

Comptes rendus
hebdomadaires des
séances de l'Académie
des sciences / publiés...
par MM. les secrétaires
perpétuels

Académie des sciences (France). Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences / publiés... par MM. les secrétaires perpétuels. 1835-1965.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

*La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.

*La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

Cliquer [ici](#) pour accéder aux tarifs et à la licence

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

*des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

*des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter reutilisation@bnf.fr.

HYDRODYNAMIQUE. — *Lois de l'extinction d'une houle simple en haute mer;*
par M. J. BOUSSINESQ.

« I. Prenons pour limites de notre volume liquide, à l'époque t (1), d'une part, deux plans fixes parallèles aux orbites ou normaux aux y , et distants de 1 , d'autre part, deux plans encore verticaux, à abscisses x_0, x_1 , perpendiculaires aux premiers et comprenant entre eux un nombre exact n de longueurs d'onde $2L$ ou, par suite, de vagues, assez grand pour que leur hauteur H soit sensiblement moindre près de x_1 que près de x_0 . Nous supposerons d'ailleurs ces deux derniers plans menés par les pieds d'ordonnées nulles de la surface libre $z = -h$, c'est-à-dire justement, l'un, $x = x_0$, à la queue de la $n^{\text{ième}}$ vague interceptée, l'autre, $x = x_1$, à la tête de la première.

» Sur les deux plans $y = \text{const.}$ parallèles aux orbites et où les pressions sont normales par raison de symétrie, il n'y aura évidemment pas de travail extérieur. Quant aux deux autres plans $x = x_0$ et $x = x_1$, les vitesses qu'on y observe et les pressions qui s'y exercent sont presque exactement celles qui, conformément aux lois de Gerstner, correspondent aux u, v, w dérivant du potentiel φ des vitesses donné par la formule (15) de mon précédent Mémoire, savoir, après différentiation en t et substitution des coordonnées actuelles aux coordonnées centrales, ainsi que de $H\omega$ à C ,

$$(7) \quad \varphi = H\omega e^{-\frac{gz}{\omega^2}} \sin \frac{g(x - \omega t)}{\omega^2} = H\omega e^{-\pi \frac{z}{L}} \sin \left(\pi \frac{x}{L} - \pi \frac{t}{T} \right).$$

» Or, aux points $x = x_0, x = x_1$, considérés à l'époque t , la dérivée de φ par rapport au temps, égale à $-gh$ à la surface libre d'après la première formule (11) du même Mémoire, est nulle; et il y vient, d'après (7), non seulement $v = 0$, mais encore $u = 0$ quel que soit z . Donc, aussi la dérivée de u en z , et la dérivée égale de w en x , sont nulles sur les deux plans $x = x_0, x = x_1$. Autrement dit, d'une part, le mouvement y est presque vertical; et la partie principale P de la pression horizontale $P - \mathfrak{R}_x$, de l'ordre de petitesse de $\rho g \zeta$ ou, tout au moins, de $\rho g \omega T$, n'y a pendant l'instant dt , à chaque niveau z et par unité d'aire, qu'un travail (au plus comparable à $\rho g \omega T u dt$) très petit à côté de $\rho g T \omega^2 dt = \pi \rho \omega^2 \omega dt$, c'est-

(1) Voir le précédent *Compte rendu*, p. 1381.

à-dire devant la demi-force vive d'une longueur de fluide ωdt située au même niveau. Ainsi, la portion de dT_e due aux parties principales P de pression, ne donnera, en l'intégrant durant toute une période $2T$, presque rien par rapport à l'énergie d'une seule vague (1). D'autre part, on voit que l'expression (2) du petit frottement vertical ε_y s'annule sensiblement pour $x = x_0$, $x = x_1$; et, par suite, ce frottement a un travail très inférieur au produit, partout ailleurs, de ε_y par le déplacement vertical $w dt$ ou par $\frac{dw}{dx} L dt$, produit de l'ordre de $\frac{dt}{\varepsilon} \varepsilon_y^2 L$, c'est-à-dire de l'ordre d'une portion du dernier terme de (6) considéré sur une demi-longueur de vague. Et il en est de même du travail $-\varkappa_x u dt$, négligé jusqu'ici, de la petite partie $-\varkappa_x$ des pressions horizontales, qui serait, ailleurs qu'à la tête ou à la queue des vagues, de l'ordre de $\varkappa_x \frac{du}{dx} L dt = \frac{dt}{2\varepsilon} \varkappa_x^2 L$, ou de l'ordre d'une autre partie du même dernier terme de (6) considéré encore sur la demi-longueur d'une onde, mais qui sera, en réalité, bien moindre, à cause du facteur u sensiblement nul à la tête et à la queue des vagues.

