i h_i$ est

constant. Comme $\eta_1 = \frac{f_0}{g'}(\psi_2 - \psi_1)$ d'après l'équation du vent thermique, l'élimination de w_1 entre (3.8.2) et (3.8.3) donne la version cherchée de l'équation quasi-géostrophique à deux couches :

$$\frac{D_i}{Dt} [\nabla^2 \psi_i - F_i(\psi_i - \psi_j) + \beta y] = 0 \quad j \neq i \quad (3.8.5)$$

où $F_i^{-1/2} = (g' H_i)^{1/2}/f_0$ a la forme d'un rayon interne de déformation pour la couche i . L'importance relative des trois termes qui composent (3.8.5) peut être revue en adimensionalisant ψ par U^*L , et les échelles horizontales par L , (3.8.5) devient alors :

$$\frac{D_i}{Dt} [B_u \nabla^2 \psi_i - \hat{F}_i (\psi_i - \psi_j) + \hat{\beta} y] = 0 \quad (3.8.6)$$

où $\hat{F}_i = (H/H_i)$, $\hat{\beta} = \beta a^2/U^*$ et $B_u = a^2/L^2$ et où un rayon interne $a = (g'H)^{1/2}/f_0$ défini sur l'épaisseur totale H a été introduit. On retrouve le nombre de Burger B_u et $\hat{\beta}$ comme des mesures des vorticités relative et planétaire respectivement vis-à-vis du terme de vortex stretching. Pour l'écoulement moyen zonal, (3.8.6) est satisfaite identiquement, car la vorticité potentielle moyenne

$$Q_i = \hat{\beta} y + \hat{F}_i (U_i - U_j) y \quad (3.8.7)$$

n'étant fonction que de y , l'écoulement moyen s'effectue le long des contours $Q_i = \text{constante}$. En introduisant la décomposition entre écoulement moyen et perturbations $q_i = Q_i + q'_i$ et $\psi_i = \Psi_i + \psi'_i$ dans (3.8.6) et en linéarisant on obtient :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U_i \frac{\partial}{\partial x} \right) q'_i + v'_i \frac{dQ_i}{dy} = 0 \quad (3.8.8)$$

où $q'_i = B_u \nabla^2 \psi'_i - \hat{F}_i (\psi'_i - \psi'_j)$. Les équations (3.8.7) et (3.8.8) déterminent un problème de valeurs propres une fois précisées les conditions aux limites aux bornes du domaine. Pour simplifier la présentation en suivant Bretherton (1966), on choisit deux couches d'égale épaisseur, une vitesse moyenne $+U$ dans la couche supérieure et $-U$ dans la couche inférieure, et on suppose provisoirement $\hat{\beta} \ll 1$ de sorte que (3.8.7) se réécrit :

$$Q_1 = 2F U y \quad \text{et} \quad Q_2 = -Q_1 \quad (3.8.9)$$

Les gradients de vorticité potentielle de l'état moyen sont égaux et opposés dans les deux couches et (3.8.8) devient :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) q'_1 + \psi'_{1x} Q_y = 0 \quad (a) \quad (3.8.10)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - U \frac{\partial}{\partial x} \right) q'_2 - \psi'_{2x} Q_y = 0 \quad (b)$$

Les perturbations de vp peuvent changer par simple advection par le courant moyen et par l'advection de la vp moyenne par les vitesses méridiennes perturbées, terme assimilable à un terme de génération comme nous allons voir. Les deux équations (3.8.10a) et (3.8.10b) sont couplées par l'expression de q'_i qui dépend de l'interface entre les deux couches $\psi'_1 - \psi'_2$. Il est instructif de réaliser comment les ψ'_i sont reliées aux vp q'_i . Si q'_i est de la forme $\Re_e[q_i e^{ikx}]$ et ψ'_i de la forme $\Re_e[\psi_i e^{ikx}]$ pour un domaine infini (ou périodique) alors :

$$\begin{aligned}\psi_1 + \psi_2 &= -\frac{(q_1 + q_2)}{B_u K^2} \\ \psi_1 - \psi_2 &= -\frac{(q_1 - q_2)}{B_u K^2 + 2F}\end{aligned}$$

où les primes ont été supprimés et $K^2 = |\underline{K}|^2$. En résolvant pour ψ_1 et ψ_2 :

$$\begin{aligned}\psi_1 &= -\frac{[q_1(B_u K^2 + F) + q_2 F]}{B_u K^2(B_u K^2 + 2F)} \\ \psi_2 &= -\frac{[q_1 F + q_2(B_u K^2 + F)]}{B_u K^2(B_u K^2 + 2F)}\end{aligned}\tag{3.8.11}$$

Supposons des ondes courtes de sorte que $B_u K^2 \gg 2F$, une vp q_1 dans la première couche est alors associée à des perturbations de pression (vitesse) :

$$\psi_1 \sim -q_1/(B_u K^2) \quad \text{et} \quad \psi_2 \sim F/(B_u K^2)\psi_1$$

Les perturbations sont essentiellement confinées dans la couche 1. A ces échelles les couches sont effectivement découplées, la gravité empêchant une déformation significative de l'interface. Pour les ondes longues, $B_u K^2 \ll 2F$, c'est l'inverse, les couches sont fortement couplées, et une vp q_1 dans la première couche est associée avec des pressions (vitesses) $\sim -q_1/(2 B_u K^2)$ identiques dans les deux couches.

Il est utile d'introduire le mode barotrope $\psi^+ = (\psi_1 + \psi_2)$ et barocline $\psi^- = (\psi_1 - \psi_2)$ et les vp barotropes $q^+ = q_1 + q_2$ et baroclines $q^- = q_1 - q_2$ associées :

$$q^+ = B_u \nabla^2 \psi^+ \quad \text{et} \quad q^- = B_u \nabla^2 \psi^- - 2F \psi^-$$

Le résultat précédent montre qu'une vp barotrope q^+ produit une réponse barotrope en pression d'autant plus grande que les échelles sont grandes alors qu'une vp barocline produit une réponse en pression barocline bornée $-q^-/2F$. Les équations (3.8.10) en termes de ces nouvelles variables se réécrivent :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} q^+ + U \frac{\partial q^-}{\partial x} + \psi_x^- Q_y &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} q^- + U \frac{\partial q^+}{\partial x} + \psi_x^+ Q_y &= 0\end{aligned}\tag{3.8.12}$$

où $Q = Q_1$. En termes des composantes de Fourier, ces équations deviennent :

$$\begin{aligned}\frac{\partial q^+}{\partial t} + C^- ikq^- &= 0 \\ \frac{\partial q^-}{\partial t} + C^+ ikq^+ &= 0\end{aligned}\tag{3.8.13}$$

$$\text{où } C^- = U - \frac{Q_y}{B_u K^2 + 2F} \quad \text{et} \quad C^+ = U - \frac{Q_y}{B_u K^2}.$$

Soit en éliminant $\partial q^+/\partial t$ par exemple dans (3.8.13) :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} q^- + k^2 C^- C^+ q^- = 0 \quad (3.8.14)$$

Ainsi, grâce au couplage des modes, des solutions croissantes exponentiellement sont possibles si $C^- C^+$ dans (3.8.14) est négatif c'est-à-dire compte tenu de l'expression de Q_y si :

$$B_u K^2 < \frac{Q_y}{U} = 2F$$

Il existe donc une coupure de l'instabilité aux petites échelles K_c telle que $B_u K_c^2 = 2F$. Ceci correspond à une échelle dimensionnelle $1/K_c^d = a/2$ soit la moitié du rayon interne précédemment défini. L'instabilité dépend de la valeur relative des termes d'advection et de génération de vp dans (3.8.11) et (3.8.12). Globalement l'advection domine à petite échelle et la génération à grande échelle. Les deux sont comparables directement dans (3.8.13) où lorsqu'on réécrit les termes :

$$C^- = U \left(1 - \frac{1}{B_u K^2 / 2F + 1} \right)$$

$$C^+ = U \left(1 - \frac{2F}{B_u K^2} \right)$$

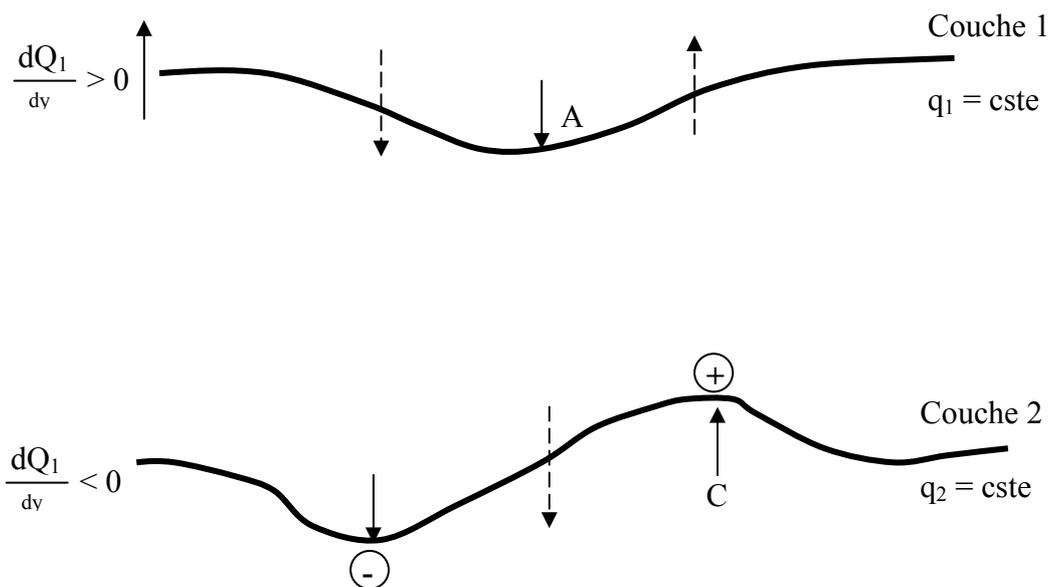
C^- la vitesse d'advection de q^- est positive aux grandes échelles (l'advection domine) alors que C^+ la vitesse d'advection de q^+ est négative (car les termes de génération dominent).

La figure jointe montre le cas instable ($C^- > 0$, $C^+ < 0$) : initialement seule q^- est présente. De la vp q^+ apparaît décalée de $\pi/2$ vers la droite sous l'effet de l'advection C^- . En réponse à q^+ , de la nouvelle vp q^- apparaît mais décalée cette fois de $\pi/2$ vers la gauche de sorte que la distribution initiale de q^- se trouve renforcée.

Dans le cas stable de courte longueur d'onde, les couches sont essentiellement découplées et il est plus simple de revenir à (3.8.10) et de considérer le cas par exemple où $q'_1 \gg q'_2$ et $\psi'_1 \gg \psi'_2$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) B_u \nabla^2 \psi'_1 + Q_{1y} \psi'_{1x} = 0$$

On voit que les ondes stables piégées en surface sont essentiellement des ondes de Rossby topographiques de vitesse de phase $U - Q_{1y}/B_u K^2$ pour lesquelles l'interface moyen joue le rôle d'une pente du fond. La solution analogue décrit des ondes piégées au fond de vitesse de phase vers l'Ouest $-(U + Q_{1y}/B_u K^2)$.



On peut offrir l'argument physique suivant pour expliquer cette instabilité en référence à la figure. Imaginons un courant perturbé vers le Sud dans la couche 1 (déplacement du point A). Il induit une v_p q_1 positive dans cette couche puisque dQ_1/dy est positif. A cette perturbation est associée une pression ψ'_1 négative. Compte tenu de (3.8.11) il apparaît aussi dans la couche 2 une pression ψ'_2 de même signe (négative) et en phase avec la couche 1. Cette perturbation ψ'_2 (qui est du même ordre que ψ'_1 si l'échelle de l'anomalie de v_p est dans le voisinage du rayon interne) crée à son tour deux anomalies de v_p dans la couche 2, l'une positive à l'Est par déplacement du point C, l'autre négative à l'Ouest par déplacement du point A. Compte tenu de leurs signes, ces deux anomalies dans la couche 2 créent à leur tour dans la couche 1 une advection vers le Sud qui renforce l'anomalie initiale. Cet argument montre que, dans une situation instable, les v_p de même signe sont toujours déphasés sur la verticale : pour un courant moyen vers l'Est qui augmente vers la surface, les anomalies de v_p de surface sont déphasées vers l'Ouest par rapport au fond. C'est aussi la signature classique d'une cyclogenèse dans l'atmosphère des moyennes latitudes. Ce déphasage vertical peut être calculé directement à partir de (3.8.10) lorsque le taux de croissance est calculé via (3.8.14)..

Dans l'instabilité barocline la gravité est un effet stabilisant qui tend à rendre indépendante les couches alors que la rotation responsable du couplage via le vortex stretching est l'élément déstabilisant. Pour que la rotation soit efficace, l'échelle doit être grande par rapport au rayon interne. Dans la limite très grande longueur d'onde ($BuK^2 \ll F$), C^- tend vers zéro mais C^+ tend vers $-\infty$ et on peut voir que le taux de croissance reste positif (il varie comme kU). La figure montre que ce taux de croissance est maximum pour des échelles proches du rayon

interne. Compte tenu de ce que cette instabilité est une interaction entre modes, la vorticité relative reste néanmoins essentielle [$Bu \sim 0(1)$]. L'approximation PG pour lequel le mode barotrope devient diagnostique supprime l'instabilité dans le modèle à deux couches. (L'ajout de couches supplémentaires permet à des interactions entre modes baroclines plus élevés de re-générer l'instabilité en PG mais uniquement si l'effet β est présent car sinon les vitesses verticales sont identiquement nulles).

Comme l'instabilité barocline reste présente à grande échelle, il apparaît nécessaire de voir l'influence de β dont nous avons vu l'association avec l'existence de modes stables de Rossby lorsque la circulation moyenne est absente. La seule chose qui change dans la théorie précédente est que maintenant les gradients moyens de vp dans chaque couche ne sont plus égaux et opposés mais :

$$\begin{aligned} Q_1 &= (\hat{\beta} + 2\hat{F}U)y \\ Q_2 &= (\hat{\beta} - 2\hat{F}U)y \end{aligned}$$

Les équations équivalentes à (3.8.12) sont modifiées par l'ajout du dernier terme ci-dessous :

$$\begin{aligned} \frac{\partial q^+}{\partial t} + U \frac{\partial q^-}{\partial x} + \psi_x^- \left(\frac{Q_{1y} - Q_{2y}}{2} \right) + \psi_x^+ \left(\frac{Q_{1y} + Q_{2y}}{2} \right) &= 0 \quad (a) \\ \frac{\partial q^-}{\partial t} + U \frac{\partial q^+}{\partial x} + \psi_x^+ \left(\frac{Q_{1y} - Q_{2y}}{2} \right) + \psi_x^- \left(\frac{Q_{1y} + Q_{2y}}{2} \right) &= 0 \quad (b) \end{aligned} \quad (3.8.15)$$

Comme $(Q_{1y} + Q_{2y})/2 = \hat{\beta}$ on voit que l'équilibre du premier et dernier terme de (3.8.15a) et (3.8.15b) décrit la dynamique des ondes barotropes et baroclines respectivement de sorte que l'on peut s'attendre à ce que si le cisaillement est petit devant $\hat{\beta}/\hat{F}$, ces ondes soient simplement modifiées par le cisaillement moyen mais restent stables. Le terme fondamental de génération de vp reste le troisième comme précédemment. Lorsque l'on cherche des solutions de (3.8.15) en $\text{Re} [e^{i\omega t + kx}]$, ω est donné par :

$$\frac{\omega}{k} = -\frac{\hat{\beta}}{B_u K^2} - \frac{\hat{\beta}}{B_u K^2 + 2\hat{F}} \pm \frac{2[\beta^2 \hat{F}^2 + U^2 B_u^2 K^4 (B_u^2 K^4 - 4\hat{F}^2)]^{1/2}}{B_u K^2 (B_u K^2 + 2\hat{F})}$$

On voit que le taux de croissance sera positif ($I_M(\omega) < 0$) si deux conditions sont réunies :

- 1) $B_u K^2 < 2\hat{F}$
- 2) $[B_u^2 K^4 (4\hat{F}^2 - B_u^2 K^4)] > \hat{\beta}^2 \hat{F}^2 / U^2$

La première condition est la coupure ondes courtes précédemment trouvée mais la deuxième est nouvelle et implique une valeur minimum du cisaillement moyen lorsque β est présent. L'examen de la condition 2 montre qu'un minimum est obtenu pour $BuK^2 = \sqrt{2} \hat{F}$, de sorte que si $2U > \hat{\beta}/\hat{F}$, on est assuré de l'instabilité à cette valeur de K . Dimensionnellement cette condition revient à ce que le cisaillement $U_s = U_1 - U_2 = 2U$ soit tel que :

$$|U_s| > \frac{\beta g' H_1}{f_0^2}$$

Le cisaillement doit ainsi être supérieur à 4 fois la vitesse de l'onde de Rossby barocline pour que le système soit instable. La condition 2 montre également qu'une coupure grande longueur d'onde apparaît toujours pour des K suffisamment petits. L'aspect stabilisateur de β apparaît ainsi à travers ces deux effets (existence d'un cisaillement minimum et coupure grande longueur d'onde). Il est possible de dériver une condition nécessaire d'instabilité très générale en adaptant le théorème de Rayleigh pour l'instabilité de cisaillement en 2D au cas quasi-géostrophique, continûment stratifié. Charney-Stern ont ainsi montré que la condition du point d'inflexion revient, dans ce contexte, à ce que le gradient moyen de v_p change de signe quelque part dans le domaine. Dans le cas présent, si le gradient moyen de v_p dans la couche 1 est positif ($U_1 > 0$), celui de la couche 2, dQ_2/dy sera négatif si $2U > \hat{\beta}/\hat{F}$, ce qui est précisément la condition précédente obtenue via la relation de dispersion.

• **Energétique**

L'instabilité barocline est une instabilité de cisaillement mais paradoxalement la source d'énergie n'est pas cinétique mais potentielle. Il est plus simple de discuter l'énergétique en repartant des équations primitives (sous l'approximation hydrostatique) plutôt que de l'équation quasigéostrophique. Une équation pour l'énergie cinétique "horizontale" est obtenue en multipliant scalairement l'équation du mouvement par \underline{u}_H et en intégrant sur le domaine. Comme l'écoulement moyen est constant horizontalement, l'équation pour l'énergie cinétique des fluctuations $\overline{K'} = \rho_0 \overline{(|u'_H|^2)}/2$ se réduit à :

$$\frac{\partial \overline{K'}}{\partial t} = -\overline{u'_H \cdot \nabla p'} \quad (3.8.16)$$

où la barre supérieure désigne l'intégrale sur le volume du domaine considéré. On retrouve à droite la partie horizontale du travail des forces de pression. Mais dans un domaine où les frontières sont immobiles (toit rigide), le travail total des forces de pression est nul pour un fluide incompressible, $\underline{u} \cdot \nabla p \equiv 0$. On peut alors réécrire (3.8.16) :

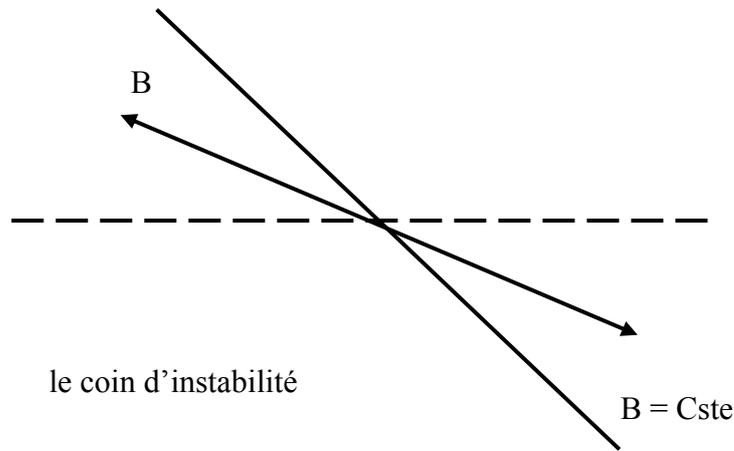
$$\frac{\partial \overline{K'}}{\partial t} = \overline{w' p'_z} \quad (3.8.17)$$

(On peut aussi retrouver directement 3.8.17 par intégration par parties de (3.8.16) et utilisation de la continuité). En utilisant l'hydrostatique et en utilisant la flottabilité $b' = -gp'/\rho_0$, (3.8.17) devient :

$$\frac{\partial \overline{K'}}{\partial t} = \rho_0 \overline{w' b'} \quad (3.8.18)$$

Pour que K' augmente dans l'instabilité barocline, il faut que le fluide chaud ($b' > 0$) monte ou que le fluide froid ($b' < 0$) descende. Cette situation demandée rappelle la convection de Rayleigh Bénard à la différence près que dans cette dernière, la stratification est instable. i.e. paroi chaude (froide) en bas (haut). Hors ici le système est stratifié stablement ($N^2 > 0$). Il faut alors se rappeler que les isothermes sont penchés avec disons le chaud au Sud (et en surface) et le froid au Nord (et au fond), distribution moyenne en équilibre via le vent

thermique. On voit qu'il est possible de réunir les conditions $\overline{w'b'} > 0$ si les particules se déplacent au cours de l'instabilité dans l'angle formé par les isothermes et l'horizontale.



