

Équations générales au second ordre de la houle irrégulière

General 2nd order equations of irregular waves

par F. BIÉSEL,

INGÉNIEUR AU LABORATOIRE DAUPHINOIS D'HYDRAULIQUE

Etablissement des équations au second ordre du mouvement bi-dimensionnel résultant de la superposition d'un nombre fixe d'ondes élémentaires harmoniques. Ces équations mettent en évidence des phénomènes du second ordre qui peuvent être importants pour la pratique.

Determination of second order equations of the two-dimensional movement resulting from the superposition of a given number of elementary, harmonic waves. These equations set forth second order phenomena which may be important in practice.

Les formules relatives à cet article sont rassemblées dans un supplément joint au présent numéro.

On ne connaît d'équations exactes pour les ondes de gravité d'amplitude finie que dans quelques cas très particuliers. De plus, avec la seule exception de la houle de GERSTNER, ces formules se présentent sous forme de développements en séries extrêmement peu maniables. On est donc obligé, pour obtenir des formules pratiques, de faire un certain nombre d'approximations, et parmi celles-ci la plus courante consiste à supposer que la cambrure des ondes est suffisamment faible pour que ses puissances puissent être négligées à partir d'un certain exposant. C'est ainsi que l'on a obtenu des équations dites du premier ordre, du second ordre, etc., étant sous-entendu que la cambrure joue dans ces approximations le rôle d'infiniment petit principal.

L'étude des propriétés de la houle a commencé tout naturellement par celles qui pouvaient se déduire des équations du premier ordre. Ces équations ont été ainsi exploitées depuis plus de deux siècles et la plupart des enseignements dont elles étaient capables en ont été dégagés. On a donc été amené à étudier les équations d'ordre supérieur — et en particulier du second ordre.

Quoique des approximations d'ordre supérieur

à l'unité soient connues depuis longtemps (voir par exemple les travaux de STOKES), l'étude de leur interprétation physique est relativement très récente. Il semble que ce travail ait commencé en France en 1944 avec les travaux de M. MICHE qui, de plus, a ajouté aux solutions du second ordre déjà connues celles des houles rotationnelles et du clapotis. On connaît l'intérêt de ces travaux en particulier pour l'étude des ouvrages maritimes du type vertical et pour le problème de l'origine des microséismes.

Ces résultats et bien d'autres ont prouvé que les équations du second ordre n'étaient pas une pure curiosité mathématique ni un simple outil de laboratoire, mais la source de connaissances nouvelles pouvant avoir une importance pratique considérable et justifiant largement la notable complication des calculs qu'elles entraînent. Néanmoins, on ne connaît de telles équations que pour deux cas : la houle périodique régulière et cylindrique en profondeur constante et le clapotis parfait périodique en profondeur constante.

En particulier, à notre connaissance on n'avait pas établi les équations du second ordre de la houle cylindrique irrégulière en profondeur cons-

tante¹. C'est cette lacune que nous voudrions combler ici en présentant les équations du second ordre des houles irrégulières cylindriques les plus générales. Ces équations sont la prolongation, à un degré d'approximation supérieur, des équations du premier ordre qui représentent une superposition d'un nombre quelconque d'ondes régulières élémentaires appelées, dans ce qui suit, composantes harmoniques ou houles composantes.

Faute de place, nous ne pouvons donner ici la démonstration de ces formules — démonstration qui ne présente d'ailleurs pas un intérêt théorique essentiel. Qu'il nous soit seulement permis de dire que la marche des calculs a été analogue à celle suivie par M. MICHE dans son article sur « Les mouvements ondulatoires de la mer » paru en 1944 dans les *Annales des Ponts et Chaussées*.

Pour donner plus d'unité à la présentation des formules, nous les avons écrites pour des houles irrotationnelles. Mais, si on le désire, il est très facile d'introduire un rotationnel du second ordre dans les équations, en superposant au mouvement de la houle un écoulement laminaire, horizontal et arbitraire, à la seule restriction près d'être du second ordre ainsi que son gradient. L'introduction de ce courant reste compatible, au même ordre d'approximation, avec les équations générales de l'hydrodynamique.

Les équations générales du second ordre de la houle irrégulière sont reproduites dans le dépliant annexé au présent numéro de *la Houille Blanche*. Les notations utilisées sont les suivantes :

Ox, Ox_0 = axes de coordonnées horizontaux dirigés de gauche à droite, confondus avec le niveau de repos du liquide.