» En résumé, le second membre de (6) est réductible à son dernier terme; car nous venons de voir que l'on peut y faire $dT_e = 0$, à la condition pourtant, quand on intégrera pour toute une période $2T$, d'ajouter au résultat une correction négligeable devant l'énergie d'une vague.

» II. Avant d'aller plus loin, cherchons au moyen de (7) les expressions approchées des deux énergies potentielle et actuelle.

» Et, d'abord, la dénivellation h étant sensiblement proportionnelle au cosinus d'un arc fonction linéaire de l'abscisse x , la valeur moyenne de son carré, sur une longueur d'une demi-onde, sera la moitié des maxima H^2 de celui-ci; et l'on aura $\frac{1}{4} \rho g H^2$ pour l'énergie potentielle moyenne de pesanteur par unité de la surface σ .

» D'autre part, la demi-force vive effective de chaque molécule égalant, d'après une loi de Gerstner, le travail que donnerait son poids si elle passait du centre de son orbite à sa situation de repos, l'énergie actuelle de chaque colonne fluide verticale égale la valeur moyenne des énergies po-

(1) Cela suffira pour la démonstration; mais il est bon d'observer que ce travail est encore réduit par le double fait de l'annulation très approchée de P (d'après une loi de Gerstner) sur toute l'étendue des sections $x = x_0$, $x = x_1$ où la dénivellation h s'annule elle-même, et des signes contraires que prennent les travaux des pressions P sur les deux faces opposées $x = x_0$, $x = x_1$, à cause de la parité de sens des déplacements qui s'y observent, concurremment avec le renversement de sens des pressions.

tentielles de pesanteur de toutes les colonnes analogues composant une vague. Ainsi, l'énergie actuelle est $\frac{1}{4}\rho g H^2$ sous chaque unité d'aire de la surface libre. Et, en effet, le calcul direct de cette demi-force vive

$$\int \frac{1}{2}\rho(u^2 + w^2) dz,$$

entre les limites du fluide ou, sensiblement, de $z = 0$ à $z = \infty$, donne bien $\frac{1}{4}\rho g H^2$, quand on y substitue à u et à w les dérivées en x et z du potentiel (7).

» L'énergie totale d'une vague, de longueur $2L$, sera donc

$$\frac{1}{2}\rho g H^2(2L) = \rho g L H^2,$$

et, en la désignant par \mathcal{E} , nous aurons

$$(8) \quad \mathcal{E} = \rho g L H^2.$$

» Enfin, le second membre de (6), réduit à son dernier terme devenu simplement

$$-\varepsilon dt \int_{\omega} \left[2 \left(\frac{du^2}{dx^2} + \frac{dw^2}{dz^2} \right) + \left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \right)^2 \right] d\omega = -dt \frac{4\varepsilon g^4}{\omega^6} \int_{\omega} H^2 e^{-\frac{2gz}{\omega^2}} d\omega,$$

est, par unité de l'aire σ , en faisant $d\omega = dz$ et intégrant de zéro à l'infini, $-\frac{2\varepsilon g^3 H^2}{\omega^4} dt$.

» Il aura donc comme valeur totale, si l'on élimine finalement H^2 par (8) et si l'on observe alors que le quotient de g par ω^2 égale celui de π par L ,

$$(9) \quad -\frac{2\varepsilon g^3}{\omega^4} dt \int_{x_0}^{x_1} H^2 dx = -\frac{2\pi^2 \varepsilon}{\rho L^3} \left(\int_{x_0}^{x_1} \mathcal{E} dx \right) dt.$$

» III. Afin que notre volume fluide, considéré à l'époque $t + dt$, comprenne exactement n vagues entières comme à l'époque t , complétons-le, du côté de sa face $x = x_1$, par une tranche fluide d'épaisseur ωdt , ou ajoutons-y le volume *étranger* envahi par la première de ces vagues durant l'instant dt , sans que d'ailleurs les particules de cette face $x = x_1$ aient avancé sensiblement (puisque les vitesses y sont à très peu près verticales); et retranchons-en de même, sur la face $x = x_0$, la tranche égale délaissée par la $n^{\text{ième}}$ vague. Chacune de ces tranches possède une énergie actuelle, égale, d'après le calcul précédent, à $\frac{1}{4}\rho g H^2 \omega dt = \frac{1}{4}\mathcal{E} \frac{\omega dt}{L}$, H y