Sur la figure la particule A qui se déplace vers le Nord et vers le haut ($w' > 0$) apparaît comme une perturbation chaude ($b' > 0$) lorsque placée dans l'environnement plus froid du point B. Un raisonnement identique pour une particule allant de B vers A indique que l'échange des deux particules A et B est également associé à un flux de chaleur $\overline{v'b'}$ positif. Ceci peut être vu via l'équation pour la flottabilité. En multipliant par b' et en intégrant sur le volume :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \overline{b'^2} = -\overline{u'_H b'} \frac{\nabla B}{B_z} - \overline{w'b'} \quad (3.8.19)$$

et après utilisation de (3.8.17) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \frac{\rho_0 \overline{b'^2}}{B_z} + K' \right) = -\rho_0 \overline{u'_H \cdot b'} \frac{\nabla B}{B_z} \quad (3.8.20)$$

Le premier terme à droite s'interprète comme l'énergie potentielle des perturbations qui apparaît donc comme mesurée par la variance de la flottabilité. L'ensemble du terme de droite, l'énergie totale des perturbations, ne croît que si le flux $\overline{u'_H b'}$ est dirigé en bas du gradient moyen (down-gradient) lorsque le système est stratifié stablement ($B_z > 0$), c'est-à-dire dans l'exemple précédent justement si $\overline{v'b'} > 0$: l'instabilité barocline lie énergétiquement le transport de chaleur par les perturbations et l'existence même des perturbations. La question à ce point est de savoir ce qui alimente l'énergie des perturbations. On voit dans 3.8.20 que la pente moyenne des iso-flottabilités (isothermes) $\nabla B/B_z$ joue un rôle fondamental. En effet dès lors que cette pente existe l'état moyen possède un stock d'énergie potentielle qui peut se rendre disponible pour alimenter les perturbations : l'énergie potentielle moyenne en effet diminue lorsque la pente moyenne diminue ce qui est justement possible si les déplacements de particules se font dans le coin d'instabilité illustré sur la figure. Ce n'est lorsque que la pente est nulle, que l'énergie potentielle disponible (APE : Available Potential Energy) est épuisée. A ce moment là le cisaillement vertical du courant moyen est nul aussi. Au final c'est bien la géostrophie qui permet l'existence de ce stock d'énergie potentielle. A contrario

l'énergie cinétique associée avec le cisaillement moyen vertical ne joue aucun rôle. A ces échelles quasi-géostrophiques les tensions de Reynolds $\overline{u'_H w'}$ sont beaucoup trop petites car la rotation force les w' à être de l'ordre du nombre de Rossby. En fait le nombre de Richardson N^2/U_z^2 qui gouverne l'instabilité de Kelvin Helmholtz est très supérieur à un lorsque des valeurs typiques de la circulation océanique sont choisies de sorte que le courant est stable vis-à-vis de cette instabilité.

• **Lien avec les observations**

Il n'est pas exagéré de dire que le mécanisme d'instabilité barocline est sans doute un des plus importants à l'œuvre dans l'océan. Il l'est déjà dans l'atmosphère pour générer les perturbations des moyennes latitudes et est à l'origine de l'horizon de prévision très limité des bulletins météorologiques. Le rôle de ces perturbations est là fondamental pour transporter la chaleur de l'équateur vers les pôles aux moyennes latitudes en s'alimentant sur l'énergie potentielle disponible associée à la distribution des vents d'Ouest (jet-stream) en altitude. Dans l'océan on peut s'attendre à voir opérer cette instabilité chaque fois que des gradients horizontaux de densité importants apparaissent. Ce peut être dans l'intérieur ou près des frontières. Lorsque ces gradients sont concentrés sur des fronts de faible largeur, l'instabilité est mixte, barotrope-barocline, puisque la source d'énergie cinétique associée au cisaillement horizontal est également présente. L'intensité tourbillonnaire observée dans tous les océans à des échelles de 50 à 200 km aux latitudes supérieures à 30° est probablement générée par cette instabilité de façon prédominante, probablement seulement car il est toujours difficile d'extraire la signature du mécanisme dans des observations difficiles à réaliser. Certes les tourbillons ont des échelles un peu supérieures aux rayons interne du 1^{er} mode barocline et sont donc dans le voisinage du maximum du taux de croissance de cette instabilité. On aimerait être capable aussi de déceler des flux turbulents de chaleur $\overline{v'T'}$ capables de relâcher l'énergie potentielle moyenne. Ceci a été montré dans certaines occasions au large du Gulf Stream (Expérience LDE) et dans le courant Antarctique circumpolaire (ACC). La géométrie d'anneau zonal de ce dernier est semblable à la géométrie atmosphérique de sorte que les tourbillons ont un rôle climatique important par leur transport de chaleur. Dans les océans fermés par des frontières méridiennes, le rôle climatique des tourbillons n'est pas si évident car les courants de frontière quasi-permanents comme le Gulf Stream ou le Kuro-Shivo (permis par la géométrie bloquée) effectuent déjà une bonne partie du transport de chaleur.

La comparaison avec l'atmosphère est instructive aussi vis-à-vis du rayon interne qui compte tenu des différences de stratification est dix à vingt fois plus grand dans l'atmosphère que dans l'océan. Ceci a une conséquence importante sur la partition entre énergie potentielle et cinétique des circulations. La relation 3.8.20 qui introduit énergie potentielle et cinétique peut être écrite en quasigéostrophie comme :

$$\begin{aligned} \text{APE} &= \frac{1}{2} \rho_0 f_0^2 \overline{\psi_z^2} / N^2 \\ \text{K} &= \frac{1}{2} \rho_0 \overline{|\nabla\psi|^2} \end{aligned} \tag{3.8.21}$$

où la barre désigne une intégration sur le volume du domaine et $\underline{u} = \underline{k} \times \nabla\psi$ et $b = f_0 \psi_z$ ont été utilisés. Lorsque ψ a des échelles horizontales et verticales l et h respectivement, le rapport APE/K varie comme :

$$\frac{\text{APE}}{K} \sim \frac{f^2 l^2}{N^2 h^2} = \text{Bu}^{-1}$$

Comme pour la circulation océanique moyenne intérieure (à l'exclusion des fronts quasi-permanents), le nombre de Burger Bu est très petit, l'énergie est dominée par l'énergie potentielle. Celle-ci est visualisée par l'excursion verticale densité visible sur les sections transocéaniques. A contrario il y a une meilleure équipartition entre les deux formes d'énergie pour les tourbillons océaniques qui sont proches du rayon interne. Un zoom sur une section transocéanique montre en effet que la pente des iso-densités varie rapidement sur des échelles beaucoup plus petites. Cette variance de la pente est justement la signature de l'énergie cinétique (voir (3.8.21)).

Si une fraction μ de l'énergie potentielle moyenne disponible est convertie par l'instabilité barocline en énergie tourbillonnaire (supposée équipartitionnée), on voit que :

$$\frac{K_{\text{tourbillon}}}{K_{\text{circulation}}} = \mu \text{Bu}_{\text{circulation}}^{-1}$$

Une chose que l'on peut mesurer aujourd'hui par suivi de flotteurs lagrangiens est justement le rapport entre les énergies cinétiques perturbées et moyennes et ce rapport est d'un, voire de deux, ordres de grandeur dans l'intérieur. Cette observation indique que la fraction μ de conversion d'énergie potentielle moyenne n'est certainement pas petite compte tenu du fait que l'inverse du nombre de Burger de la circulation est lui-même $O(100)$!

Commentaires :

La présence de cette instabilité, si elle ne peut ruiner les rêves d'obtention d'une solution laminaire de la circulation océanique en milieu stratifié, rend, en tous cas leur réalisation infiniment moins probable. Les modèles numériques actuels initialisés par le champ de densité moyen observé et tournant à haute résolution animent les bassins océaniques avec une turbulence quasi-géostrophique qui se compare favorablement avec les observations tout au moins en ce qui concerne leur amplitude (voir Smith 1999). La circulation océanique est donc, semble-t-il, liée pour le meilleur et pour le pire à la turbulence quasi-géostrophique, limite à amplitude finie des perturbations instables considérées ici.

3.9. Le modèle à une couche et demie de Parsons – Veronis

Basé sur l'observation que, dans le gyre subtropical, il existe une couche chaude stratifiée au-dessus d'une couche froide peu stratifiée et beaucoup plus épaisse, il est tentant d'examiner le problème de la circulation forcée par le vent dans un modèle à deux couches. Si de plus on adhère à l'idée du spin-up linéaire, la couche du fond est mise au repos après le passage des ondes de Rossby longues barotropes. Il est intéressant d'examiner les conséquences de cette hypothèse en suivant Parsons 1969 et Veronis (1980 + références). Dans cette théorie, intérieur géostrophique et couche d'Ekman ne sont pas séparés. Lorsqu'on intègre

verticalement sur l'épaisseur de la couche, le vent apparaît alors comme une force de volume distribuée :

$$f \underline{k} \times \underline{u} = -g' \nabla h + \frac{\underline{\tau}}{\rho_0 h} \quad (3.9.1)$$

$$\nabla \cdot (h \underline{u}) = 0 \quad (3.9.2)$$

où h est l'épaisseur de la couche active (voir (3.7.15)) et \underline{u} représente donc la somme des vitesses d'Ekman et des vitesses géostrophiques. Ces équations correspondent essentiellement à une formulation PG du problème. Compte tenu de (3.9.2), une fonction transport ϕ peut être introduite qui obéit à la relation de Sverdrup :

$$\beta \phi_x = h \nabla \times \left(\frac{\underline{\tau}}{\rho_0 h} \right) \quad (3.9.3)$$

Si on néglige, dans (3.9.3), l'effet des variations de h et si on prend un vent seulement zonal, le forçage à droite devient $-\rho_0^{-1} \frac{d\tau_x}{dy}$. Ceci permet d'obtenir en intégrant à partir du bord Est ($x = x_E$) :

$$\rho_0 \phi(x) = \beta^{-1} \int_{x_E}^x \frac{d\tau_x}{dy} dx \quad (3.9.4)$$

La profondeur de la couche active, la seule nouveauté par rapport au cas fluide homogène, s'obtient via (3.9.1) :

$$-f\phi_x = -\frac{\partial}{\partial x} \left(g' \frac{h^2}{2} \right) + \frac{\tau_x}{\rho_0} \quad (3.9.5)$$

Soit après usage de (3.9.3) :

$$\frac{\rho_0 g'}{2} \frac{\partial}{\partial x} h^2 = -\frac{f}{\beta} \frac{d\tau_x}{dy} + \tau_x \quad (3.9.6)$$

Ce qui fournit en intégrant à partir du bord Est :

$$h^2(x_1, y) - h^2(x_E) = \frac{2f^2}{\beta g' \rho_0} \int_{x_E}^x \frac{d}{dy} \left(\frac{\tau_x}{f} \right) dx \quad (3.9.7)$$

$h^2(x_E)$ étant une constante d'intégration. Si le vent n'a pas de composante méridienne, la condition de vitesse nulle au bord Est, implique que $h(x_E)$ est indépendant de y . Une considération de conservation du volume global de la couche de surface est alors suffisante pour fixer $h(x_E)$. Celle-ci connue, la profondeur au bord Ouest peut être obtenue de (3.9.7) ou encore plus simplement de (3.9.5) en intégrant à travers la largeur totale du bassin :

$$\frac{g'}{2} [h^2(0, y) - h^2(x_E)] = -x_E \frac{\tau_x}{\rho_0} \quad (3.9.8)$$

Cette équation qui indique que la somme du transport géostrophique et du transport d'Ekman est nulle montre que la profondeur sur le bord Ouest $h(0,y)$ est plus petite (grande) que $h(x_E)$ selon que le vent est d'Ouest ou d'Est. Dans le régime des vents d'Ouest, il peut exister un vent à une latitude y_S pour lequel $h(0,y)$ atteint zéro et la couche profonde affleure en surface :

$$\frac{1}{2}g'h^2(x_E) = x_E \frac{\tau_x(y_S)}{\rho_0} \quad (3.9.9)$$

Si le vent continue à augmenter pour des latitudes supérieures à y_S , la ligne d'affleurement $x = X_w(y)$ se sépare de la côte et part dans l'intérieur. Si on néglige l'influence du vent sur la couche 2 exposée (ce que l'on n'a aucune raison de faire), on peut déterminer la position $X_w(y)$ de l'affleurement à chaque latitude en intégrant (3.9.5) entre le bord Est et cette position :

$$\frac{g'h^2}{2}(x_E) = [x_E - x_w(y)] \frac{\tau_x}{\rho_0}$$

Cette équation donne la longitude jusqu'où intégrer le transport d'Ekman vers le Sud pour qu'il s'équilibre avec le transport géostrophique maximum vers le Nord. Dans ces conditions le courant de bord Ouest suit la ligne d'affleurement et se sépare de la côte à $y = y_S$ donné par 3.9.9. Cette latitude est différente de la latitude du rotationnel de vent nul que prédiraient les théories du Chapitre 2. Avoir le "Gulf Stream" qui se sépare de la côte américaine à la bonne latitude est un défi pour toutes les solutions numériques de bassins réalistes car il engendre des anomalies géographiques considérables de diverses propriétés dans l'intérieur du bassin lorsqu'on compare les solutions aux données. Si des arguments locaux ont souvent été avancés (topographie, frottement, conditions aux limites) pour rationaliser la séparation, le présent argument global apparaît comme ayant une force certaine à l'intérieur bien sûr des limitations du modèle à une couche et demi.

3.10 Le modèle à 2 couches de Rhines – Young

Une avancée importante dans la compréhension de la structure verticale de la circulation a été effectuée par Rhines-Young 1982 dans le cadre de la formulation QG₁ à 2 couches. Cette avancée théorique est apparue au moment où les premières simulations QG haute résolution c'est-à-dire résolvant les tourbillons de méso-échelles commençaient à être réalisées par Holland (1978) également dans le cadre QG. La théorie présentée n'est pas en fait une vraie théorie QG₁ puisqu'elle néglige la vorticité relative devant le terme d'étirement dans (3.4.8). C'est la limite $Bu \ll 1$ du QG qui est explorée ici. Dans ces conditions, les équations stationnaires de (3.8.5) deviennent :

$$J(\psi_1, q_1) = \frac{f_0}{H_1} w_E + D_1 \quad (a) \quad (3.10.1)$$

$$J(\psi_2, q_2) = D_2 \quad (b)$$

où $q_i = F_i (\psi_j - \psi_i) + \beta y$. Les termes D_i sont des termes paramétrisant les échanges verticaux de quantité de mouvement dus aux tourbillons de méso-échelle. Pour l'instant il nous suffit de savoir que la moyenne verticale de ces termes est nulle, les tourbillons ne pouvant pas créer mais seulement redistribuer la quantité de mouvement ou de la vorticité. Il n'y a pas d'autres termes de dissipation explicite dans les équations (3.10.1).

Le fond est supposé plat (ou bien encore on considère que le modèle est à 2 couches actives au-dessus d'une troisième au repos). L'équation pour le mode barotrope $H \psi_B = H_1 \phi_1 + H_2 \psi_2$ obéit à :

$$\beta \psi_{Bx} = \frac{f_0 w_E}{H} \quad (3.10.2)$$

dont la solution intégrée depuis le bord Est est toujours :

$$\psi_B = \frac{f_0 w_E (y)(x - x_E)}{\beta H} \quad (3.10.3)$$

Dans la limite de $Bu \ll 1$ la connaissance de ψ_B permet de linéariser les deux équations (3.10.1). En effet avec $\psi_1 = (H\psi_B - H_2 \psi_2)/H_1$ et $\psi_2 = (H\psi_B - H_1\psi_1)/H_2$ l'équation (3.10.1) devient :

$$\begin{aligned} J(\psi_1, \hat{q}) &= f_0 \frac{w_E}{H_1} + D_1 \quad (a) \\ J(\psi_2, \hat{q}) &= D_2 \quad (b) \end{aligned} \quad (3.10.4)$$

où $\hat{q} = \beta y + F\psi_B$ avec $F = f_0^2 H / g' H_1 H_2 = R_i^{-2}$, où R_i est le rayon interne modèle à 2 couches (c'est-à-dire celui qui est lié à la valeur propre du mode barocline (Voir paragraphe 3.7). Les contours de \hat{q} , appelés contours géostrophiques, sont maintenant connus de sorte que (3.10.4a) et (3.10.4b) sont *linéaires*. Les contours géostrophiques sont les caractéristiques de l'équation différentielle partielle du premier ordre. Dans la couche 2, ψ_2 est obtenue en intégrant depuis une frontière, le forçage de la couche 2 le long des caractéristiques. En l'absence de tel forçage explicite de la couche, et dans les régions irriguées par les caractéristiques venant d'une frontière où la vitesse est nulle, on en déduit que $\psi_2 = 0$. Comme ψ_B tend vers 0 au bord Est, $\hat{q} (\cong \beta y)$ l'intersecte et donc en l'absence de forçage inférieur, tous les contours connectés au Bord Est impliquent $\psi_2 = 0$. Nous retrouvons ici la catastrophe de Gill dans le cadre du modèle à 2 couches. La simplicité du modèle permet d'entrevoir une issue régionale à la catastrophe globale. En effet compte tenu de l'expression de \hat{q} , la forme du gyre peut s'imprimer et déformer suffisamment les contours de \hat{q} pour que certains d'entre eux n'intersectent plus le bord Est mais plutôt le bord Ouest.