Oy_0 = axes de coordonnées verticaux descendants.

x, y = coordonnées instantanées des particules en mouvement.

x_0, y_0 = coordonnées « initiales » ou au repos des particules.

$2 a_i$ = amplitude de la houle composante n° i .

L_i = longueur d'onde de la houle composante n° i .

T_i = période de la houle composante n° i .

$m_i = \frac{2\pi}{L_i}$ « nombres d'onde »

$k_i = \frac{2\pi}{T_i}$ fréquences angulaires.

g = accélération de la pesanteur.

h = profondeur moyenne de l'eau.

m_i, k_i et h sont liés par la relation classique :

$$k_i^2 = m_i g \tanh m_i h$$

Dans ce qui suit, tous les k_i et tous les m_i seront supposés réels. Mais cette limitation n'est imposée que par le cadre de cette note. Pour certains problèmes comportant des singularités sur le trajet de la houle (bateur, obstacle, etc.), on est en effet amené à considérer également des m_i imaginaires.

L'ensemble des formules générales est trop complexe pour que leur signification physique apparaisse immédiatement. C'est pourquoi quelques commentaires sont utiles. Ceux-ci seront nécessairement sommaires et ne donneront qu'une idée schématique de la complexité réelle des phénomènes en jeu.

Il est commode de prendre, comme base de discussion, l'expression du potentiel des vitesses ϕ qui est la plus simple. On observe alors que cette expression comprend tout d'abord la somme pure et simple des potentiels ϕ_i exacts au second ordre des houles composantes et en plus des termes rectangles qui représentent des ondulations ayant la forme schématique de houles de longueurs :

$$\frac{2\pi}{|m_i + m_j|} \quad \text{et} \quad \frac{2\pi}{|m_i - m_j|}$$

Certains de ces termes sont simplement les analogues (rectangles) des termes du second ordre (carrés) de la houle régulière, et ne font pas apparaître de phénomènes nouveaux. Au contraire, d'autres de ces termes représentent toute une catégorie de phénomènes liés aux variations d'amplitude de la houle, à l'existence de « trains de houle » par exemple. La relation exacte entre ces phénomènes et les variations d'amplitude de la houle est très complexe dans le cas général. C'est pourquoi dans cette courte note nous nous bornerons à l'étudier pour quelques cas très simples mais déjà riches d'enseignements.

Avant de passer à l'étude de ces cas particuliers, nous voudrions faire encore quelques remarques sur les termes rectangles dont nous venons de parler.

Les termes entre crochets figurant au dénominateur des expressions A_{ij} et B_{ij} , rappellent certains problèmes de résonance. On retrouve en effet des termes analogues en dénominateur de l'expression de l'amplitude d'une oscillation forcée d'un système ayant une période propre. De plus, quoique cela n'apparaisse pas immédiatement avec le mode d'écriture adopté, il serait facile de faire apparaître des termes de même forme au dénominateur des coefficients des termes carrés.

1. On sait cependant que les équations du premier ordre permettent de l'étudier en la considérant comme la superposition d'un certain nombre d'ondes élémentaires périodiques et régulières. Rappelons en particulier, à l'actif des théories du premier ordre, la détermination de la vitesse de groupe, caractéristique essentielle pour la prédiction des tempêtes.

Cette remarque se prête à l'interprétation physique suivante :

On peut considérer les termes du second ordre comme des ondes forcées d'accompagnement imposées au fluide par le passage des ondulations du premier ordre.

Si l'on considère une houle suffisamment bien organisée pour que l'on puisse définir une longueur d'onde moyenne, ces ondes d'accompagnement se divisent *grosso modo* en deux catégories :

1° des ondes deux fois moins longues que les ondulations du premier ordre mais ayant la même célérité

(« nombres d'onde » $|2 m_i|$ et $|m_i| + |m_j|$);

2° des ondes ayant une longueur et une célérité sensiblement égales à celles des *groupes* d'ondes du premier ordre

(« nombres d'onde » $|m_i| - |m_j|$).

Lorsque les vitesses Dg et Cg imposées à ces deux types d'onde tendent à devenir égales aux vitesses propres correspondant à leur longueur d'onde, à savoir $D'g$ et $C'g$, les termes entre crochets des dénominateurs des A_{ij} et B_{ij} tendent vers 0. En langage physique, cela signifie que la résonance s'accroît et que les amplitudes des mouvements du second ordre tendent à croître indéfiniment.