étant pris, soit pour $x = x_1$, soit pour $x = x_0$; mais elle est sans énergie potentielle sensible $\frac{1}{2} \rho g h^2 \omega dt$, puisque la dénivellation h s'annule aux extrémités des vagues.

» Si donc $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_0$ désignent respectivement l'énergie totale d'une vague aux limites x_1, x_0 , les deux masses fluides envahie et délaissée durant l'instant dt par le groupe de n vagues que l'on considère, ajouteront au second membre de (6), c'est-à-dire à l'expression (9), pour en faire l'accroissement d'énergie des n vagues *suivies dans leur propagation* durant l'instant dt , l'excédent $\frac{1}{4}(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_0) \frac{\omega dt}{L}$.

» Intégrons enfin cet accroissement total pour une période $2T$ donnant $\int \omega dt = 2L$, et observons que, durant un espace de temps aussi court, toute vague suivie dans son mouvement conserve, à très peu près, sa forme et son énergie, en sorte que $\int \mathcal{E} dx$, dans (9) et $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1$ restent constants. De plus, au bout de ce temps $2T$, chaque vague s'est substituée à celle qui la précédait : la première du groupe est devenue l'onde, d'énergie \mathcal{E}_1 , qui était contiguë extérieurement au plan $x = x_1$, et le groupe a perdu sa dernière onde d'énergie \mathcal{E}_0 , toutes les ondes intermédiaires se trouvant d'ailleurs remplacées identiquement. La variation totale d'énergie du groupe est donc $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_0$, ou, sous une autre forme, l'intégrale de $d\mathcal{E}$ en x , prise de $x = x_0$ à $x = x_1$. Par hypothèse, elle se trouve comparable à \mathcal{E}_0 ou à \mathcal{E}_1 , puisqu'on a choisi l'intervalle $x_1 - x_0$ assez grand pour que l'énergie \mathcal{E} y varie d'une fraction sensible de sa valeur; et elle est, en conséquence, beaucoup plus grande que le terme de $\int dT_e$ négligé plus haut. La suppression de ce terme est donc justifiée. Dès lors, il vient

$$(10) \quad \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_0 = \frac{1}{2}(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_0) - \frac{4\pi^2\varepsilon}{\rho L^2 \omega} \int_{x_0}^{x_1} \mathcal{E} dx.$$

» On voit que la perte d'énergie, $\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_1$, du système à *matière changeante* des n ondes suivies dans leur mouvement durant le temps d'une période, n'est due que pour moitié au travail des frottements; l'autre moitié, exprimée au signe près par le premier terme du second membre, provient de ce que l'énergie emportée à l'arrière du système par la matière qu'il délaïsse n'est pas compensée par celle de la matière qu'il envahit à l'avant.

» IV. Multiplions par 2 l'équation (10) et transposons tous les termes du second membre. Le résultat obtenu pourra évidemment s'écrire

$$(11) \quad \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{d\mathcal{E}}{dx} + \frac{8\pi^2\varepsilon}{\rho L^2 \omega} \mathcal{E} \right) dx = 0.$$

» Or, dans cette dernière formule, la fonction sous le signe f varie très lentement et très graduellement avec x ; de sorte que l'annulation de l'intégrale dans tout intervalle multiple un peu grand de $2L$ entraîne son annulation identique et celle de sa différentielle. Il vient donc l'équation cherchée du problème,

$$(12) \quad \frac{d\mathcal{E}}{dx} + \frac{8\pi^2\varepsilon}{\rho L^2\omega} \mathcal{E} = 0;$$

et celle-ci donne immédiatement

$$(13) \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{-\frac{8\pi^2\varepsilon x}{\rho L^2\omega}},$$

où \mathcal{E}_0 désigne, ici, la valeur initiale de l'énergie d'une vague (1).