Si on dénote s la coordonnée le long des caractéristiques, celles-ci obéissent à :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= -\hat{q}_y = F \left(U_B - \frac{\beta}{F} \right) \quad (a) \\ \frac{dy}{ds} &= \hat{q}_x = F V_B \quad (b) \end{aligned} \quad (3.10.5)$$

On voit immédiatement que les caractéristiques sont guidées vers le Sud (dans le gyre subtropical) par le flot de Sverdrup mais peuvent émaner de l'Est (l'Ouest) selon que $U_B - \beta/F$ est négatif (positif). Comme $-\beta/F$ n'est autre que C_1 la vitesse des ondes de Rossby longues du seul mode barocline présent dans le 2 couches (voir (3.5.6) et (3.7.14)), la forme des contours géostrophiques dépend de $U_B + C_1$. Si U_B est dirigé vers l'Est et suffisamment fort (dans la partie Nord du gyre subtropical), les ondes de Rossby du 1^{er} mode barocline sont arrêtées par le flot de Sverdrup et forcées de descendre vers le Sud pour atteindre l'Ouest. La zone d'ondes

arrêtées va être d'autant plus grande que le forçage du vent est grand. A l'Ouest de la frontière où $U_B + C_1 = 0$, les caractéristiques sortent puis re-rentrent dans la frontière Ouest. En principe une grande diversité de solutions est possible pour "remplir" ce coin isolé au Nord-Ouest dans la couche 2 (voir figure). Rhines-Young 1982 ont opté pour une solution faiblement dissipée où les caractéristiques se re-connectent l'une à l'autre dans une couche limite de bord Ouest, couche limite qui pourrait avoir la structure d'une couche de Munk ou de Stommel du chapitre 2, les fortes vitesses dans la couche limite du courant de retour permettant de boucler les contours de \hat{q} dans cette région. L'hypothèse est donc celle d'une recirculation locale complètement passive sur le bord Ouest du gyre subtropical. Le problème est maintenant de déterminer ψ_2 . Compte tenu de (3.10.1b) ceci est équivalent à déterminer q_2 . En effet :

$$q_2 = \beta y + F_2(\psi_1 - \psi_2) \quad (3.10.6)$$

Compte tenu de ψ_B , (avec (3.10.3) convenablement généralisé pour inclure maintenant la couche limite de bord Ouest), (3.10.6) se ré-écrit :

$$q_2 = \beta y + F(\psi_B - \psi_2) \quad (3.10.7)$$

De sorte que si q_2 est connu, ψ_2 est donné par :

$$\psi_2 = (\hat{q} - q_2)/F \quad (3.10.8)$$

Dans la limite de faible dissipation (D_2 petit dans l'équation (3.10.4b)), on peut dire que :

$$\psi_2 = A_2(\hat{q})$$

et donc :

$$q_2 = \hat{q} - F A_2(\hat{q}) \quad (3.10.9)$$

Les contours de q_2 et de \hat{q} sont identiques, seul reste à déterminer la fonction A_2 puisque \hat{q} est déterminée par le flot de Sverdrup. Le résultat (3.10.9) laisse augurer que l'essentiel du chemin a été fait, mais le reste ramène une fois de plus à des hypothèses sur la dissipation, dans le cas présent, la dissipation de la vorticité potentielle. On peut le voir en repartant de l'équation de départ (3.10.4b) que l'on intègre horizontalement à l'intérieur d'un contour $\psi_2 = \text{cste}$. Comme l'intégrale du terme d'advection est nulle, il ne reste que :

$$\iint_{\psi_2} D_2 dA = 0 \quad (3.10.10)$$

Des paramétrisations diverses de D_2 , dues à la dissipation sur le fond ou au frottement vertical des couches l'une sur l'autre ont permis à Rhines et Young de déterminer $A_2(\hat{q})$ via la condition intégrale (3.10.10). Parmi toutes les paramétrisations possibles, l'une particulièrement séduisante (et simple) mise en avant par Rhines et Young (1982) suppose une loi de diffusion classique pour la vorticité potentielle de sorte que $D_2 = D \nabla^2 q_2$ où D est un coefficient de diffusion turbulent représentant l'activité des tourbillons de méso-échelle qui transporteraiient la vorticité potentielle moyenne de méso-échelle "down-gradient". Dans ces conditions (3.10.10) permet d'écrire :

$$D \int_{\psi_2} \nabla q_2 \cdot \underline{n} dl = 0 \quad (3.10.11)$$

le flux net de vorticité potentielle étant effectivement condamné à s'annuler. Si on suppose que les diffusions de ψ_2 reste très faible devant la recirculation, c'est-à-dire si le nombre de Peclet $Pe = UL/D$ est grand, on écrit alors que :

$$q_2 = Q(\psi_2) \text{   } O(Pe^{-1}) \quad (3.10.12)$$

De sorte qu'à l'ordre d'approximation Pe^{-1} , (3.10.9) devient :

$$D \frac{dQ}{d\psi_2} \oint_{\psi_2} \nabla \psi_2 \cdot \underline{n} \, dl = 0 \quad (3.10.13)$$

Puisque l'intégrale est non nulle, on déduit :

$$\frac{dQ}{d\psi_2} = 0$$

La vorticité potentielle q_2 est homogène à l'intérieur de la zone de recirculation. Ce résultat dépend entièrement de la validité de la paramétrisation "diffusive" des flux turbulents de vorticité potentielle. Même si dans des cas idéalisés cette paramétrisation semble relativement plausible, elle repose au final sur les propriétés statistiques d'échange de ψ_2 entre tourbillons et circulation moyenne pour lesquelles les résultats rigoureux manquent. La démonstration d'homog nisation de ψ_2 est en fait calquée sur le cas de la recirculation d'un flot 2D non stratifié. En présence de dissipation moléculaire, Batchelor (1956) a démontré en 2D cette homog nisation de la vorticité relative dans les zones de recirculation laminaire pour les grands nombres de Reynolds. Son application au cas d'un écoulement turbulent quasi-géostrophique, stratifié reste plus ouverte. Dans l'hypothèse d'une ψ_2 homogène dans la zone de recirculation, on peut conclure la solution de la façon suivante. A la frontière Nord du gyre subtropical la valeur de q_2 au point où $U_B + C_1 = 0$ détermine q_2 dans toute la région de re-circulation. En ce point on écrit $q_2 = \beta L$ car ψ_B est nul et on interdit a priori la communication avec la zone subpolaire au Nord et donc $\psi_1 = 0$. L'équation (3.10.8) fournit alors ψ_2 :

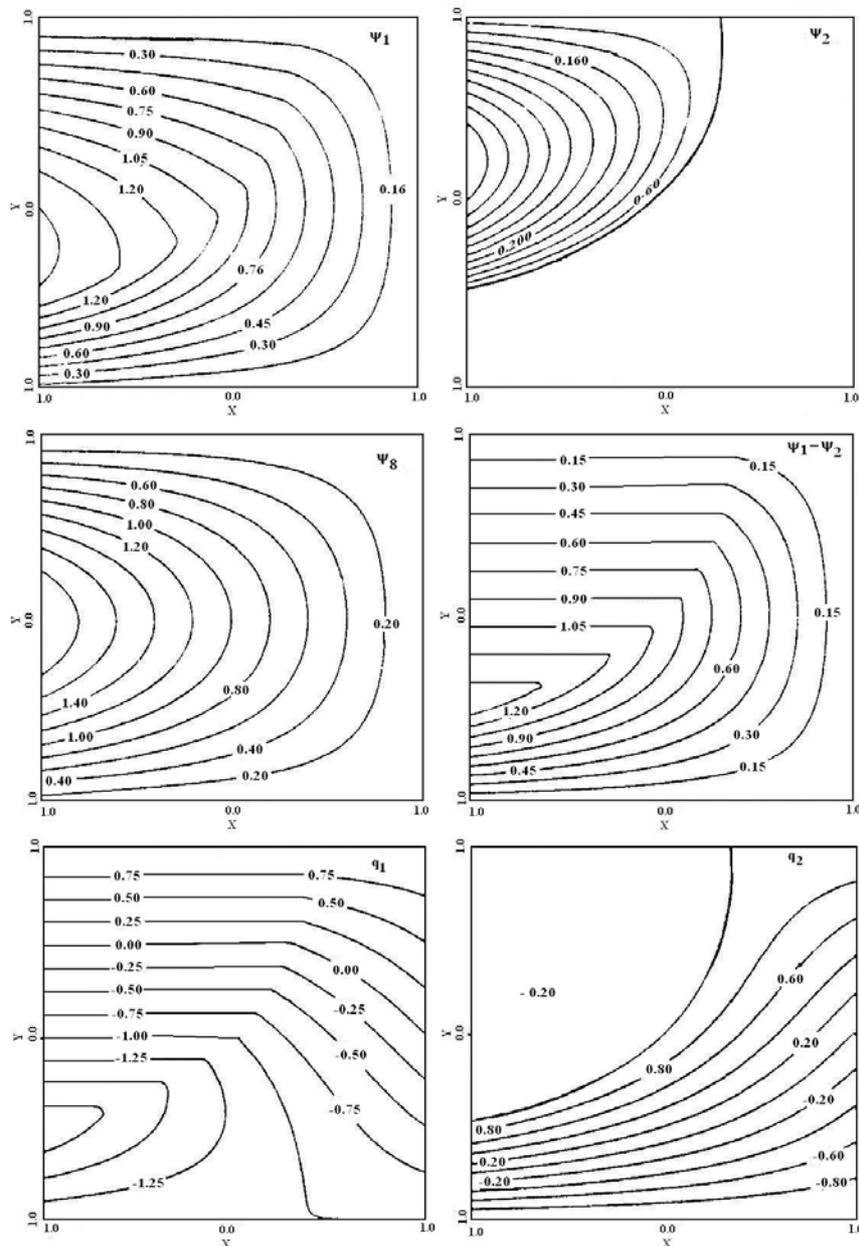
$$\psi_2 = \psi_B + \frac{\beta}{F}(y - L) \quad (3.10.14)$$

On peut vérifier que ψ_2 est nul sur le contour \hat{q} où $U_B + C_1 = 0$ pour assurer la continuité avec la région Est au repos. Connaissant ψ_2 et ψ_B la solution ψ_1 s'en déduit :

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{H}{H_1} \psi_B && \text{dans la région Est} \\ \psi_1 &= \psi_B - \frac{H_2}{H_1} \frac{\beta}{F}(y - L) && \text{dans la région Ouest} \end{aligned} \quad (3.10.15)$$

La solution (3.10.14) et (3.10.15) fournit une solution pour éviter la catastrophe de Gill. Elle a été étendue au cas d'une stratification continue par Rhines-Young. Elle dépend entièrement de l'existence d'un mélange diffusif de vorticité potentielle suffisamment faible par rapport à l'advection ($Pe \gg 1$). Il y a une co cidence heureuse qui indique au moins que l'existence d'instabilités baroclines est possible à l'intérieur de la zone de recirculation. En effet la condition sur le cisaillement à sa frontière $U_B = \beta/F$ est précisément aussi le critère marginal

d'instabilité pour le modèle à deux couches de Phillips (voir paragraphe 3.8). La question de la stabilité de la solution (3.10.12) et (3.10.13) n'a pas été étudiée mais si on applique le critère correspondant aux flots zonaux du 2 couches à cette solution on voit que $U_1 - U_2 = \frac{H}{H_1} \frac{\beta}{F}$ excède le critère marginal d'instabilité. On peut donc penser sur cette base que cette solution est effectivement associée à la présence de tourbillons de méso-échelle dont on espère qu'ils diffusent irréversiblement la vp de l'écoulement moyen. La théorie Rhines-Young est fondamentalement une théorie d'interaction avec la turbulence géostrophique. Si l'on effectue un spin-up à partir du repos de ce type de modèles, les ondes de Rossby longues vont lentement stopper le flot à l'Est de la recirculation. Comme elles ne pénètrent pas à l'Ouest, le flot en profondeur doit être ajusté par d'autres mécanismes pour que dans un premier temps un cisaillement vertical se crée puis que les instabilités éventuellement homogénéisent la vp. La seule solution est via une interaction avec le bord Ouest qui n'a pas été non plus explorée.



De nombreuses simulations numériques QG à 2, 3, 4 etc... couches ont été effectuées dans le cadre d'un bassin à 2 gyres forcé par une distribution antisymétrique w_E négatif (positif) au Sud (Nord). Dans toutes ces simulations (voir par exemple Holland, Schmitz 1985), les couches sous la première présentent une zone de v_p homogène très impressionnante axée sur le jet central d'Est au milieu du bassin. A l'extérieur de ces zones le fluide est au repos alors qu'à l'intérieur, des gyres de recirculation du même signe que ceux en surface mais d'extension méridienne plus faible apparaissent. La théorie semble prédire remarquablement bien la situation du modèle. Le mécanisme d'homogénéisation n'est probablement pas celui à la Batchelor envisagé par Rhines-Young car le nombre de Peclet de ces recirculations moyennes n'est pas spécialement grand mais surtout parce qu'un mécanisme plus puissant existe dans la situation du "double gyre". En effet dans la couche 2 et au-dessous, les courants de bord Ouest du gyre subpolaire et du gyre subtropical ramènent des anomalies opposées de v_p typiquement $+\beta L$ et $-\beta L$ (si $2L$ est l'extension méridienne du bassin) dans la région la plus énergétique où elles ne demandent qu'à se mélanger sans avoir besoin de recirculer de nombreuses fois autour de leurs gyres respectifs. Il devrait être possible de contraster le cas du gyre simple ou double vis-à-vis de ces mécanismes de mélange. Il reste en tout cas remarquable que la théorie effectuée sous l'hypothèse de $Bu \ll 1$ prédise aussi bien le cas numérique où la vorticité relative n'est pas négligée.

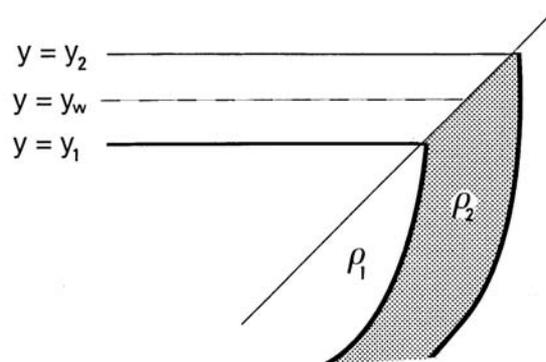
Commentaires :

- La structure verticale de la circulation forcée par le vent est contr ol e par la possibilité de l'homog nisation de v_p . Pour que le terme de stretching soit de l'ordre de grandeur de βy , il faut que le flot évolue sur l'échelle verticale déjà mentionnée $\delta_R = \frac{f}{N} \left(\frac{U}{\beta} \right)^{1/2}$, échelle qui apparaît comme fondamentale pour contrôler la profondeur verticale de pénétration du flot de Sverdrup selon cette théorie.
- L'homog nisation de v_p correspond à la situation ou l'interface entre la couche 1 et 2 prend une forme telle que les hauteurs des colonnes profondes parallèles à l'axe de rotation soient constantes, condition pour la liberté de mouvement prescrite par le théorème TPP.
- Les modèles numériques QG qui résolvent les tourbillons ont été les premiers à reconstruire des distributions d'énergie cinétique turbulentes dérivées des instabilités de la circulation forcée par des vents constants, distributions qui dans le même temps commençaient à être connues par trajectographies de bouées de surface, flotteurs acoustiques, et plus récemment altimètres.

3.11. La thermocline ventilée de Luyten, Pedlosky, Stommel (LPS)

En 1983, ces auteurs ont proposé une idée simple pour résoudre le problème de la catastrophe de Gill. Si l'on s'écarte de la quasi-géostrophie et que l'on permet aux surfaces iso-densités d'atteindre la surface, on voit que le pompage d'Ekman dans la partie Nord du gyre subtropical sera capable d'agir directement sur les couches profondes et donc de les mettre en mouvement. Cette idée est a priori séduisante puisque effectivement cet affleurement des isopycnes (outcrop) est observé. Normalement la position de ces affleurements doit faire partie de la solution cherchée. Cependant il n'y a pas que les vents d'Ouest qui agissent pour rendre compte de la remontée des isopycnes en surface. Les pertes de chaleur dans le coin

Nord Ouest du gyre lorsque le courant de bord Ouest se sépare de la côte sont fondamentales (voir Chapitre 4). Lorsqu'on s'intéresse à l'Atlantique Nord, on est frappé par le fait que la dérive Nord Atlantique est une succession de fronts thermiques assez étroits, sur lesquels les pertes de chaleur ont agi pour tirer les isopycnes vers la surface. Il y a un couplage entre le forçage thermodynamique et la circulation. Techniquement le problème dans un modèle à couches est alors analogue à un problème de surface libre et il n'a pas été abordé. LPS ont résolu un problème plus simple en imposant a priori lignes d'affleurement des isopycnes. Évidemment une bonne partie du résultat est présupposée lorsqu'on part dans cette direction et tout se passe comme si la température et donc la densité étaient imposées en surface. La solution du problème illustre néanmoins de nouveaux régimes régionaux très intéressants. La dynamique choisie est celle de l'approximation PG ($Bu \ll 1$ et $\gamma \sim O(1)$) et la géographie du forçage est celle de la figure



La ligne du zéro du pompage d'Ekman est dénotée par y_w . On ne va considérer que deux couches en mouvement de densité ρ_1 et ρ_2 au-dessus d'une couche profonde immobile de densité ρ_3 . Le mélange est négligé et ces couches sont adiabatiques. Les densités sont imposées mais les profondeurs des couches sont libres : la couche 1 de surface affleure à une latitude constante y_1 au Sud de y_w et la couche 2 quelque part au Nord de y_w . L'océan a une frontière à l'Est qui va jouer son rôle habituel dans la détermination de la solution. La frontière Ouest est implicite car la solution LPS n'aborde pas véritablement comment s'effectue la connexion à l'Ouest. h_1 et h_2 désignent la profondeur totale de chacune des deux couches et $h = h_1 + h_2$. En utilisant les résultats de 3.7, les gradients de pression dans chaque couche isopycnale sont maintenant reliés aux profondeurs des couches par :

$$\begin{aligned} \nabla p_1 / \rho_1 &= \gamma_1 \nabla h_1 + \gamma_2 \nabla h \\ \nabla p_2 / \rho_2 &= \gamma_2 \nabla h \end{aligned} \quad (3.11.1)$$

où γ_1 et γ_2 sont des gravités réduites : $\gamma_1 = g(\rho_2 - \rho_1)/\rho_1$, $\gamma_2 = g(\rho_3 - \rho_2)/\rho_2$. Dans la région au Nord de y_1 , seule la couche 2 est présente et donc la relation de Sverdrup se réduit à :

$$\beta h_2 v_2 = f w_E \quad (3.11.2)$$

Après utilisation de la relation géostrophique pour v_2 on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial x} h_2^2 = \frac{2f^2}{\beta\gamma_2} w_E$$

relation qui s'intègre comme d'habitude à partir du bord Est et donne :

$$h_2^2 = D_0^2 + H_2^2(x_E) \quad (3.11.3)$$

avec :

$$D_0^2 = \frac{-2f^2}{\beta\gamma_2} \int_x^{x_E} w_e dx$$

Comme D_0^2 est positif dans le gyre subtropical et une fonction croissante de $x_E - x$, la couche 2 s'enfoncé vers l'Ouest à partir de sa valeur H_2 donnée au bord Est. Celle-ci apparaît comme une constante d'intégration qu'il est nécessaire d'imposer. Elle est constante également en y car si $u_2 = 0$ en $x = x_E$, la géostrophie impose $\partial H_2 / \partial y = 0$ à la frontière. Comme au Sud de y_w , 3.11.2 nous indique que v_2 est vers le Sud, le fluide de la couche 2 atteint la ligne y_1 où 2 couches actives sont présentes. Au Sud de y_1 la relation de Sverdrup devient :

$$\beta(h_1 v_1 + h_2 v_2) = f w_E \quad (3.11.4)$$

La couche 2 maintenant isolée du forçage et pour laquelle tout mélange avec d'autres couches est interdit, conserve sa vorticité potentielle :

$$\underline{u}_2 \cdot \nabla q_2 = 0$$

soit encore :

$$J(h, f/h_2) = 0$$

La vp q_2 de la couche 2 est donc une fonction de la pression h dans la couche :

$$f/h_2 = G(h)$$

La fonction G peut se déterminer puisque la vp est connue en $y = y_1$: $G(h) = f_1/h$ (où f_1 est la valeur de f en y_1). Ainsi pour tous les points de la couche 2 connectés par une trajectoire fluide à y_1 , on a :

$$h_1 = (1 - f/f_1)h \quad (3.11.5)$$

Une deuxième relation entre h et h_1 peut être trouvée en remplaçant v_1 et v_2 par leurs valeurs géostrophiques dans 3.11.4 :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h^2 + \frac{\gamma_1}{\gamma_2} h_1^2 \right) = \frac{2f^2 w_E}{\beta\gamma_2}$$

Soit encore en intégrant à partir de $x = x_E$,

$$h^2 + \gamma_1/\gamma_2 h_1^2 = D_0^2 + H^2 + \gamma_1/\gamma_2 H_1^2 \quad (3.11.6)$$

Si on souhaite satisfaire la condition de vitesse normale au bord Est sur chacune des couches on voit que les deux constantes qui apparaissent dans (3.11.6), H et H_1 , doivent être indépendantes de y . Mais comme h_1 est nul en y_1 , ceci implique $H_1 = 0$ et donc que la couche 1 affleure aussi sur le bord Est, un aspect de la solution qui est clairement irréaliste. Il est possible que ceci vienne d'une sur-spécification des conditions aux limites pour le modèle PG inviscide, adiabatique. Si l'on se contente de spécifier que le transport barotrope $h_1 u_1 + h_2 u_2$ zonal est nul, on obtient la condition alternative en $x = x_E$ que :

$$H^2(x_e, y) + \gamma_1/\gamma_2 H_1^2(x_e, y) = \text{constante}$$

Puisqu'en $y = y_1$, $H_1 = 0$ et $H = H_2$ (constante apparue pour la solution dans la région $y > y_1$), la continuité des pressions le long du bord Est donne :

$$H^2(x_e, y) + \gamma_1/\gamma_2 H_1^2(x_e, y) = H_2^2 \quad (3.11.7)$$

Le problème intérieur dépend alors du choix d'une seule constante d'intégration $H_1(x_e, y)$ disons, et la condition ci-dessus fournit $H_2(x_e, y)$. Cette formulation présuppose l'existence d'une couche limite entre la solution intérieure et le bord Est pour boucler les transports baroclines et satisfaire la condition de vitesse normale nulle à la paroi pour chaque couche.