Les vitesses Dg et Cg tendent effectivement à devenir égales aux vitesses $D'g$ et $C'g$ lorsque les profondeurs relatives deviennent très faibles, toutes les célérités tendant alors vers la valeur unique $\sqrt{gh}$.

Ainsi, dans le cas des ondes longues par rapport à la profondeur, les termes du second ordre tendent à devenir très grands, voire même à dépasser en importance les termes du premier ordre. Cette conclusion est bien connue pour le cas des houles régulières. L'interprétation que nous venons de donner de cette circonstance est certes plus qualitative que quantitative mais elle peut être utile pour former l'intuition et aider à exploiter plus aisément les résultats nouveaux apportés par nos formules.

Signalons encore qu'il importe de formuler pour la théorie générale des réserves semblables à celles que l'on doit faire sur la validité pratique des équations du second ordre de la houle régulière.

Nous abandonnons maintenant la discussion des formules générales car elles sont trop complexes pour être abordées de front sur tous les points. Nous pensons en effet que la marche normale d'une étude systématique de ces formules doit progresser du simple au complexe en portant d'abord sur les combinaisons de houles les plus simples, par exemple deux à deux, puis les combinaisons d'un plus grand nombre d'ondes élé-

mentaires pour se terminer par l'étude des houles les plus générales dont le spectre peut être continu ou présenter un nombre infini de « raies ».

Dans cette note nous nous contenterons de donner quelques-uns des résultats qui se dégagent de l'étude d'un cas pris parmi les plus simples de la gradation définie ci-dessus, à savoir le battement simple, résultant de la superposition de deux houles de même sens, de mêmes amplitudes et de fréquences voisines. On obtient ainsi une succession de trains d'onde simulant déjà la houle réelle mieux que la houle régulière des formules classiques.

Ensuite nous donnerons quelques formules et quelques brèves indications sur la nature des résultats que l'on peut obtenir pour quelques autres cas simples en nous réservant de revenir sur ces points d'une façon plus précise dans des notes ultérieures.

Dans le cas du battement, les formules fondamentales sont données sur l'encart ci-joint. Pour obtenir ces formules, on a considéré deux houles d'indices 1 et 2 et on a posé :

$$\begin{aligned} a &= a_1 = a_2 \\ 2m &= m_1 + m_2 \\ 2k &= k_1 + k_2 \\ 2\Delta m &= m_1 - m_2 \\ 2\Delta k &= k_1 - k_2 \\ \alpha &= \frac{2}{1 + \frac{2mh}{\text{sh } 2mh}} \end{aligned}$$

Nous avons introduit l'hypothèse complémentaire que $\frac{\Delta m}{m}$ était suffisamment petit pour être, si nécessaire, considéré comme négligeable devant l'unité. Les formules que nous donnons pour le battement sont donc moins précises que les formules générales¹. Si l'hypothèse de la petitesse de $\frac{\Delta m}{m}$ n'est pas satisfaite, il pourra être néces-

saire de se référer à ces dernières. Notons d'ailleurs que nous n'avons pas suivi de règle théorique rigoureuse pour apprécier l'opportunité de garder tel ou tel terme. Nous avons plus cherché la simplicité (relative) des formules et la correction physique qu'une rigueur mathématique qui aurait pu être plus nuisible qu'utile.

On voit que le potentiel φ comprend trois termes : le premier correspond au terme du premier ordre du potentiel d'une houle régulière, à cela près que l'amplitude constante est remplacée par l'amplitude variable :

$$2a \cos(\Delta k t - \Delta m x)$$

1. En particulier la relation $k^2 = gm \tanh mh$ est supposée satisfaite avec une approximation suffisante.

Nous n'insistons pas sur ce terme classique dans la théorie au premier ordre du battement.

Le second terme correspond, à la même substitution près, au terme du second ordre du potentiel des houles régulières.

A eux seuls, ces deux premiers termes tendraient à montrer que les houles irrégulières se comportent localement comme des houles régulières ayant la même amplitude.

Au contraire, le troisième terme représente les phénomènes nouveaux du second ordre. Ainsi que nous l'avons indiqué dans notre brève discussion des formules générales, ces phénomènes sont liés à l'existence des groupes ou « trains » de vagues. Ceci apparaîtra d'ailleurs clairement dans ce qui suit.