V. Si l'on introduit enfin au lieu de l'énergie \mathcal{E} , d'après (8), la quantité sensiblement proportionnelle H^2 , c'est-à-dire le carré de la demi-hauteur H des vagues, il vient, après extraction de racines carrées, en appelant H_0 cette demi-hauteur pour $x = 0$, c'est-à-dire dès la sortie de la région où naissent les ondes, et α le coefficient d'extinction de la houle avec la distance,

$$(14) \quad H = H_0 e^{-\alpha x}, \quad \text{où} \quad \alpha = \frac{4\pi^2\varepsilon}{\rho L^2\omega} = 4\pi^2\sqrt{\pi} \frac{\varepsilon}{\rho g} \frac{\sqrt{g}}{L^2\sqrt{L}} = \frac{4\pi^5}{g^2} \frac{\varepsilon}{\rho g} \frac{1}{T^5}.$$

» Le coefficient d'extinction (avec la distance) d'une houle simple est donc inversement proportionnel à la cinquième puissance de sa demi-période T ou à la puissance $\frac{5}{2}$ de la longueur $2L$ de ses vagues.

» Les expériences de Poiseuille sur l'écoulement dans les tubes fins ont donné pour l'eau (douce), à la température de 10°C ., $\frac{\varepsilon}{\rho g} = 0,0000001336$, les unités de longueur et de temps étant le mètre et la seconde (2). En faisant d'ailleurs $g = 9,81$, il vient

$$(15) \quad \alpha = \frac{0,00002928}{L^2\sqrt{L}} = \frac{0,000001699}{T^5}. \text{ »}$$

(1) On peut voir déjà cette formule, et le principe de la méthode suivie ici, dans les *Additions* à mon *Essai sur la théorie des eaux courantes* (*Savants étrangers*, t. XXIV, p. 53).

(2) Pour l'eau salée, le rapport $\frac{\varepsilon}{\rho g}$ serait un peu plus grand, et il y aurait lieu, par suite, d'accroître légèrement les numérateurs dans les expressions (15) de α .

CHIMIE ANALYTIQUE. — *Sur le dosage de faibles quantités d'arsenic;*
par M. AD. CARNOT.

« On possède déjà de nombreuses méthodes de dosage de l'arsenic; mais ces méthodes, si elles conviennent pour des proportions élevées, laissent fort à désirer pour de faibles quantités d'arsenic. Or il importe, dans un certain nombre de cas, de pouvoir déterminer celles-ci avec exactitude. On sait, par exemple, que divers métaux, le cuivre, le fer, le nickel, etc. perdent en partie leurs qualités industrielles, dès que la proportion d'arsenic, qu'ils renferment, atteint un millième. Une grande précision est également nécessaire pour le dosage de l'arsenic dans les eaux minérales, où il joue parfois un rôle des plus importants, bien que sa proportion ne dépasse presque jamais quelques dixièmes de milligramme par litre.

» La méthode que je vais exposer consiste à précipiter l'arsenic à l'état de sulfure, puis à transformer celui-ci par l'ammoniaque, le nitrate d'argent et l'eau oxygénée en acide arsénique, qui est lui-même dosé ensuite sous forme d'arséniate de bismuth, composé bien insoluble dans l'acide azotique étendu et dont le poids est près de cinq fois égal à celui de l'élément à doser.

» La première opération est presque toujours le complément nécessaire du traitement destiné à isoler l'arsenic des autres substances. Suivant les cas, la précipitation de l'arsenic s'effectue, soit par l'action de l'hydrogène sulfuré sur une solution acide où il était à l'état d'acide arsénieux ou d'acide arsénique, soit par la décomposition, au moyen d'un acide, d'une solution où il se trouvait à l'état de sulfosel. En conséquence, le précipité se compose de trisulfure ou de pentasulfure d'arsenic, mêlé d'une quantité plus ou moins importante de soufre libre.

» Le mélange, après avoir été bien lavé, est traité par de l'eau ammoniacale chaude; celle-ci dissout aisément le sulfure d'arsenic en laissant sur le filtre presque tout le soufre libre; le surplus sera précipité par l'opération suivante : On verse dans la solution une suffisante quantité de nitrate d'argent qui donne lieu à la production de sulfure d'argent et, en même temps, d'arsénite ou d'arséniate d'ammoniaque, suivant que le précipité contenait du trisulfure ou du pentasulfure d'arsenic. Pour le trisulfure, par exemple, la transformation est représentée par l'équation suivante :