Pour des trajectoires démarrant en y_1 , (3.11.5) et (3.11.6) permettent de déterminer entièrement la solution pour $y < y_1$:

$$h = \left[\frac{(D_0^2 + H_2^2)}{1 + \gamma_1/\gamma_2 (1 - f/f_1)^2} \right]^{1/2} \quad (3.11.8)$$

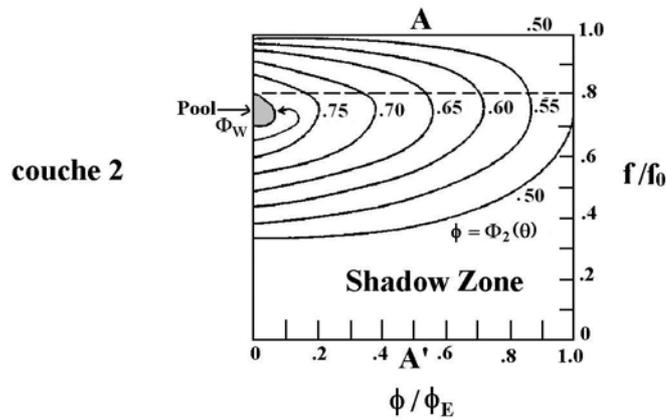
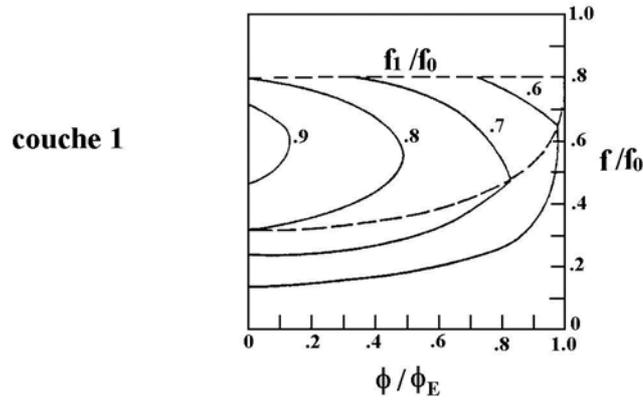
Ceci a été calculé dans le cas de la condition aux limites $H_1 = 0$ au bord Est, utilisée par LPS. Cette relation (3.11.8) ne peut s'appliquer directement au bord Est car les particules de la couche 2 qui veulent aller vers le Sud ne peuvent pas conserver leur $vp f/h_2$ et satisfaire la condition h_2 constant à la frontière. Les trajectoires des particules de la couche 2 qui sont données par l'équation $h = \text{cst}$ doivent nécessairement s'éloigner du bord Est. La trajectoire d'une particule qui quitte l'affleurement de la couche 2 au point x_1, y_1 , est alors donnée par :

$$\frac{D_0^2(x, y) + H_2^2}{1 + \gamma_1/\gamma_2 (1 - f/f_1)^2} = D_0^2(x_1, y_1) + H_2^2 \quad (3.11.9)$$

La trajectoire limite qui part du coin Nord Est en $x = x_E$ satisfait donc :

$$D_0^2(x, y) = H_2^2 \frac{\gamma_1}{\gamma_2} (1 - f/f_1)^2 \quad (3.11.10)$$

Compte tenu de D_0^2 , on voit que cette trajectoire s'incurve progressivement vers l'Ouest lorsque la particule va vers le Sud.



Le résultat principal de cette théorie est de montrer que le fluide de la couche 2 peut être mis en mouvement, les particules effectuant une subduction sous la couche 1 en y_1 . Mais cette "ventilation" de la couche 2 n'est pas possible à l'est de la trajectoire limite donnée par (3.11.10) et le fluide n'étant pas directement forcé ni connecté à une zone active ne peut être qu'au repos $u_2 = v_2 = 0$. Ceci implique $h = \text{cste}$ dans cette "zone d'ombre". Alors $h = H_2$ et $h_1 = (\gamma_2/\gamma_1)^{1/2} D_0$ complètent la solution dans cette région où la couche 1 directement forcé supporte tout le transport de Sverdrup. La prédiction de cette zone d'ombre sur le bord Est du gyre subtropical est un des résultats essentiels de la théorie LPS avec bien sûr la possibilité de subduction au Sud de y_w . Au Nord de la ligne y_w , seule la couche 2 est en mouvement, dont l'épaisseur est toujours donnée par (3.11.3). Comme maintenant le pompage d'Ekman w_E est positif, la fonction D_0^2 est négative forçant la base de la couche 2 à remonter vers la surface qu'elle atteindra à une longitude x_2 donnée par :

$$\frac{2f^2}{\beta\gamma_2} \int_{x_2}^{x_E} W_E \, dx = H_2^2$$

A l'Ouest de x_2 , la couche 3 est exposée et peut à son tour être mise en mouvement. On constate l'impossibilité d'imposer les lignes d'affleurement dans le gyre subpolaire qui sont déterminées naturellement par la solution. (On constate aussi que la ligne d'affleurement ne peut atteindre le bord Est). En clair l'imposition de la densité en surface dans le gyre subpolaire conduit à un problème mal posé. Le problème de la communication entre le gyre subtropical et subpolaire a aussi été abordé (Pedlosky 1984, Schopp and Arhan, 1986). La solution de deux gyres, subtropical et subpolaire, isolés avec des vitesses nulles dans chaque

couche à la latitude y_w est une solution possible mais ces auteurs ont montré que ce n'est pas la seule. Lorsque au moins deux couches actives sont considérées à y_w , des fenêtres de communication baroclines entre les deux gyres existent correspondant aux longitudes où les ondes de Rossby baroclines sont arrêtées par le flot de Sverdrup vers l'Est ($U + C = 0$). Dans le modèle Rhines-Young, une seule telle longitude existait à l'Ouest de laquelle une recirculation via le bord Ouest était possible. Mais en théorie planétaire géostrophique, la vitesse des ondes varie localement avec la profondeur des couches de sorte qu'une véritable fenêtre s'ouvre entre les gyres. Schopp, 1988 a montré comment une telle solution se construit dans le temps lorsque l'interface est maintenue constante à des profondeurs différentes sur les bords Est et Ouest.

Plusieurs éléments d'observations sont compatibles avec la théorie LPS dans le gyre subtropical. La mesure dans l'Océan du couple tritium – Hélium permet de mesurer l'âge des masses d'eaux depuis qu'elles ont quitté la surface. En effet, la concentration en Hélium 3, nulle en surface, s'enrichit en profondeur par décroissance radioactive du Tritium injecté en premier dans l'atmosphère dans les années 1960 lors des tests d'explosion nucléaire. Jenkins montre que l'âge augmente régulièrement sur les surfaces isopycnes du gyre subtropical lorsqu'on s'éloigne progressivement des lignes d'affleurement, un résultat qu'un flot type LPS peut fournir. Un autre traceur naturel des couches de surface est le minimum de salinité causé par l'excès de précipitation présent dans le Pacifique Nord. On retrouve clairement la trace de l'advection anticyclonique du gyre dans les contours de salinité tracés sur des surfaces isopycnes dans cet océan (Talley, 1985). Les zones d'ombres du bord Est coïncident assez bien avec les langues de minimum d'oxygène qui se raccordent au bord Est vers 10-15° N et indiquent un manque de ventilation manifeste. On ne peut pas néanmoins enlever une cause extérieure alternative ou additionnelle à ce déficit d'oxygène lié à la « respiration » des organismes présents à ces latitudes dans les upwellings côtiers.

Commentaires :

- La théorie LPS a donné lieu à de nombreux développements; Parmi ceux-ci il faut mentionner le traitement par Huang du cas continûment stratifié. La structure de la thermocline du gyre subtropical de l'Atlantique Nord calculée à partir du pompage d'Ekman et de la valeur de la densité en surface se compare favorablement aux observations hors des zones sous influence du Bord Ouest. Compte tenu de la variation saisonnière important des lignes d'affleurement, Stommel (1979) indiquait déjà que le fluide réellement subducté correspondait aux positions en fin d'hiver des lignes d'affleurement, et ce sont ces positions d'hiver qui sont utilisées dans le modèle de Huang.
- Pedlosky et Young (1983) ont par ailleurs unifié la théorie LPS avec la théorie Rhines et Young d'homogénéisation de la vp du paragraphe précédent.

IV. La circulation thermohaline

4.1. Introduction

Est identifiée comme circulation thermohaline (THC), la part de la circulation forcée par les flux de chaleur et d'évaporation - précipitation en surface. Il est intéressant de se focaliser sur cette THC d'un point de vue conceptuel même si l'on sait qu'elle est liée à la circulation forcée par le vent et que la circulation réelle n'est pas la somme des circulations sujettes à l'un ou l'autre forçage. Comme nous avons discuté assez longuement de la circulation forcée par le vent, ce point de vue peut-être aussi rafraîchissant. Trois difficultés ont déjà été mentionnées : la première est que la THC transporte de la chaleur de l'équateur vers les pôles par advection et pas seulement par diffusion turbulente, le mode préféré aux moyennes latitudes dans l'atmosphère. La présence de cette non-linéarité réduit fortement les possibilités d'approche analytique. La deuxième est que la distribution des flux thermodynamiques à l'interface air - mer résulte du mouvement relatif de l'océan et de l'atmosphère et que ces flux couplent les deux circulations³¹. La troisième est que maintenant nous devons calculer stratification et circulation en réponse à ces flux thermodynamiques alors que dans tous les problèmes présentés jusqu'à présent, une stratification de base a été imposée (une exception est le modèle LPS où seule la densité était imposée en surface).

En conséquence, la théorie de la THC est assez peu avancée et la plupart des acteurs font appel à l'outil numérique pour la calculer. Comme nous allons voir, le régime des paramètres à utiliser dans les simulations numériques n'est pas bien connu de sorte que cette approche a aussi ses limitations. On peut penser que les progrès viendront aussi de comparaisons avec les observations de la branche profonde de la THC qui sont difficiles à réaliser mais progressent régulièrement.

Une façon d'introduire le sujet peut être justement de décrire comment cette THC se met en place à partir d'un état de repos dans de telles simulations numériques. Imaginons que l'on force ainsi une THC dans une boîte carrée à partir de flux de chaleur imposés en surface, positifs au Sud (l'océan gagne de la chaleur), négatifs au Nord (l'océan en perd).

En réponse à ces flux, s'installent dans les couches de surface un gradient méridien de température négatif alors que les couches de fond sont toujours isothermes. En l'absence de forçages mécaniques et de topographie du fond, si les termes inertiels sont faibles (petit nombre de Rossby), il n'existe aucune possibilité pour le mode barotrope de se développer et sous ces hypothèses la THC ne présente qu'une composante barocline. Ceci permet de calculer simplement la pression via l'hydrostatique de la façon suivante :

$$p_1 = - \int_{Z_R}^Z \rho g z dz + p_R$$

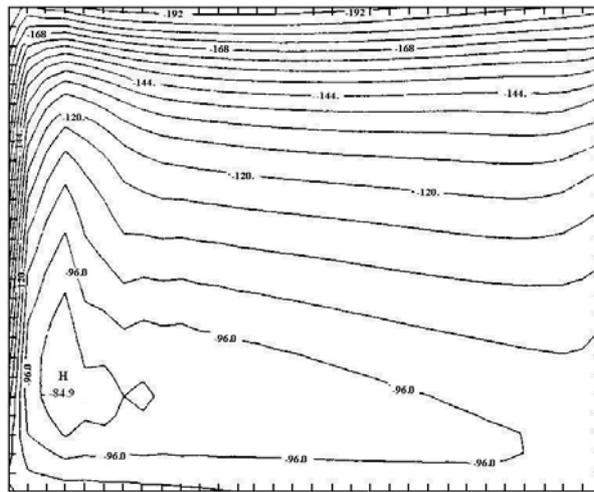
où p_R est une constante d'intégration au niveau Z_R . La pression p associée au mode barocline est alors simplement :

³¹ S'il est vrai que l'atmosphère force mécaniquement l'océan, il n'a pas été prouvé que l'océan force en retour également mécaniquement l'atmosphère : celle-ci ne voit pas un frottement très différent selon que l'océan est immobile ou en mouvement. Par contre le coefficient de frottement est beaucoup plus faible sur l'océan que sur la terre.

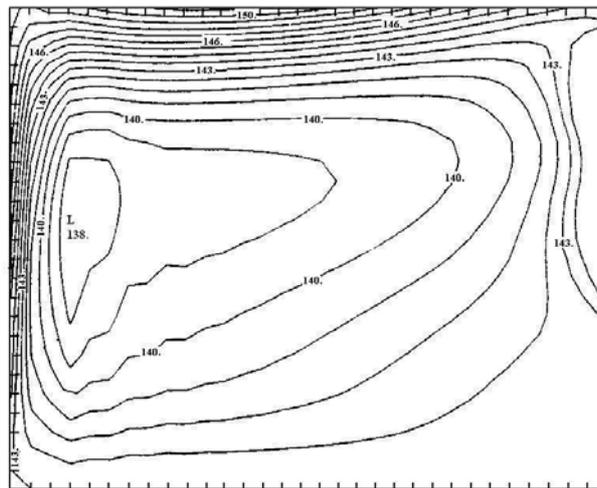
$$p = p_i - \overline{p_i}$$

où $\overline{p_i}$ est la moyenne verticale de la pression p_i . En conséquence de cette relation les pressions seront positives au Sud et négatives au Nord dans les couches de surface et inversement dans les couches profondes. Ce résultat est consistant avec l'intuition que lorsque l'on chauffe un fluide, il se dilate et la surface libre (et donc la pression) s'élève mais ici en fluide incompressible et avec toit rigide, la réaction du toit se construit ainsi. Si notre bassin carré tourne comme dans l'hémisphère Nord, un ajustement géostrophique très rapide (sur quelques périodes d'inertie) crée une circulation barocline zonale vers l'Est en surface et vers l'Ouest en profondeur.

Cette circulation zonale ne peut rien pour empêcher les gradients méridiens de température de progresser en réponse aux flux de surface. Comme de plus cette circulation est zonale, elle est non divergente horizontalement et les vitesses verticales intérieures restent nulles. La situation est différente sur les frontières méridiennes : puisque la circulation zonale ne satisfait pas aux conditions aux limites une couche limite apparaît au sein de laquelle des vitesses verticales positives (upwelling) et négatives (downwelling) apparaissent respectivement sur le bord Ouest (Est). Dans la partie Sud du domaine l'effet de ces vitesses verticales est de refroidir (réchauffer) l'Ouest (Est). Dans la partie Nord du domaine elles n'ont pas beaucoup d'effet car sous l'effet des pertes de chaleur, le modèle diagnostique un $d\rho/dz$ positif (donc instable) et un algorithme de convection statique « mélange » instantanément les densités des niveaux instables (tout en conservant les contenus thermiques et halins). Les vitesses verticales agissant sur un gradient vertical nul n'ont pas d'effet sur la température. Dans la partie Sud par contre on voit que va se créer un gradient zonal de température positif vers l'Est et donc un gradient de pression zonal également positif vers l'Est. Sous son effet une circulation méridienne apparaît vers le Nord (Sud) en surface (profondeur). Cette circulation de surface méridienne bute sur le mur Nord et plonge pour alimenter la branche profonde vers le Sud. Elle transporte de la chaleur vers le Nord et peut éventuellement stopper la croissance du gradient méridien de température et amener un équilibre. C'est elle qui est normalement associée avec la THC mais la description montre qu'elle est couplée complètement à la circulation zonale via les vitesses verticales aux frontières. La figure montre l'équilibre obtenu après quelques milliers d'années. On remarque en surface et au fond une circulation fortement intensifiée sur le bord Ouest. Cette intensification due à β apparaît donc aussi sur un mode barocline. La faible recirculation horizontale contraste avec la réponse dû au vent où justement ces recirculations étaient importantes. Dans ce type de solutions les vitesses verticales sur les bords dominant largement les vitesses intérieures (w_E), causes des recirculations des chapitres précédents. Comme la circulation est barocline, la branche profonde est identique à la branche de surface mais parcourue en sens inverse : les eaux denses longent le bord Nord puis descendent vers le Sud le long du bord Ouest. Une partie remonte via l'upwelling du bord Ouest tandis qu'une faible fraction recircule dans l'intérieur. Dans ce type de simulations numériques, des termes de diffusion sont, bien entendu, présents pour stabiliser les schémas et tenir lieu de paramétrisations de « processus sous-maille ». Un aspect positif de la simulation décrite est que le transport de chaleur méridien est effectué essentiellement par la circulation méridienne intensifiée à l'Ouest et que le transport de chaleur diffusif reste faible. Comme nous le verrons l'effet des termes diffusifs est plus subtil mais ils contrôlent quand même indirectement l'intensité de la circulation méridienne.

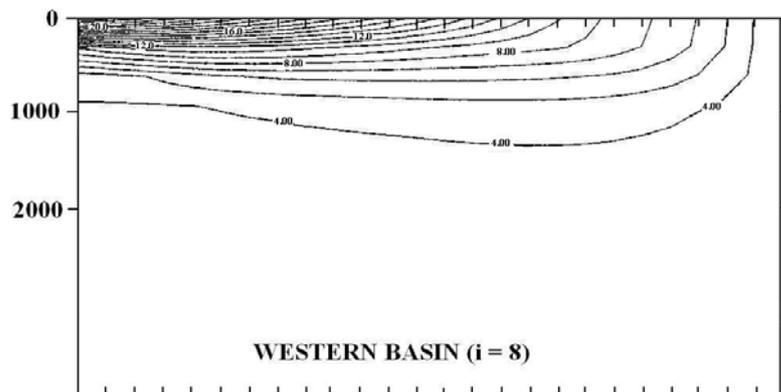


Z = 50 m



Z = 3500 m

TEMPERATURE MERIDIONAL SECTION



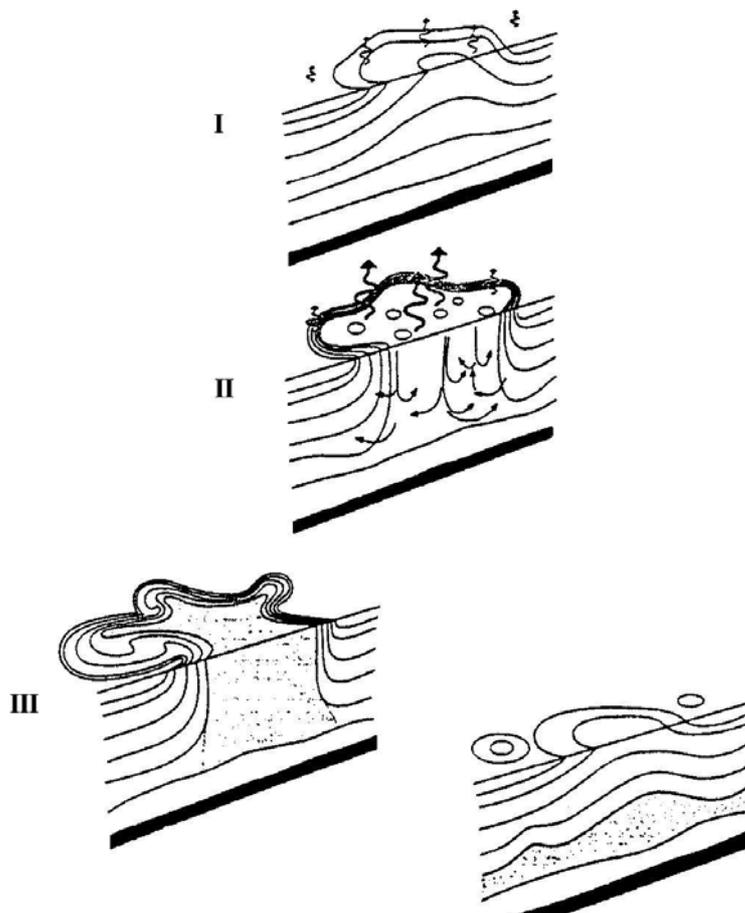
WESTERN BASIN (i = 8)

4.2. Le mélange des masses d'eaux

Lorsque l'on suit une particule fluide en surface, les flux de surface changent sa température et sa salinité. Devenue suffisamment lourde lorsqu'elle arrive près de la frontière polaire, une convection naturelle se met en route (à très grand nombre de Rayleigh) dont l'effet net est d'échanger les particules lourdes et légères entre la surface et le fond pour restaurer la neutralité du profil vertical de densité. L'énergie potentielle disponible dans la situation instable est utilisée pour effectuer ce mélange vertical. Cette instabilité est très efficace mais génère des mouvements verticaux de très petite échelle latérale. Si on suppose qu'un flux B extrait de la flottabilité en surface, l'échelle latérale de ces « plumes » convectifs augmente latéralement par entraînement de fluide. La rotation Ω va commencer à influencer ce plume sur une échelle l formée dimensionnellement à partir de B et Ω soit $(B/\Omega^3)^{1/2}$. Mais le plume peut aussi atteindre le fond H avant de sentir la rotation, de sorte que le paramètre important est $R_0 = (B/\Omega^3 H^2)^{1/2}$ qui est le nombre de Rossby approprié pour la convection. Il se trouve que dans l'atmosphère (chauffée par-dessous) R_0 est bien supérieur à 1 de sorte que les plumes convectifs atteignent 10 km sans que la rotation intervienne. Par contre dans l'océan B est beaucoup plus faible $O(10^{-7} \text{m}^2 \text{s}^{-3})$ (bien que les flux de chaleur soient les mêmes) et la rotation peut jouer un rôle.

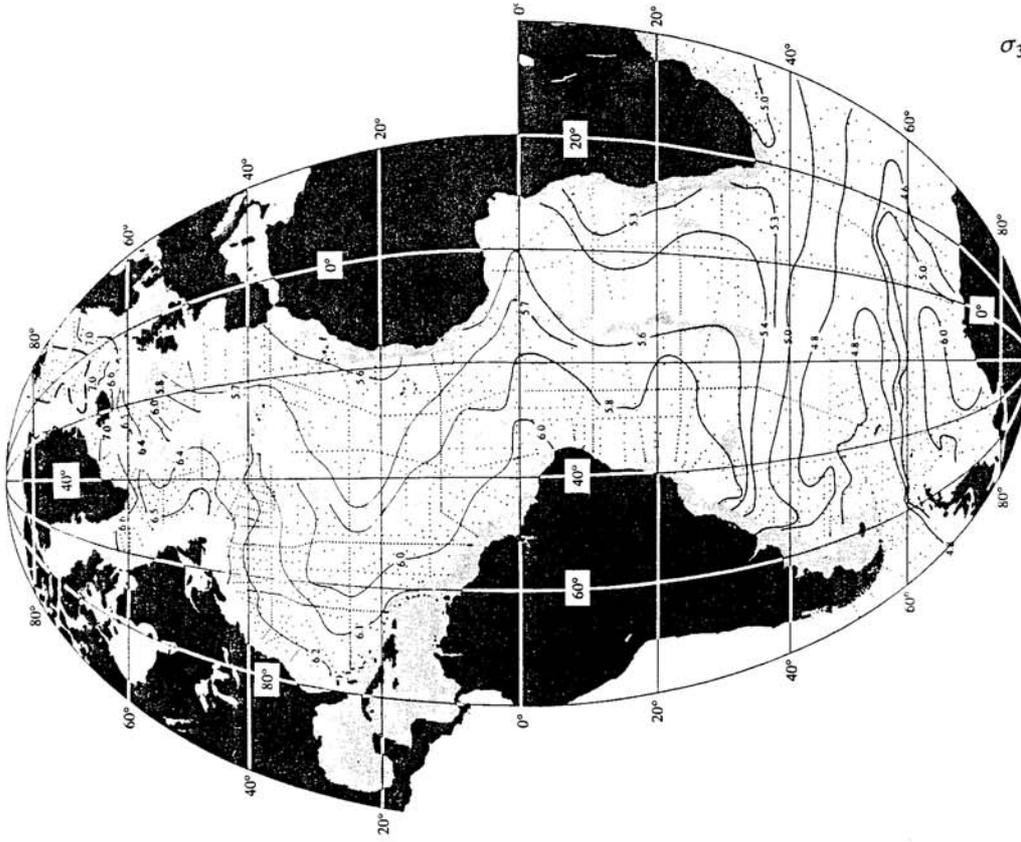
Le tableau ci-contre résume les échelles que l'on peut former pour les vitesses turbulentes et les tailles de structure selon R_0 .

R_0	L	u
$\ll 1$	$(B/\Omega^3)^{1/2}$	$(B/\Omega)^{1/2}$
$\gg 1$	H	$(BH)^{1/3}$

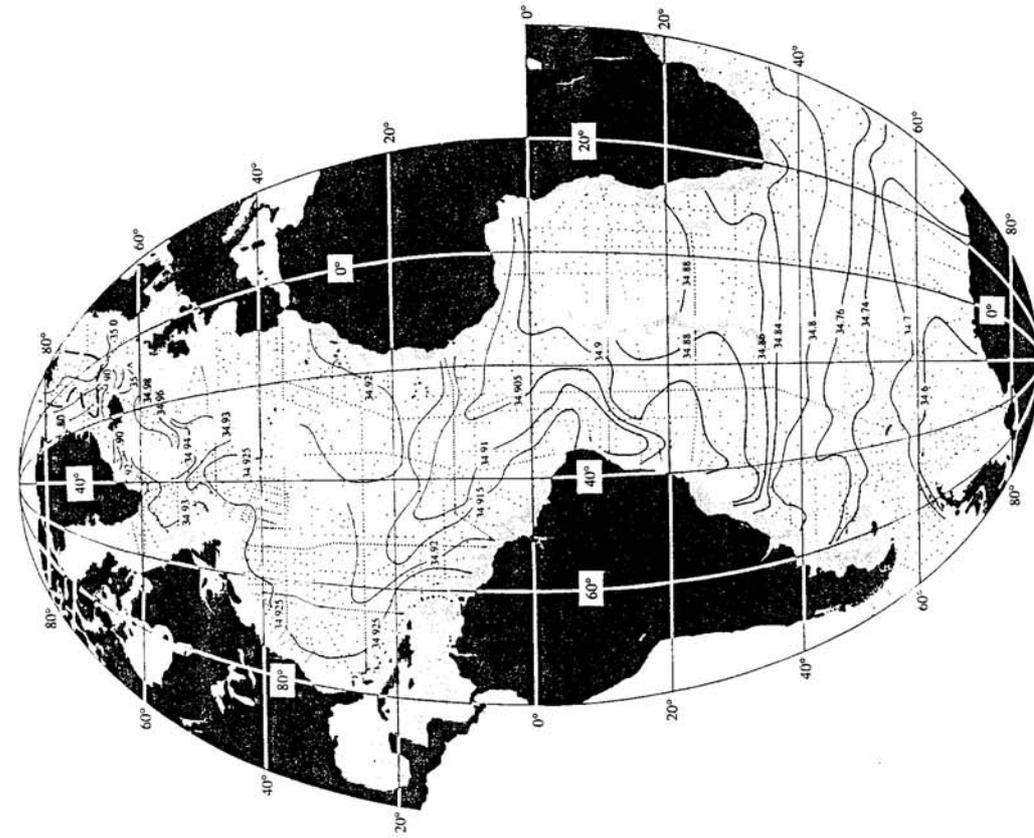


Les expériences numériques et de laboratoire ont contribué à montrer que sous l'effet d'un refroidissement local, ces plumes apparaissent en premier puis fusionnent pour laisser une tache froide à l'échelle du refroidissement imposé. Cette tache s'ajuste géostrophiquement en produisant une circulation cyclonique (anticyclonique) en surface (profondeur). Dans la dernière étape l'instabilité barocline se déclenche et affaiblit encore la pente des isodensités et des tourbillons apparaissent à la périphérie de la tache froide. Ces tourbillons sont à l'échelle du rayon de Rossby mais ils sont petits car N est faible. Il est clair que si l'on veut étudier le détail de la formation des masses d'eaux, il faut revenir aux équations de Navier Stokes et éviter l'approximation hydrostatique. Des simulations numériques et en laboratoire de ces processus ont été faites par Jones et Marshall (1993) et Maxworthy-Navimousa (1994) respectivement. Les mouvements des plumes sont à une échelle bien trop petite pour être résolus par les modèles de circulation générale (GCM). Ces modèles représentent la convection simplement en examinant à chaque pas de temps le profil de densité. Si, à un point de grille donné, le profil est instable, le profil de densité est ramené vers la neutralité ($\rho_z = 0$) à partir du haut de la colonne. On s'assure que ce mélange conserve bien la quantité de chaleur et de sel présent dans la colonne avant cet ajustement convectif. Cette paramétrisation de la formation des masses d'eaux semblent donner des résultats acceptables pour des grilles suffisamment grandes.

Il est remarquable de constater que seulement deux masses d'eaux ainsi formées atteignent de grandes profondeurs. La première, l'eau Nord Atlantique profonde (NADW), est formée en Mer de Norvège avec une modification aux passages des seuils entre le Groenland et d'Islande. Elle se répand avec un débit de 20 Sv dans l'Atlantique Nord vers 2500 à 3000 m de profondeur et on peut la suivre par sa salinité élevée (34.92 psu) sur le bord Ouest jusque dans l'Atlantique Sud. L'autre, l'eau Antarctique de fond, est formée le long du continent Antarctique en Mer de Wedell et Mer de Ross et on la voit avec une salinité plus faible remonter vers le Nord le long de la côte Sud américaine jusque dans l'Atlantique Nord avec un débit d'environ 7 Sv. Il n'existe pas d'autres sources d'eau profonde dans les autres océans Pacifique ou Indien. Si la convection profonde semble être rare, d'autres masses d'eaux intermédiaires existent : l'eau du Labrador, l'eau Méditerranéenne, l'eau Antarctique intermédiaire, l'eau à 18° de la Mer des Sargasses etc... Ce qui est remarquable en fait c'est qu'en un point de l'océan on puisse retrouver la signature T/S de ces masses d'eaux à des distances très considérables du lieu de leur formation (et c'est bien la raison pour laquelle des noms leur ont été donnés). La distribution de ces langues de traceur a d'ailleurs été la première source d'information des courants profonds dans l'Océan au début du 20^{ème} siècle. Si des langues restent relativement bien individualisées le long du bord Ouest par exemple, cela signifie que le nombre de Peclet UL/K est assez grand et que l'advection par des courants semi-permanents n'est pas complètement annihilée par de la diffusion turbulente (K). Il existe maintenant des mesures ponctuelles de courant en profondeur qui ont mis en évidence des veines de bord Ouest intenses qui montrent ce chemin privilégié pour les masses d'eaux formées dans les régions polaires. Maintenant les observations commencées il y a un siècle ne montrent pas une accumulation des masses d'eaux en profondeur : leurs distributions semblent à peu près stationnaires. Ceci appelle un commentaire. Les échelles d'évolution des propriétés des masses d'eaux sont nécessairement très lentes compte tenu de la faiblesse des sources et du volume énorme de l'océan.



Salinity on the isopycnal defined by 41.50 in σ_3 .



$\sigma_3=41.50$ S, O_2

Oxygen (ml/l) on the isopycnal defined by 41.50 in σ_3 .

Par exemple on retrouve la trace de l'eau Nord Atlantique profonde (NADW) dans pratiquement tout l'océan. Si on considère un volume occupé égal à l'aire de l'Océan ($3 \cdot 10^{14} \text{ m}^2$), l'épaisseur (1 km) de NADW ce volume sera renouvelé à $20 \cdot 10^6 \text{ m}^3$ par seconde en cinq cent ans. Il faut donc des mesures sur de très longues périodes pour appréhender la variabilité de la THC et on doit considérer le régime stationnaire plutôt comme une hypothèse de travail. Sous cette hypothèse, s'il y a une source, il doit y avoir un puits équivalent. Ce puits est la branche ascendante qui ferme la boucle de convection planétaire que forme la THC. L'identification de ce puits est la difficulté majeure de l'étude de la THC pour au moins deux raisons : Premièrement ces vitesses verticales positives réparties sur l'aire d'occupation des masses d'eaux formées au pôle sont très petites. Dans l'exemple ci-dessus $w = 20 \cdot 10^6 / 3 \cdot 10^{14} = 6,6 \cdot 10^{-8} \text{ m s}^{-1} = 2 \text{ m/an}$. Il est illusoire de pouvoir mesurer des vitesses de cette intensité.

Deuxièmement cet upwelling intérieur s'effectue dans un milieu stratifié stablement. On pourrait penser que l'advection horizontale $\underline{u}_H \cdot \nabla \rho$ est le candidat idéal pour équilibrer le « $w \rho_z$ ». Dans cette hypothèse les masses d'eaux profondes remonteraient en suivant les surfaces isodensité. Mais les pentes de celle-ci sont généralement faibles en profondeur (sauf bien sûr près des sources) et il n'est donc pas évident de les ramener en surface où leurs propriétés T/S changeraient alors sous le seul effet des flux air - mer. Ce scénario a des partisans. L'autre scénario (Munk, 1966) considère qu'un mélange turbulent intérieur est nécessaire pour permettre la transformation des masses d'eaux lors de l'upwelling intérieur. Ainsi pour la température, Munk suggère-t-il un équilibre du type :

$$w T_z = K_v T_{zz} \quad (4.2.1)$$

Sous cet équilibre, les masses d'eaux profondes se réchauffent sous l'effet d'un mélange vertical turbulent représenté par le coefficient de diffusion K_v positif. Ce réchauffement serait dû à des mouvements turbulents de petite échelle corrélant négativement vitesse verticale et température ($\overline{w'T'} < 0$), c'est-à-dire du fluide chaud descend et du fluide froid monte. Comme l'énergie potentielle du système augmente, la source d'énergie pour ce mélange en milieu stratifié stablement ne peut être que d'origine mécanique. L'instabilité de cisaillement de Kelvin Helmholtz est un candidat possible mais il faut trouver des cisaillements verticaux bien supérieurs à ceux associés avec la THC pour satisfaire le critère d'instabilité sur le nombre de Richardson ($Ri = N^2 / U_z^2 < 1/4$). Les ondes internes de fréquence proches de l'inertie ont effectivement des cisaillements verticaux qui peuvent être importants si on est capable de leur trouver une source d'énergie suffisamment importante. A priori tout courant non ajusté géostrophiquement peut être source d'ondes de gravité susceptibles de déferler. Une autre possibilité récemment remise en avant par Munk, Wunsch 1998 est de générer des ondes internes par interaction de la marée barotrope avec des obstacles topographiques. L'idée de coupler l'existence de la THC aux phénomènes des Marées Océaniques est un pari audacieux. Quel que soit, pour l'instant, le mécanisme qui sous-tend l'existence d'un K_v positif, les conséquences de (4.2.1) sont intéressantes à poursuivre. Supposons que w et K_v restent constants sur une certaine gamme de profondeur, disons entre 1000 et 4000 m. On peut alors intégrer (4.2.1) pour voir que la température varie comme :

$$T = a e^{-w/K_v Z} + b \quad (4.2.2)$$

La température augmenterait exponentiellement vers le haut avec une échelle verticale $d = K_v/w$. Munk (1966) a montré qu'un tel fit exponentiel des profils de température et de salinité (en dessous de 1000 m) dans le Pacifique est assez correct et en a déduit $d \sim 700 \text{ m}$.

Avec la valeur d'upwelling intérieur précédemment estimé, on en déduit :

$$K_v = dw \sim 0.5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

Ces estimations à partir de bilans de masses d'eaux ont été souvent refaites et on trouve toujours que l'équilibre stationnaire de la THC nécessite des coefficients de mélange K_v de l'ordre du $\text{cm}^2 \text{s}^{-1}$. Cette valeur « canonique » n'est qu'une moyenne spatiale et peut cacher des variabilités spatiales très considérables. Compte tenu de l'importance de ce mélange vertical pour la THC, des mesures ont été faites. Les plus récentes ne font aucune hypothèse : on relâche simplement un traceur neutre en un point en profondeur et on regarde comment le traceur est transporté par la turbulence. Les expériences durent de quelques mois à un an, un navire venant périodiquement ré-échantillonner le périmètre probable de la tache de diffusion. La tache est typiquement déformée rapidement en filaments par les tourbillons de méso-échelle dans le plan horizontal mais on peut ainsi mesurer la diffusion verticale à travers les isopycnes. Une expérience récente dans le Bassin du Brésil a fourni des valeurs de 2 à 4 $\text{cm}^2 \text{s}^{-1}$ (Ledwell et al 2000). Une autre dans l'Atlantique Nord est (Ledwell et al 1993) a fourni des valeurs plus faibles ($0.1 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$). Il semble donc que le mélange vertical ait une géographie complexe très certainement liée à la topographie du fond qui a toutes les raisons de guider la circulation profonde compte tenu des petits nombres de Rossby de celle-ci. Parallèlement à cette exploration géographique, des recherches intenses sur les causes du déferlement d'ondes internes supposé être la source majeure du mélange vertical sont en cours.

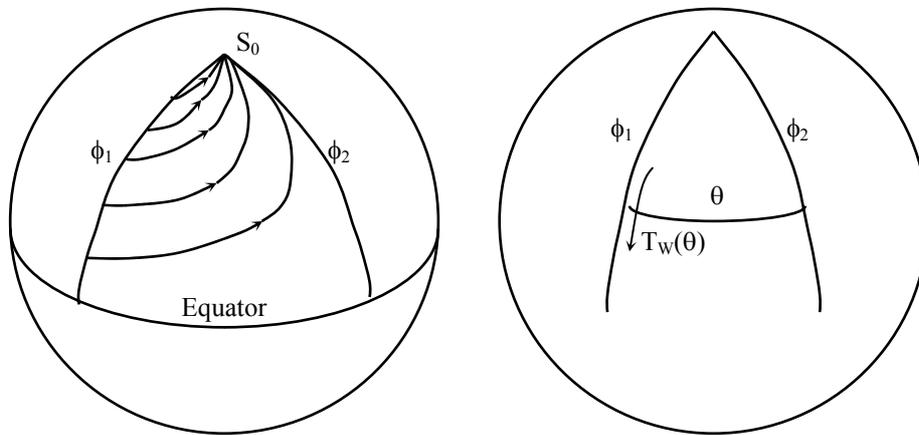
Compte tenu des incertitudes sur l'origine du K_v on peut aussi penser que le réchauffement interne pourrait se produire par un mélange horizontal à travers des surface iso-densité moyennes penchées. Les pentes les plus fortes de celles-ci sont au voisinage des bords Ouest et en association avec ces pentes, une turbulence géostrophique vigoureuse est attendue avec l'aide du mécanisme d'instabilité barocline. Si on prend par exemple une pente $S = 10^{-2}$ associée avec le front « rivage » du Gulf Stream, des tourbillons mélangeant horizontalement avec un coefficient de diffusion $K_H \sim 1-5 \cdot 10^3 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ (dédit d'expériences de dispersion lagrangiennes) fournissent un mélange dit diapycnal K_d à travers les iso-densités $K_d = S^2 K_H$ de l'ordre de $1-5 \cdot 10^{-1} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. Bien entendu ces valeurs considérables apparaissent uniquement dans les régions de fort courant moyen.

Pour qu'il opère efficacement, ces pentes moyennes doivent exister mais si on part d'un état de repos, ce mécanisme ne démarrera pas la THC efficacement et les pentes moyennes resteront faibles. L'intérêt éventuel d'un tel mécanisme n'a pas été testé. Ceci illustre entre autres la difficulté de paramétrer le mélange sur une plage de fonctionnement suffisamment large. Le calage de modèles de climat sur le seul climat actuel permet seulement de le reproduire mais pas de prédire une évolution éventuelle qui est l'objectif majeur !

4.3 La circulation abyssale de Stommel - Arons

Dans une série de papiers des années 1960, Stommel - Arons ont examiné les conséquences sur la circulation profonde d'une source d'eau profonde dans les régions polaires alimentant un bassin profond, l'excès s'évacuant par un upwelling distribué uniformément à la surface supérieure (supposée horizontale) de la couche profonde. Comme la source a la même densité que l'eau du bassin, le problème thermodynamique complexe de la THC est remplacé par un problème de source – puits (imposé) en fluide homogène (voir chapitre II). En découplant la détermination des sources et des puits du forçage thermodynamique on s'aperçoit que seules la conservation de la masse et de la vorticité suffisent pour trouver la circulation profonde

exactement comme pour les circulations forcées par le pompage d'Ekman du chapitre II. Bien que la physique du problème soit présente dans une approximation QG, il est plus respectueux, compte tenu des longues excursions méridiennes des circulations profondes, de traiter le problème en sphérique sous l'approximation PG. Avant de présenter ces calculs, on peut voir assez facilement quelle peut être l'allure générale de la solution. Sous l'effet d'un upwelling intérieur, une circulation de Sverdrup vers le pôle s'établit. En satisfaisant la condition aux limites au bord Est pour les raisons déjà présentées le flot intérieur est donc dirigé vers le Nord-Est. Comme il est dirigé vers la source, l'équilibre de masse n'est pas satisfait. En suivant les procédures pour fermer la circulation forcée par le vent, Stommel et Arons ferment la circulation profonde par un courant de bord Ouest dans une couche limite appropriée. Comme ce courant de bord Ouest accumule le débit de la source et le retour nécessaire du flot intérieur vers le pôle on conçoit que ce transport excède le débit de la source. Supposons une source S au pôle, un puits distribué uniformément w^* dans un bassin limité par l'équateur et 2 méridiens de longitude ϕ_1 et ϕ_2 (voir figure correspondant à Stommel - Arons 1960).



Le flot intérieur satisfait aux équations PG (3.4.1) en sphérique :

$$-fv = -\frac{1}{\rho_0 R_T \cos \theta} \frac{\partial P}{\partial \phi}$$

$$+fu = -\frac{1}{\rho_0 R_T} \frac{\partial P}{\partial \theta}$$

$$\frac{H}{R_T \cos \theta} \left[\frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{\partial}{\partial \theta} (v \cos \theta) \right] = -w^*$$

où R_T est le rayon de la terre (constant) et H l'épaisseur constante de la couche profonde.

L'équation de vorticité radiale fournit directement :

$$v = \tan \theta w^* \frac{R_T}{H} \quad (4.3.1)$$

et l'équation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial \phi} = -\frac{R_T}{H} \left[2w^* \cos \theta + \sin \theta \frac{\partial w^*}{\partial \theta} \right] \quad (4.3.2)$$

Si on se restreint au cas où w^* serait constant, la vitesse zonale après intégration à partir du bord Est à la longitude ϕ_2 est simplement :

$$u = \frac{2R_T}{H} w^* \cos \theta (\phi_2 - \phi)$$

Bien entendu u ne satisfait plus la condition aux limites au bord Est et Stommel - Arons postulent un courant de bord Ouest dont le transport $T_w(\theta)$ peut être calculé en équilibrant la masse dans le secteur sphérique à une latitude θ arbitraire. La source S au pôle doit équilibrer le puits distribué sur l'ensemble du secteur.

$$S = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_0^{\pi/2} w^* R_T^2 \cos \theta \, d\theta \, d\phi$$

Soit :

$$S = R_T^2 w^* (\phi_2 - \phi_1) \quad (4.3.3)$$

Ainsi :

$$T_w(\theta) + R_T^2 w^* (\phi_2 - \phi_1) \sin \theta - R_T^2 w^* (\phi_2 - \phi_1) (1 - \sin \theta) + R_T^2 w^* (\phi_2 - \phi_1) = 0$$

et donc :

$$T_w(\theta) = -2w^* \sin \theta R_T^2 (\phi_2 - \phi_1)$$

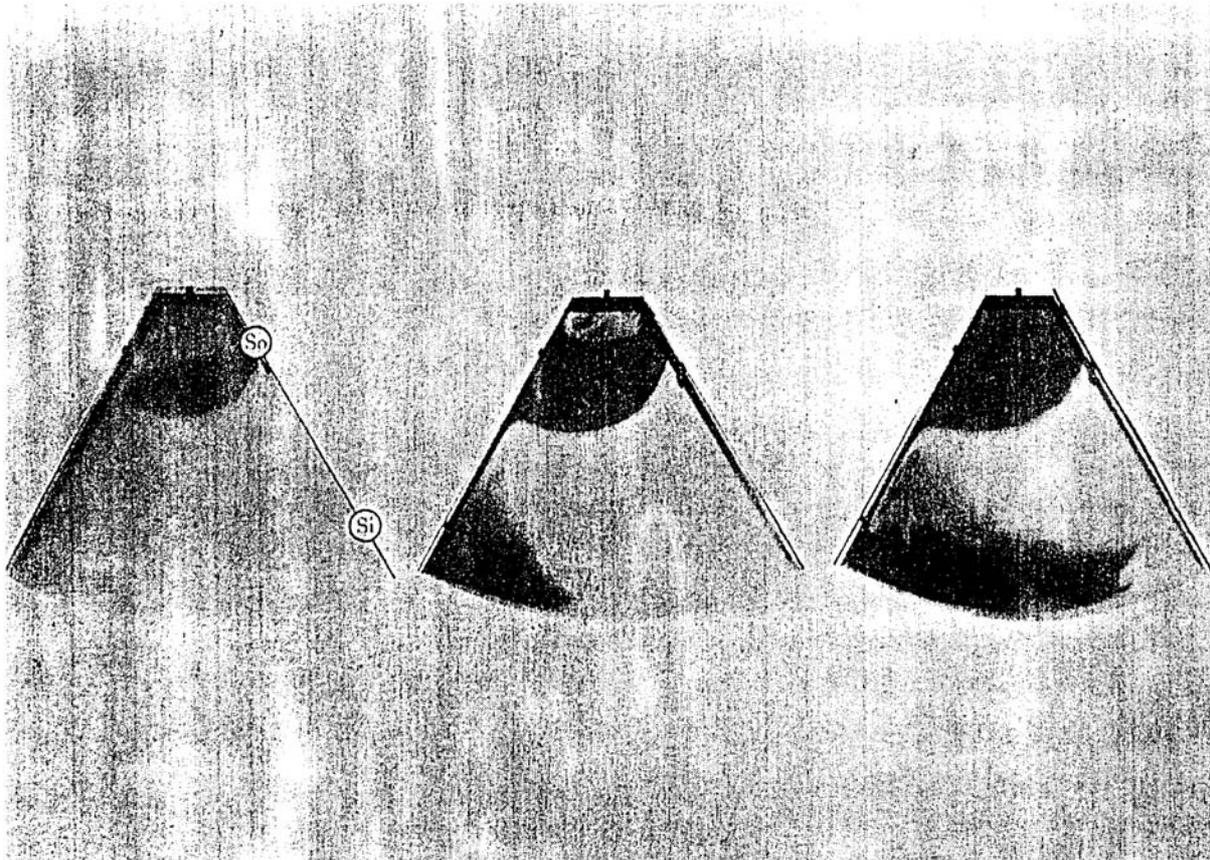
ou encore en terme de la source S :

$$T_w(\theta) = -2S \sin \theta \quad (4.3.4)$$

Le transport du courant de Bord Ouest est dirigé vers l'équateur et atteint deux fois le débit de la source au pôle. Ceci est dû à la forte *recirculation horizontale* due à la circulation vers la source générée par l'upwelling intérieur. Dans cet exemple, le transport de Bord Ouest s'annule juste à l'équateur, de même d'ailleurs que le flot intérieur donné par 4.3.1. Il n'y a pas de singularité équatoriale bien que le flot intérieur soit géostrophique car les vitesses, la pression et f tendent tous vers zéro à l'équateur.

Dans les années 1960, l'idée qu'il puisse y avoir un courant profond s'écoulant sous le Gulf Stream en sens inverse était seulement soupçonnée à partir des distributions de traceur (salinité – oxygène) mais cette théorie a contribué à développer des mesures directes des courants profonds par flotteurs dérivants (les flotteurs de Swallow en 1955). Ce fût un rare exemple où la théorie fit une prédiction correcte. L'expérience fut réalisée par Swallow et Worthington (1957). Il est amusant de constater que cet historique couramment admis ne correspond pas du tout avec la date des publications puisque l'expérience publiée en 1957 précède la publication de Stommel et Arons de 3 ans ! En fait l'idée était sans doute en germe auparavant notamment dans la célèbre expérience de Stommel, Arons et Faller de 1958. Ces auteurs reproduisirent essentiellement le flot juste présenté en utilisant un container en part de gâteau. De l'eau est injectée à la pointe du gâteau et la surface libre monte en retour

fournissant l'upwelling intérieur. L'effet β est fourni par le paraboloïde de la surface libre, $h = \Omega^2 r^2 / 2g$, lorsque le container tourne à la vitesse angulaire Ω (voir figure).



Si on essaie de comparer la théorie et la réalité océanique, le fait que l'eau Nord Atlantique profonde se déplace vers l'équateur sur le bord Ouest est certainement un des bons points de la théorie : un flot méridien qui n'est pas forcé localement nécessite du frottement turbulent pour changer sa v_p et seul le bord Ouest supporte de telles couches limites. L'idée par contre que l'intérieur puisse être animé d'un mouvement vers le pôle n'est pas encore démontrée expérimentalement. Si on regarde les vitesses prédites par (4.3.1) en prenant $S = 20 \text{ Sv}$ un bassin type Atlantique Nord limité à l'équateur de 60° de longitude de largeur (4.3.3) donne $w^* \sim 4 \cdot 10^{-7} \text{ m s}^{-1}$ et des vitesses horizontales $v \sim 10^{-3} \text{ m s}^{-1}$ avec $H \sim 2 \text{ km}$. Il est clair que mesurer un signal d'amplitude millimétrique/seconde au milieu de tourbillons et de recirculations topographiques jusqu'à deux ordres de grandeur supérieurs n'est pas vraiment réjouissant. Comme ce signal « Stommel - Arons » est grande échelle, une moyenne spatiale peut aider à augmenter le nombre de degrés de liberté mais la perspective de démonstration reste lointaine. Nous avons déjà mentionné que l'eau Nord Atlantique profonde franchit l'équateur au bord Ouest. Ceci est parfaitement possible avec la théorie présentée en modifiant l'upwelling intérieur. Si l'upwelling n'équilibre plus la source sur le secteur sphérique au Nord de l'équateur, par exemple si $S > R_T^2 w^* (\phi_2 - \phi_1)$, on voit que (4.3.4) est modifié et qu'un transport net du courant de Bord Ouest vers le Sud apparaît à l'équateur. Sur cette idée, le mélange intérieur vertical qui permet l'existence de w^* apparaît trop faible pour équilibrer la source de l'eau Nord Atlantique profonde dans le seul Atlantique Nord. Peut-être d'ailleurs n'y a-t-il aucun upwelling dans l'Atlantique Nord et dans ce cas là le transport du courant de bord Ouest est simplement égal au débit de la source. Compte tenu de la

distribution planétaire de la NADW la distribution du w^* l'est également. Certainement des mesures du transport du courant de bord Ouest profond régulièrement espacées en latitude permettraient d'en savoir plus sur la distribution intérieure du w^* .

Commentaires :

On peut vouloir embellir la théorie Stommel – Arons en ajoutant la topographie du fond, une interface en densité plutôt qu'un niveau fixe supérieur, des distributions plus élaborées du w^* , plusieurs sources d'eaux profondes et comme la question majeure est de savoir comment relier le w^* aux flux thermodynamiques et qu'aucun progrès théorique n'a été fait là-dessus, ces « additions » apparaissent un peu gratuites. Une excellente revue de la circulation profonde est fournie par Warren (1981).

4.4. Scalings

Dans les années 1960, l'attention était portée sur les théories pouvant expliquer la présence d'une thermocline dans le premier kilomètre de surface. De nombreuses solutions particulières des équations PG ont été proposées en diminuant le nombre de variables indépendantes de l'équation M (3.4.15) par des combinaisons habiles des variables indépendantes x, y, z (Salmon – Hollerbach, 1991) fournissent une synthèse de ces solutions similaires). Ces solutions sont limitées par le nombre réduit de conditions aux limites qui peuvent être satisfaites. Compte tenu de la diversité régionale des solutions déjà présentées au chapitre 3 et 4, ces solutions similaires ne peuvent être valables que localement. Parallèlement Welander (1971) a attiré l'attention sur un certain nombre de lois d'échelle qui se sont révélés très fructueuses pour défricher le comportement de solutions numériques de la circulation forcée mécaniquement et thermiquement.

- Scaling adiabatique :

Dans ce scaling, la vitesse verticale est imposée par le pompage d'Ekman w_E et comme le flot est adiabatique, l'advection horizontale est balancée par l'advection verticale de sorte que :

$$U/L \sim w_e/\delta_a$$

Mais comme le flot obéit à l'équation du vent thermique :

$$fU/\delta_a \sim g\alpha \Delta T/L$$

on pose $g' = g \alpha \Delta T$ dans la suite.

De sorte que lorsque le gradient de température est également imposé, δ_a :

$$\delta_a = \left(\frac{f W_e}{g'} \right)^{1/2} L \quad (4.4.1)$$

$$U = (w_e g'/f)^{1/2}$$

Pour $W_e \sim 40 \text{ m an}^{-1}$, $\Delta T \sim 15^\circ\text{C}$, $\delta_a \sim 300 \text{ m}$ et $U \sim 2 \text{ cm s}^{-1}$. L'effet β n'apparaît pas dans ce scaling car implicitement on a pris $L \sim R_T$ (on peut le faire apparaître en remplaçant la première relation par celle déduite de l'équation de vorticité planétaire géostrophique $\beta U \sim f w_E/\delta_a$ soit $U/R_T \sim w_E/\delta_a$).

Si on relie ΔT à une stratification de base verticale imposée $g' = N^2 H$ (4.4.1) redonne (lorsque $L \sim R_T$), la profondeur inertielle de la circulation forcée par le vent de Rhines et Young du paragraphe (3.10).

Si ΔT est imposée en surface, (4.4.1) est la profondeur des solutions thermoclines ventilées type LPS du paragraphe (3.11).

En l'absence de diffusion, ce scaling montre le caractère superficiel de la circulation forcée par le vent et par la température également imposée en surface :

- Scaling advectif - diffusif

Si maintenant, au lieu d'imposer la vitesse verticale en surface, on la laisse se déterminer par le mélange vertical, Welander (1971) a proposé un scaling advectif - diffusif basé sur l'équilibre (4.2.1) :

$$w \sim K_v / \delta$$

Mais aussi comme avant : $U/L \sim w/\delta$

et : $f U/\delta \sim g'/L$

où δ est maintenant la profondeur advective - diffusive à déterminer lorsque ΔT est imposé en surface. En éliminant U et w on trouve :

$$\delta = \left(\frac{f L^2 K_v}{g'} \right)^{1/3} = K_v^{1/3} \left(\frac{f L^2}{g'} \right)^{1/3}$$

$$w = K_v^{2/3} \left(\frac{g'}{f L^2} \right)^{1/3}$$

$$U = K_v^{1/3} \left(\frac{g'}{f L^{1/2}} \right)^{2/3}$$

Dans les simulations de la THC, on définit aussi la fonction courant d'overturning dans le plan vertical – méridien. Son échelle ψ est estimée comme :

$$\psi = wL^2 = UDL = K_v^{2/3} \left(\frac{g' L^4}{f} \right)^{1/3}$$

Comme le transport méridien de chaleur est effectué par cet overturning, on s'attend à ce qu'il varie de la même façon que ψ vis-à-vis de K_v . De nombreuses simulations numériques ont été effectuées pour tester la dépendance de la THC aux variations du coefficient de mélange vertical (voir Revue par Bryan 1991) et ce scaling advectif - diffusive donne des résultats remarquables : profondeur de la thermocline et flux de chaleur variant respectivement comme $K_v^{1/3}$ et $K_v^{2/3}$. Ce mélange vertical apparaît comme le paramètre clé de contrôle de la THC, son intensité étant directement liée à la capacité de réchauffement des eaux profondes à la base de la thermocline. Des valeurs $K_v \sim O(10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1})$ sont nécessaires pour reproduire des profondeurs de thermocline et des flux océaniques méridiens de chaleur observés $O(10^{15} \text{ W})$.

Ces scalings confirment donc l'image qualitative d'une circulation adiabatique dans les premières centaines de mètres, l'équilibre de chaleur sous la thermocline devenant advectif –

diffusif. Dans le gyre subtropical une zone de convergence apparaît donc avec $w_E < 0$ au-dessus et $w_{\text{diffusif}} > 0$ en dessous. Cette situation intéressante a été étudiée numériquement par Stommel - Webster (1962) sur la base de l'équation en M. En ne gardant que le terme d'advection verticale et le terme diffusif, ils montrent que cette équation non-linéaire fournit un front interne pour K_v suffisamment petit dont l'épaisseur varie comme $K_v^{1/3}$ (Salmon, 1990). Les simulations de Samelson et Vallis (1997) confirment l'existence de ce maximum secondaire de N^2 en profondeur qui se compare favorablement aux observations dans l'Atlantique Nord (comparaison faite pour $K_v \sim 2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$).

4.5. Thermodynamique

Lorsqu'on entend parler de l'océan on entend souvent les mots de machine thermique mais comme ce mot n'a jamais été prononcé jusqu'à présent, on peut voir ce que la thermodynamique classique a à nous dire sur le sujet. Celle-ci s'applique aux fluides compressibles et on va rester, initialement tout au moins dans ce contexte général.

Imaginons donc l'océan opérant comme une machine thermique en cycle fermé. Une source chaude Q_C délivre de la chaleur à l'océan à la température absolue T_C pendant qu'une source froide retire une quantité Q_F à la température T_F . L'inégalité de Clausius qui traduit la 2^{ème} loi de la thermodynamique indique que :

$$\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} \leq 0$$

le signe égal étant valable pour des processus réversibles. Le cycle de Carnot, en présence de tels processus réversibles fournit l'efficacité maximale (Travail W disponible sur source de chaleur Q_C) :

$$\eta_{\text{carnot}} = \frac{W}{Q_C} = 1 - \frac{T_F}{T_C}$$

Compte tenu du premier principe pour un cycle fermé, on a utilisé : $-W + Q_C + Q_F = 0$.

Pour fonctionner comme une machine thermique, l'océan doit recevoir de la chaleur de l'atmosphère à une température plus élevée que la température à laquelle elle est rejetée. Compte tenu du faible écart de température entre T_F et T_C de l'ordre de 20°C l'efficacité maximale est faible ($\sim 7\%$). Évidemment quantité de mouvements et températures sont dissipés ultimement aux échelles moléculaires de sorte que ces irréversibilités réduisent encore l'efficacité du cycle. C'est pour cette raison que dans l'équation qui traduit le premier principe, le travail produit est négligé et que l'on se contente dans les modèles d'océan d'une loi de conservation de la chaleur (le travail produit est ici associé avec la partie du travail des contraintes visqueuses qui déforme l'élément de fluide sans changer son énergie cinétique). En termes de la variable entropie, on peut dire que l'échange de chaleur à la surface décroît l'entropie de l'océan mais que les irréversibilités internes l'augmentent de façon à ce que l'entropie n'évolue plus en régime stationnaire.

Le chauffage de l'océan est particulier en ce sens que source et perte de chaleur sont situées à la même pression à l'interface air – mer. Par contraste l'atmosphère transparente aux rayons solaires incidents est chauffée par-dessous (par l'océan, la Terre) via l'évaporation, la conduction, le rayonnement infrarouge et refroidi par-dessus par le seul rayonnement infrarouge. Intuitivement on sent bien que l'atmosphère peut se mettre en mouvement

facilement par l'instabilité de convection de Rayleigh – Bénard. Compte tenu de cette disposition des sources et puits de chaleur, il avait été conjecturé que la circulation thermohaline devait être très faible voire impossible. Le théorème de Kelvin en régime stationnaire permet d'avancer sur ce point. Lorsque la circulation sur une ligne de courant qui plonge au pôle et remonte dans les tropiques est constante, l'équilibre se fait entre les travaux des forces. Les forces de Coriolis ne travaillant pas, il doit y avoir équilibre entre le travail des forces de pression le long de la trajectoire et les forces de frottement \underline{F} .

$$\oint \frac{dp}{\rho} = \oint \underline{F} \cdot d\underline{l} \quad (4.5.1)$$

En intégrant sur une trajectoire fermée, (4.5.1) se réécrit :

$$\oint p \frac{dp}{\rho^2} = \oint \underline{F} \cdot d\underline{l} \quad (4.5.2)$$

Le théorème de Sandström traduit (4.5.3) de la façon suivante. Pour opposer le travail négatif des forces de frottement le long de la trajectoire, $\oint p dp$ doit être négatif ce qui implique $dp < 0$ (> 0) à haute (basse) pression. Si les régions où $dp < 0$ (> 0) coïncident avec les régions de chauffage (refroidissement), alors le chauffage net doit s'effectuer à une pression plus élevée que le refroidissement. Ceci n'invalide pas l'existence de la THC forcée seulement en surface car (4.5.2) est une intégrale le long de toute la trajectoire fermée. Ce résultat montre que le point critique est d'avoir un réchauffement qui pénètre suffisamment en profondeur. Les expériences numériques, présentées précédemment qui montrent que l'amplitude de la THC dépend en premier lieu du mélange vertical intérieur, sont en accord qualitatif avec ce résultat.

Comment ceci se modifie lorsque le fluide est supposé incompressible ? Dans ce cas le travail des forces de pression est nul et ce sont les forces de flottabilité $g\rho/\rho_0$ qui prennent le relais. On a donc :

$$\oint \frac{\rho}{\rho_0} \underline{g} \cdot d\underline{l} = -\oint \underline{F} \cdot d\underline{l} \quad (4.5.3)$$

En introduisant le géopotential ϕ , $\underline{g} = \nabla\phi$, (4.5.3) devient :

$$\oint \phi \frac{d\rho}{\rho_0} = \oint \underline{F} \cdot d\underline{l} \quad (4.5.4)$$

relation équivalent à (4.5.2) qui indique que chauffage et refroidissement doivent s'effectuer à haute (faible) valeur du géopotential ϕ .

4.6. Le rôle du sel

Quant on utilise le mot « thermohalin », il faut bien parler du rôle du sel sur la circulation. Aux échelles où la diffusion moléculaire est importante, les instabilités doubles diffusives découvertes par des océanographes Stommel et Stern sont dues au coefficient de diffusion pour la température 100 fois plus grand que pour le sel. Dans une situation classique du gyre subtropical, la couche de surface est chaude et salée et le fond froid et peu salé tout en maintenant une stratification stable en densité. Si l'on déplace une goutte de fluide de la surface vers le bas, la goutte échange rapidement sa chaleur avec l'environnement tandis que le sel contenu dans la goutte reste pratiquement inchangé pendant le même laps de temps. Lorsque la goutte est plus lourde que son environnement elle continue de s'enfoncer et le

système est instable. Cette « double diffusion » conduit à une vaste gamme de processus depuis des échelles millimétriques jusqu'à la méso-échelle. Pour les échelles supérieures qui nous intéressent ici, l'essentiel de la diffusion est produit par la turbulence de méso-échelle et il n'est pas démontré aujourd'hui que l'on devrait utiliser des coefficients de diffusion turbulents différents pour la température et le sel. Si on prend des coefficients de mélanges turbulents verticaux différents pour T et S compte tenu du rôle de ces coefficients dans le maintien de la THC, on peut s'attendre à un effet important mais comme on ne sait pas justifier leur différence, l'exercice reste pour l'instant académique.

L'essentiel du rôle du sel dans le système climatique provient des conditions aux limites différentes qui existent à l'interface air - mer pour la température et la salinité. Ce rôle des conditions aux limites pour l'océan a été exploré dans le cas d'une atmosphère essentiellement imposée, rôle auquel nous allons nous borner. Toute la physique reste encore à extraire lorsque les deux fluides sont couplés.

Considérons tout d'abord le forçage de la salinité en surface. Prenons une colonne de 1 m^2 où l'épaisseur de la couche de mélange (quelques dizaines de mètres) est dénotée par h . Supposons qu'il pleuve et que pendant un intervalle Δt , on ajoute une masse d'eau douce m_1 à cette colonne de masse m_2 . La masse de sel est inchangée mais sous l'effet de cette dilution, la salinité qui est un rapport de mélange va changer. Soient S et S' les salinités avant et après la pluie :

$$S = \frac{m_{\text{sel}}}{m_2}$$

$$S' = \frac{m_{\text{sel}}}{m_1 + m_2}$$

On en déduit :

$$\frac{1}{S'} = \frac{1}{S} + \frac{\rho_1}{\rho S} \frac{V'}{V} \quad (4.6.1)$$

où V et V' sont les volumes de la colonne avant et après la pluie et ρ_1 et ρ les masses volumiques de l'eau douce et de l'eau de mer respectivement. Mais $V'/V = \Delta h'/h$ où $\Delta h'$ est la hauteur de pluie tombée sur 1 m^2 pendant l'intervalle Δt de sorte qu'après une ligne de calcul la variation de salinité $\Delta S = S' - S$ est :

$$\Delta S = -S' \frac{\rho_1 \Delta h'}{\rho h} \quad (4.6.2)$$

Comme les variations de salinité dans le cas océanique sont de l'ordre de 10^{-3} , on remplace S' par une constante S_0 dans (4.6.2). En passant à la limite lorsque $\Delta t \rightarrow 0$, (4.6.2) nous indique que sous ce seul effet la salinité varie comme :

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{S_0 \rho_1}{\rho h} \frac{\partial h'}{\partial t}$$

où $\partial h'/\partial t$ est la « vitesse » de précipitation. Si on dénote $-\rho_1 \partial h'/\partial t$ par $E - P$ l'effet conjugué d'évaporation et précipitation (en unités de $\text{kg s}^{-1} \text{ m}^{-2}$), on obtient :

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{S_0}{h} \frac{(E - P)}{\rho} \quad (4.6.3)$$

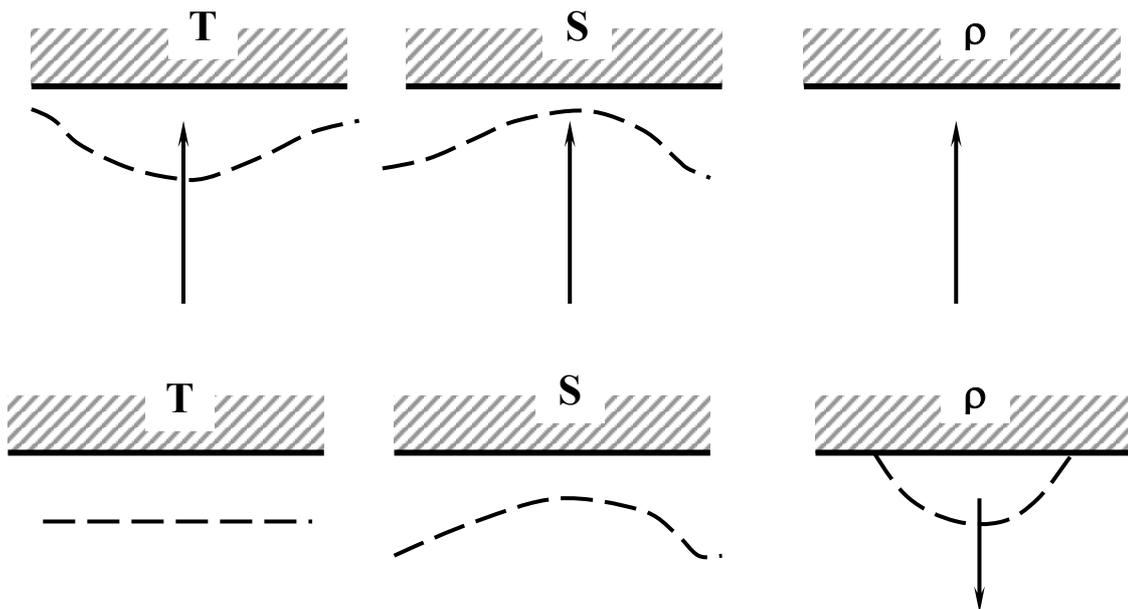
La quantité de $(E - P)/\rho$ est une vitesse typiquement de l'ordre du mètre par an. Si les flux d'eau douce $E - P$ influent sur la salinité via ce forçage (4.6.3), la salinité n'a pas d'effet retour sur l'atmosphère. L'évaporation E n'intervient que dans le terme d'échange de chaleur, terme qui a déjà été discuté au chapitre 3. La nature du flux de chaleur est bien différente du forçage de salinité. Imaginons une anomalie chaude dans la couche de mélange océanique. Sous l'effet accru du rayonnement infrarouge grande longueur d'onde, des flux conductif et d'évaporation, on s'attend à ce que l'anomalie soit rapidement dissipée : les flux de chaleur sont un feedback négatif sur la température océanique. La façon dont ce feedback est représenté dans les modèles d'océan est la suivante :

$$Q = \lambda(T_a - T) \quad (4.6.4)$$

Lorsque Q (W m^{-2}) est négatif, l'océan perd de la chaleur ce qui sera le cas pour une anomalie chaude supérieure à la température atmosphérique T_a où T_a est typiquement une distribution imposée. On peut utiliser la distribution climatologique observée des flux et des températures de surface pour construire empiriquement la relation (4.6.4). Dans ce cas T_a est une température dite apparente et non plus la moyenne climatologique de la température de surface. Ce type d'analyse (Haney, 1973) fournit aussi le coefficient λ . Il existe par mal d'incertitudes sur sa valeur et il n'a pas de raisons d'être pris constant spatialement. Des valeurs qui vont de 10 à 40 $\text{W.m}^{-2}\text{°K}^{-1}$ existent dans la littérature. Sous l'effet de ce seul forçage, la température de la couche de mélange évolue donc comme :

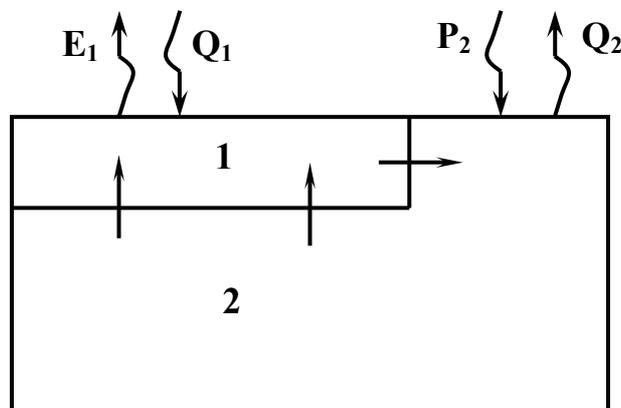
$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho C_p h} (T_a - T) \quad (4.6.5)$$

Les anomalies de températures sont ainsi gommées sur une échelle de temps $\rho C_p h / \lambda \cong 4$ mois pour $\lambda = 20 \text{ W m}^{-2} \text{°K}^{-1}$ et $h = 50 \text{ m}$. Lorsque cette échelle de temps est petite par rapport aux échelles de temps advective tout se passe comme si la température de la couche de mélange était fixée. Au contraire une anomalie de salinité causée par un flux $E - P$ peut s'amplifier compte tenu de (4.6.3).



Imaginons maintenant la combinaison des deux forçages avec une distribution stable d'isotherme et d'isohaline près d'une frontière où la température et le flux de sel sont imposés. Pour fixer les idées le fluide en surface est froid et peu salé, chaud et salé au fond mais toujours de densité supérieure à celle en surface. Lors d'un déplacement localisé de fluide vers la frontière, le fluide plus chaud que la frontière augmente localement le flux de chaleur qui va éliminer l'anomalie et les isothermes vont être assez peu déformés par le déplacement vertical. Par contre le flux de salinité va éliminer la salinité à un rythme indépendant du déplacement des isohalines puisqu'il reste fixé. En conséquence le volume de fluide déplacé aura gagné de la densité par rapport à sa situation initiale. Il repart vers le bas avec cet excès de densité et l'énergie potentielle gagnée au contact de la paroi lui permet de dépasser sa position de départ et on peut s'attendre à observer une instabilité oscillatoire (Welander, 1989). Le comportement riche des GCMs océaniques en condition mixte (relaxé sur T, flux sur S) est peut être dû à l'existence de cette instabilité.

On voit tout de suite avec l'expression (4.6.3) que l'effet majeur du sel va être de freiner la THC. En effet évaporation (précipitation) dominant respectivement les basses (hautes) latitudes (figure) de sorte que la prise en compte de la salinité augmente (diminue) la densité des régions tropicales (polaires). La boucle haline si elle opérerait seule serait effectuée en sens inverse de la boucle thermique : les eaux plongeraient à l'équateur et remonteraient au pôle. On est aujourd'hui dans la situation schématisée par les deux boîtes (voir figure) avec dans les tropiques une boîte 1 de surface chaude et salée et dans les régions subpolaires une boîte 2 froide et peu salée sur toute la colonne d'eau dont l'extension pénètre en latitude sous la boîte 1 de façon à ce que la stratification dans la région tropicale soit stable.



Les températures / salinités des boîtes sont connues pour le climat actuel. L'observation des flux air – mer est beaucoup plus problématique mais seules les moyennes intégrées nous intéressent. On peut prendre par exemple : $T_1 = 15^\circ\text{C}$, $T_2 = 5^\circ\text{C}$, $S_1 = 36 \text{ ‰}$, $S_2 = 35 \text{ ‰}$ et, pour les flux thermiques et E-P, $Q_1 = -Q_2 = 50 \text{ W m}^{-2}$ et $E_1/\rho = -P_2/\rho = 1 \text{ m/an}$. Dans l'état stationnaire, les flux advectifs équilibrent les flux en surface et on doit donc avoir :

$$\rho C_p [L_x L_y w T_2 - L_x h v T_1] = Q_1 L_x L_y \quad (4.6.6a)$$

$$L_x L_y w S_2 - L_x h v S_1 = \frac{S_0 E_1}{\rho} L_x L_y \quad (4.6.6b)$$

où L_x et L_y représentent la taille zonale et méridienne des boîtes. Les termes d'advection dans (4.6.6) ont été évalués par la méthode en différences finies de l'« upstream differencing » : les

températures et salinité amont (aval) par rapport au sens de la circulation étant advectées dans (hors) de la boîte. Comme v et w sont reliés par la continuité :

$$w L_x L_y = v h L_x$$

Les relations (4.6.6a) et (4.6.6b) deviennent :

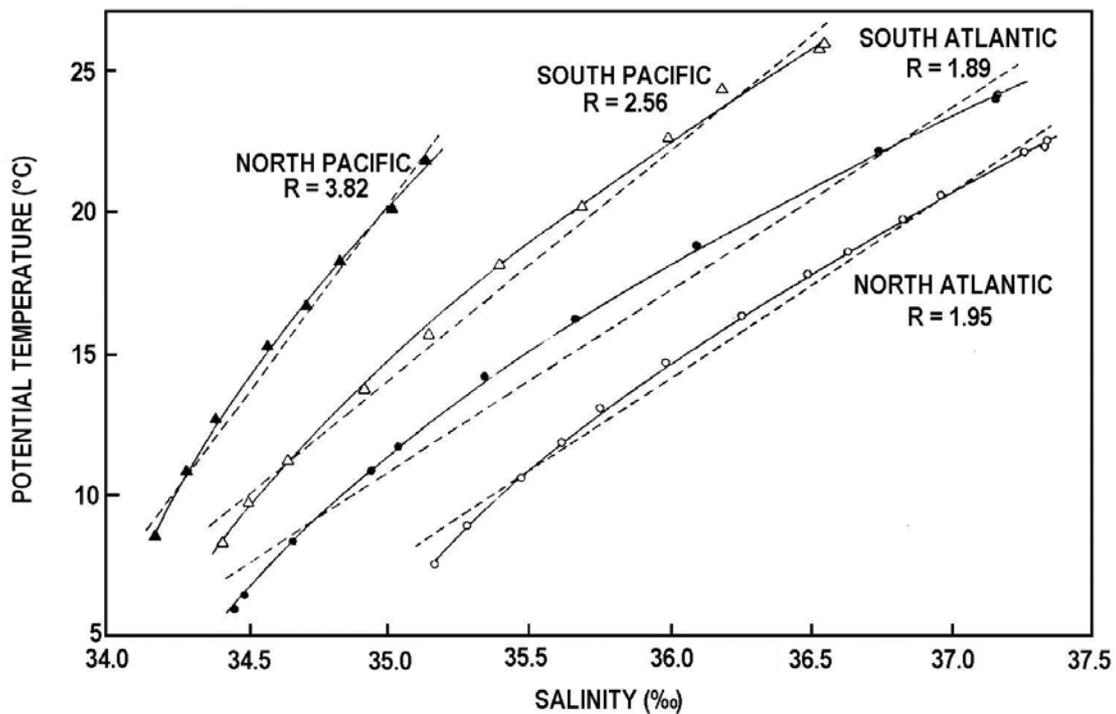
$$v \frac{(T_1 - T_2)}{L_y} = \frac{Q_1}{\rho C_p h} \quad (4.6.7a)$$

$$v \frac{(S_1 - S_2)}{L_y} = \frac{S_0 E_1}{\rho h} \quad (4.6.7b)$$

Comme il s'agit de la même circulation qui agit sur T et S on voit que température et salinité sont reliées par :

$$\frac{\Delta T}{\Delta S} = \frac{Q_1}{C_p S_0 E_1} \quad (4.6.8)$$

Avec les valeurs des flux air – mer données, $Q_1/C_p S_0 E_1$ est à peu près égal numériquement au rapport observé $\Delta T/\Delta S \approx 10^4$. Ce n'est pas une coïncidence. Si la THC est en régime stationnaire, température et salinité doivent être corrélés comme le modèle à deux boîtes très simple l'indique par (4.6.8). Non seulement ceci est vrai à grande échelle mais si on effectue des stations au point fixe pour mesurer T et S dans le gyre subtropical on s'aperçoit que les mesures dans le plan T, S s'organisent remarquablement entre 100 et 700 m autour d'une relation T-S précise.



Les deux traceurs sont remarquablement corrélés dans ces eaux dites centrales. La décorrélation observée vers 1000 m dans l'Atlantique Nord est causé par l'injection d'une eau étrangère à Gibraltar, l'eau profonde méditerranéenne. L'existence de telles relations TS est connue depuis longtemps et continue d'avoir un grand usage pour suivre à la trace le mouvement des masses d'eaux. D'autres processus que ceux grande échelle juste mentionnés ont été présentés pour expliquer la si bonne corrélation des eaux centrales jusqu'à des échelles verticales très petites : Il semble que le mélange par les tourbillons et celui double diffusif à petite échelle y jouent un rôle (Schmitt, 1981).

L'effet de T et S sur la densité est mesuré par le rapport :

$$R_p = \alpha \Delta T / (\beta \Delta S)$$

où $\alpha \sim 2 \cdot 10^{-4}$ et $\beta = 0,8$ sont les coefficients d'expansions thermique et haline respectivement.

Avec les valeurs ci-dessus, $R_p \sim 2.5$ de sorte que la température domine sur la salinité dans son impact sur la densité de la THC actuelle par au moins un facteur 2.

L'étude de ce modèle à deux boîtes intéressant pour discuter de la THC actuelle permet aussi de développer un modèle théorique de la THC. Aux équations de conservation de la chaleur et du sel seules considérées jusqu'à présent, nous devons adjoindre de la dynamique, c'est-à-dire une relation entre v , et la différence de densité entre les deux boîtes. La fermeture du modèle s'écrit en disant que l'intensité de la THC est proportionnelle à cette différence de densité, relation proposée par Stommel (1961) dans le cadre d'un modèle hydraulique. Ce type de relation, réminiscence de la loi de Darcy, est supporté aussi par des simulations 3D de la THC. On écrit donc :

$$\psi = v/L_y = k |\rho_1 - \rho_2| \quad (4.6.9)$$

La valeur absolue dans (4.6.9) permet de considérer aussi bien le cas thermique ($\rho_2 > \rho_1$) que le cas halin ($\rho_1 > \rho_2$). Les équations (4.6.7a) et (4.6.7b) écrites pour chacune des boîtes forment un système dynamique à 4 variables, devenu non linéaire par (4.6.9). Lorsque le forçage thermique (4.6.5) est inséré dans (4.6.7b) et que l'on suppose ce forçage dominant, les températures des boîtes vont rester proches de la températures atmosphériques T_a sur laquelle elles sont relaxées et on peut dans cette limite considérer la température des boîtes comme fixée $\Delta T = T_1 - T_2$ et ne considérer qu'un système dynamique réduit à 2 variables :

$$\begin{aligned} \dot{S}_1 + \psi(S_1 - S_2) &= H \\ \dot{S}_2 + \psi(S_2 - S_1) &= -H \end{aligned} \quad (4.6.10)$$

Compte tenu de l'anti-symétrie choisie du forçage, le système dynamique (4.6.10) se réduit encore à une seule équation pour la différence de salinité entre les boîtes. Il est commode d'utiliser plutôt la variable $x = \beta(S_1 - S_2)/\alpha\Delta T$ de sorte que :

$$\psi = k\alpha\Delta T | -1 + x | \quad (4.6.11a)$$

$$\dot{x} + 2\psi x = \frac{2H\beta}{\alpha\Delta T} \quad (4.6.11b)$$

En adimensionalisant le temps par $(2k\alpha\Delta T)^{-1}$, l'équation à étudier devient finalement :

$$\dot{x} + |1-x|x = \tilde{H} \quad (4.6.12)$$

où le forçage \tilde{H} est maintenant $\tilde{H} = \frac{H\beta_s}{k(\alpha\Delta T)^2}$.

Supposons tout d'abord que $x < 1$. Ceci décrit un régime thermique où la température l'emporte sur la salinité. Le régime stationnaire obéit à :

$$x^2 - x + \tilde{H} = 0$$

de sorte qu'il y a deux régimes thermiques si \tilde{H} est inférieur à $\frac{1}{4}$ et aucun si \tilde{H} est supérieur à $\frac{1}{4}$.

Pour $\tilde{H} < \frac{1}{4}$ les racines sont : $x_T^+, x_T^- = \frac{1}{2} \pm \left(\frac{1}{4} - \tilde{H}\right)^{1/2}$

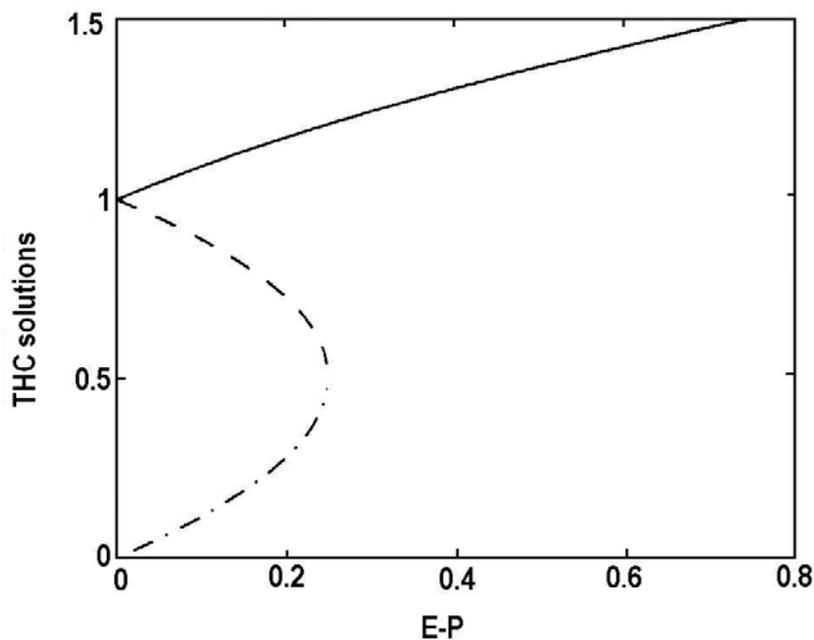
Si maintenant $x > 1$, la condition du régime halin dominant, l'équilibre est gouverné par :

$$x^2 - x - \tilde{H} = 0$$

Seule la racine positive est physique. Elle existe quelque soit \tilde{H} et vaut :

$$x_S = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \tilde{H}\right)^{1/2}$$

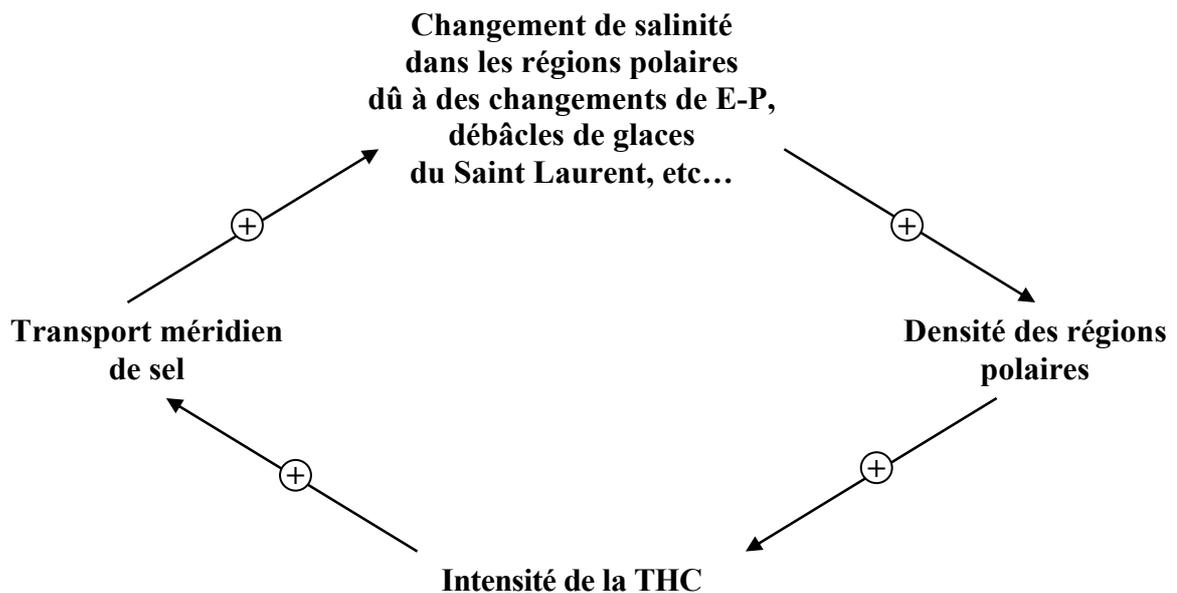
Ces régimes halins et thermiques sont illustrés sur la figure en fonction de \tilde{H} .



Si $\tilde{H} < \frac{1}{4}$, pour une même valeur du forçage en sel, trois équilibres sont possibles et un seul lorsque $\tilde{H} > \frac{1}{4}$. En perturbant linéairement les états d'équilibre on montre facilement que le régime halin est toujours stable mais que le régime thermique n'est stable que lorsque $x < \frac{1}{2}$ (racine x_T^-). Cette possibilité d'équilibres multiples obtenue pour le même forçage est le

résultat majeur offert par ces conditions très différentes de forçage de la température et du sel. Sur la base du modèle (4.6.12), la THC actuelle serait donc dans l'état thermique stable x_T^- . Sous l'influence de perturbations d'amplitude finie et/ou d'augmentation du forçage E - P, la THC pourrait ralentir voir migrer vers le régime halin inverse. Ceci n'est qu'un modèle qualitatif bien sûr mais qui montre bien la sensibilité théorique de la THC aux flux d'eau douce.

Cette sensibilité potentielle a été largement utilisée par des géochimistes comme W. Broecker (voir par exemple Broecker - Denton 1989) pour expliquer les changements paléoclimatiques de la THC. Essentiellement la distribution de salinité forte (faible) dans les régions tropicales (polaires) permet d'identifier la boucle nette de rétroaction *positive* suivante :



De sorte qu'une perturbation positive ou négative est amplifiée sous l'action de cette boucle car on passe d'une variation d'un élément à un autre dans la boucle par un coefficient positif le système est instable. Un feedback négatif absent de la boucle ci-dessus est évidemment que lorsque la THC augmente certes plus de sel est transporté vers le pôle mais aussi plus de chaleur. Ce genre de diagramme est souvent très utile pour résumer des aspects essentiels de fonctionnement de modèles complexes. L'influence de la boucle ci-dessus dans un GCM océanique a été montrée par Bryan (1986) dans sa simulation basse résolution de la THC d'un secteur bi-hémisphérique. Le modèle est d'abord mis à l'équilibre par relaxation de la température et de la salinité à des distributions de T et S en surface symétrique par rapport à l'équateur avec des forçages de type (4.6.4). Une fois l'équilibre atteint, les flux de sel sont diagnostiqués et maintenus constant de sorte que le modèle est alors en condition dite mixte (relaxation sur T, flux sur S). On continue la simulation et on s'aperçoit alors que la circulation symétrique par rapport à l'équateur (avec formation de masse d'eaux dans les deux régions polaires) s'écroule complètement pour être remplacée par une seule cellule asymétrique (de pôle à pôle) avec formation d'eaux profondes sur l'un ou l'autre des pôles. i.e. une situation qui n'est pas sans rappeler l'état actuel de l'Atlantique. Une version bi-dimensionnelle de cette « polar halocline catastrophe » a été réalisée par Welander – Marotzke et Willebrand (1987).

Références

- Anderson, D.L.T. and A.E. Gill **1975**: Spin-up of a stratified ocean, with applications to upwelling. *Deep-Sea Res.* **22**, 583-596.
- Batchelor, G.K. **1967**: An introduction to Fluid Dynamics. *Cambridge University Press*.
- Beardsley, R.C. **1969**: A laboratory model of the wind-driven ocean circulation. *J. Fluid. Mech.* **38**, 255-272.
- Böning, C.W. **1986**: On the influence of frictional parameterization in wind-driven ocean circulation models. *Dyn. of Atm. and Oceans*, **10**, 63-92.
- Bretherton, F.P. **1966**: Baroclinic instability and the short wavelength cut-off in terms of potential vorticity. *Quat. J. of the Royal Met. Soc.* **92**, 335-345.
- Broecker W.S. G.H. Denton **1989**: The role of ocean-atmosphere reorganizations in glacial cycles. *Geochimica et Cosmochimica Acta*, **53**, 2465-2501.
- Bryan, K. **1963**: A numerical investigation of a nonlinear model of a wind-driven ocean. *J. Atmos. Sci.* **20**, 594-606.
- Bryan, K. **1986**: High latitude salinity effects and interhemispheric thermohaline circulations. *Nature* **323**, 301-304.
- Charney, J.G. and M. Stern **1962**: On the stability of internal baroclinic jets in a rotating atmosphere. *J. Atmos. Sci.* **19**, 159-172.
- Charney, J.G. **1947**: The dynamics of long waves in a baroclinic westerly current. *J. Meteor.* **4**, 135-163.
- Charney, J.G. **1955**: The Gulf Stream as an inertial boundary layer. *Proc. of the Nat. Acad. Sciences* **41(10)**, 731-740.
- Colin de Verdière, A. **1977**: Quasigeostrophic flows and turbulence in a rotating homogeneous fluid. *PhD thesis MIT-WHOI Joint Program*.
- Colin de Verdière, A. R. Schopp **1994**: Flows in a rotating spherical shell: the equatorial case. *J. Fluid. Mech.* **276**, 233-260.
- Eady, E.T. **1949**: Long waves and cyclone waves. *Tellus* **1**, 33-52.
- Fofonoff, N.P. **1954**: Steady flow in a frictionless homogeneous ocean. *J. Marine Res.* **13, 3**, 254-262.
- Godfrey, J.S. **1989**: A Sverdrup model of the depth-integrated flow for the world Ocean allowing for island circulations. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics* **45**, 89-112.
- Greenspan, H.P. **1969**: The theory of rotating fluids. *Cambridge University Press*.
- Holland, W.R. **1978**: The role of mesoscale eddies in the general circulation of the ocean-numerical experiments using a wind-driven quasi-geostrophic model. *J. Phys. Ocean.* **8**, 363-392.
- Huppert, J.E. **1975**: Some remarks on the initiation of inertial Taylor columns. *J. Fluid. Mech.* **67**, 397-412.
- Ibbetson, A. N. Phillips **1967**: Some laboratory experiments on Rossby waves in a rotating annulus. *Tellus* **19**, 81-87.
- Ierley, G.R. V. Sheremet **1995**: Multiple solutions and inertial runaway of the wind-driven circulation. *J. Marine Res.* **53**, 703-737.

- Jones, H. and J. Marshall **1993**: Convection with rotation in a neutral ocean: a study of deep-ocean convection. *J. Phys. Oceanogr.* **23**, 1009-1039.
- Lamb, H. **1945**: Hydrodynamics. *Dover*.
- Laplace, P.S. **1776**: Recherches sur plusieurs points du système du Monde. *Mém. Acad. Roy. des Sciences*, **89**, 177-264.
- Ledwell, J.R. A.J. Watson, C.J. Law **1993**: Evidence for slow mixing across the pycnocline from an open-ocean tracer release experiment. *Nature* **364**, 701-703.
- Ledwell, J.R. E.T. Montgomery, K.L. Polzin, L.C. StLaurent, R.W. Schmitt, J.M. Toole **2000**: Evidence for enhanced mixing over rough topography in the abyssal ocean. *Nature*, **403**, 179-182.
- Lighthill, M.J. **1966**: Dynamics of rotating fluids : a survey. *J. Fluid. Mech.* **26**, 411-431.
- Lighthill, M.J. **1969**: Dynamic response of the Indian Ocean to onset of the southwest Monsoon. *Phil. Trans. of the Royal Soc. of Lond. A* **265**, 45-92.
- Luyten, J.R. J. Pedlosky, H. Stommel **1983**: The ventilated Thermocline. *J. Phys. Ocean.* **13**, 292-309.
- Marotzke, J. P. Welander and J. Willebrand **1987**: Instability and multiple steady states in a meridional-plane model of the thermohaline circulation, *Tellus* **40A**, 162-172.
- Maxworthy, T. S. Narimousa **1994**: Unsteady turbulent convection into a homogeneous, rotating fluid with oceanographic applications. *J. Phys. Oceanogr.* **24**, 865-887.
- Munk, W.H. C. Wunsch **1998**: Abyssal recipes II: energetics of tidal and wind mixing. *Deep-Sea Res. I* **45**, 1977-2010.
- Munk, W.H. **1966**: Abyssal recipes. *Deep Sea Res.* **13**, 707-730.
- Munk, W.H. **1950**: On the wind-driven Ocean circulation. *J. Meteorol.* **7(2)**, 79-93.
- Parsons, A.T. **1969**: A two-layer model of Gulf Stream separation. *J. Fluid Mech.* **39**, 511-528.
- Pedlosky, J. **1984**: Cross gyre ventilation of the subtropical gyre : an internal mode in the ventilated thermocline. *J. Phys. Ocean.* **14**, 1172-1178.
- Pedlosky, J. **1987**: Geophysical Fluid Dynamics. *Springer Verlag, New-York*, 710 pages.
- Pedlosky, J. **1996**: Ocean Circulation theory. *Springer*.
- Pedlosky, J. L.F. Pratt, M.A. Spall, K.R. Helfrich, **1997**: Circulation around islands and ridges. *J. Marine Res.* **55**, 1199-1251.
- Phillips, N.A. **1951**: A simple three-dimensional model for the study of large-scale extra-tropical flow patterns. *J. Meteorol.* **8**, 381-394.
- Phillips, N.A. **1966**: The equations of motions for a shallow rotating atmosphere and the traditional approximation. *J. Atmos. Sci.* **23**, 626-628.
- Phillips, N.A. **1963**: Geostrophic motion. *Rev. of Geophysics* **1**, 123-176.
- Poincaré, H. **1910**: Théorie des Marées. Leçons de Mécanique céleste. Vol. 3, *Gauthier-Villars*.
- Price, J.F. R.A. Weller, R.R. Schudlich **1987**: Wind driven currents and Ekman Transport. *Science* **288**, 1534-1538.

- Rhines, P.B. W.R. Young **1982**: A theory of a wind-driven circulation. I. J. Mid Ocean gyres. *J. Marine Res.* **40**, 559-596.
- Salmon, R. **1990**: The thermocline as an internal boundary layer. *J. Marine Res.* **48**, 437-469.
- Salmon, R. R. Hollerbach **1991**: Similarity solutions of the thermocline equations. *J. Marine Res.* **49**, 249-280.
- Samelson, R.M. G.K. Vallis **1997**: Large Scale circulation with small diapycnal diffusion: the two thermocline limit. *J. Marine Res.* **55**, 223-275.
- Schmitt, R.W. **1981**: Form of the temperature-salinity relationship in the central water: evidence for double diffusive mixing. *J. Phys. Ocean.* **11**, 1015-1026.
- Schmitt, R.W., P.S. Bogden, C.E. Dorman **1989**: Evaporation minus precipitation and density fluxes for the North Atlantic. *J. Phys. Ocean.* **19**, 1208-1221.
- Schmitt, R.W. **1994**: Double diffusion in oceanography. *Annual Rev. Fluid. Mech.* **26**, 255-285.
- Schmitz, W.J. **1995**: On the interbasin thermohaline circulation. *Rev. of Geophysics*, **33**, 151-173.
- Schopp, R. **1988**: Spin-up towards communication between large oceanic subpolar and subtropical gyres. *J. Phys. Ocean.* **18**, 1244-1259.
- Schopp, R. M. Arhan **1986**: A ventilated mid-depth circulation model for the eastern North Atlantic. *J. Phys. Ocean.* **16**, 344-357.
- Schopp, R. A. Colin de Verdière **1997**: Taylor columns between concentric spheres. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics* **86**, 43-73.
- Starr, V.P. **1968**: Physics of Negative Viscosity phenomena. *Mc Graw-Hill*.
- Stommel H. A.B. Arons **1960**: On the abyssal circulation of the world ocean. I Stationary planetary flow patterns on a sphere. *Deep-Sea Res.* **6**, 140-154.
- Stommel H. **1961**: Thermohaline convection with two stable regimes of flow. *Tellus* **13**, 224-230.
- Stommel, H. **1948**: The westward intensification of wind driven Ocean currents. *Trans. Am. Geophys. Union*, **29**, 202-206.
- Stommel, H. A.B. Arons, A.J. Faller **1958**: Some examples of stationary planetary flow patterns in bounded basins. *Tellus* **10**, 179-187.
- Stommel, H.J. Webster **1962**: Some properties of the thermocline equations in a subtropical gyre. *J. Marine Res.* **44**, 695-711.
- Sverdrup, H.U. **1947**: Wind driven currents in a baroclinic ocean with application to the equatorial currents of the eastern Pacific. *Proc. of the Nat. Acad. Sciences* **33(11)**, 318-326.
- Swallow, J.C. L.V. Worthington **1957**: Measurements of deep currents in the western North Atlantic. *Nature* **179**, 1183-1184.
- Talley, L.D. **1985**: Ventilation of the subtropical North Pacific and the shallow salinity minimum. *J. Phys. Ocean.* **15**, 633-649.
- Veronis, G. **1978**: Model of world ocean circulation : III Thermally and wind-driven. *J Marine Res.* **36**, 1-44.

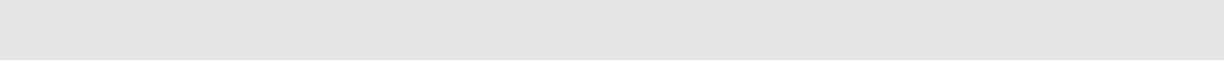
- Veronis, G. **1973**: Model of world ocean circulation: I Wind driven two layer. *J. Marine Res.* **31**, 228-288.
- Warren, B. **1981**: Deep circulation of the World Ocean in "Evolution of Physical Oceanography". *MIT Press*.
- Welander, P. **1970**: The thermocline problem. *Phil. Trans. of the Royal Soc. Lon. A* **270**, 415-421.
- Welander, P. **1989**: A new type of double diffusive instability. *Tellus* **41A**, 66-72.
- Young, W.R. P.B. Rhines **1982**: A theory of the wind-driven ocean circulation II Gyres with western boundary layers. *J. Marine Res.* **40**, 849-872.
- 

Table des Matières

I. INTRODUCTION	1
II. CIRCULATIONS EN FLUIDE HOMOGENE	3
2.1. COUCHES D'EKMAN	3
2.2. SPIN-DOWN/SPIN-UP	6
2.3. LA FORME DU CONTAINER	8
<i>Le théorème TPP</i>	8
2.4. L'ETABLISSEMENT DANS LE TEMPS DES SOLUTIONS TPP	11
2.5. LE FLOT ENTRE DEUX SPHERES CONCENTRIQUES	14
2.6. FERMETURE DISSIPATIVE DE LA CIRCULATION FORCEE PAR LE VENT	17
<i>Commentaires additionnels</i>	21
2.7. EFFETS NON LINEAIRES	22
2.8. STABILITE DE LA CIRCULATION	28
2.9. L'APPROXIMATION DU TOIT RIGIDE.....	32
III. EFFET DE LA STRATIFICATION EN DENSITE SUR LA CIRCULATION OCEANIQUE	35
3.1 INTRODUCTION	35
3.2 APPROXIMATION DE BOUSSINESQ.....	41
3.3 ROTATION ET STRATIFICATION.....	42
3.4. LES EQUATIONS QUASI-GEOSTROPHIQUES.....	45
3.5. LES ONDES QUASI-GEOSTROPHIQUES	53
3.6. LA CIRCULATION FORCEE PAR LE VENT ET LA CATASTROPHE DE GILL	56
3.7 LES MODELES A COUCHES	58
3.8 L'INSTABILITE BAROCLINE	62
• <i>Modèle à 2 couches</i>	62
• <i>Energétique</i>	69
• <i>Lien avec les observations</i>	71
3.9. LE MODELE A UNE COUCHE ET DEMIE DE PARSONS – VERONIS	72
3.10 LE MODELE A 2 COUCHES DE RHINES – YOUNG	74
3.11. LA THERMOCLINE VENTILEE DE LUYTEN, PEDLOSKY, STOMMEL (LPS)	79
IV. LA CIRCULATION THERMOHALINE	85
4.1. INTRODUCTION	85
4.2. LE MELANGE DES MASSES D'EAUX	88
4.3 LA CIRCULATION ABYSSALE DE STOMMEL - ARONS	92
4.4. SCALINGS.....	96
4.5. THERMODYNAMIQUE	98
4.6. LE ROLE DU SEL	99
TABLE DES MATIERES	111