Cinématiquement, ce troisième terme représente une « houle » d'accompagnement qui a la longueur des trains de houle du battement et leur vitesse de propagation (vitesse de groupe). Ainsi que nous l'avons déjà signalé, cette célérité est différente de celle qu'aurait une houle libre de même longueur, et cette « houle » d'accompagnement a donc le caractère d'une « ondulation forcée ». Notons encore que du fait que sa longueur et sa vitesse sont celles des groupes, il en est de même de sa fréquence.

La phase de cette houle d'accompagnement par rapport aux groupes est telle que ses creux correspondent aux maxima d'agitation et ses crêtes aux minima.

On conçoit facilement que l'existence de cette houle d'accompagnement se répercutera essentiellement sur les variations de niveau moyen et du transport de masse au cours du passage des trains, et enfin sur la transmission des fluctuations de pression vers les grands fonds. La houle d'accompagnement ayant une longueur beaucoup plus grande que les ondulations des trains provoquera en effet des fluctuations de pression qui se propageront à des profondeurs proportionnellement plus importantes.

Il faut noter encore que la houle d'accompagnement n'est qu'un aspect, le plus important, il est vrai, des phénomènes liés à l'existence des groupes et dont l'étude peut se faire aisément à l'aide des formules ci-jointes. Quelques exemples numériques permettront de fixer des ordres de grandeur.

1° BATTEMENT EN PROFONDEUR INFINIE.

a) Surélévation du niveau moyen¹ :

Elle est identique à ce qu'elle serait pour des houles régulières ayant la même amplitude locale.

1. On peut la définir comme étant la hauteur au-dessus du niveau au repos de la courbe médiane entre les enveloppes supérieure et inférieure du profil des vagues.

b) Fluctuations du transport de masse en surface :

Pour les molécules superficielles, la fluctuation est un peu inférieure à ce qu'elle serait si chaque houle individuelle avait un transport de masse identique à celui d'une houle régulière de même amplitude locale. Le rapport de réduction est $\left(1 - \frac{1}{2n}\right)$ n étant le nombre de vagues compris dans un train.

c) Fluctuation de « transport de masse intégral »² :

Elle est nulle. Autrement dit, à l'approximation du calcul, le « débit » de la houle irrégulière en profondeur infinie ne fluctue pas avec le passage des groupes.

d) Fluctuations de pression :

En plus de fluctuations de pression identiques à celles qui se produiraient pour des houles régulières de mêmes amplitudes locales et qui, par conséquent, décroissent avec la profondeur comme e^{-my} ou e^{-2my} , il se produit une fluctuation de pression accompagnant le passage des groupes et ne décroissant avec la profondeur que comme $e^{-2\Delta my}$, c'est-à-dire beaucoup plus lentement. La phase de cette fluctuation de pression par rapport aux groupes est telle que le passage des houles les plus fortes correspond à une fluctuation négative et le passage des houles les plus faibles à une fluctuation positive.

3° BATTEMENT DE PROFONDEUR ASSEZ FAIBLE.

Notre but n'étant ici que de donner des ordres de grandeur, nous choisirons un exemple numérique type en donnant cependant des indications sur le sens de variation des phénomènes en fonction des principaux paramètres.

Notre exemple-type sera celui d'une houle de 100 m de longueur d'onde, d'amplitude maximum (au centre des trains) de 4 m, se propageant par des fonds de 10 m.

Le nombre n d'ondulations comprises dans un train sera de 5.

a) Surélévation du niveau moyen :

Sa valeur moyenne le long d'un train est identique à ce qu'elle serait si chaque houle avait une surélévation de niveau moyen identique à celle des houles régulières de même amplitude. C'est-à-dire que cette valeur moyenne est égale à la moitié de la surélévation de niveau moyen d'une houle régulière ayant comme amplitude celle des plus fortes houles du battement.

2. Nous appelons transport de masse intégral le débit de la houle sur toute la profondeur où elle règne.

Elle est encore égale à la somme des surélévations de niveau moyen des deux houles composantes.

La fluctuation de la surélévation le long des groupes est de même signe mais plus faible que celle que l'on aurait pu escompter si chaque ondulation tendait à avoir la surélévation de niveau moyen de la houle régulière ayant la même amplitude locale.

Dans l'exemple numérique choisi :

La valeur moyenne de la surélévation du niveau moyen est de 0,489 mètres. L'amplitude de la fluctuation est de 0,11 m, c'est-à-dire que la surélévation moyenne est de 0,434 m pour les vagues les plus faibles et de 0,544 m pour les vagues les plus fortes. A noter que pour des houles régulières de mêmes amplitudes, cette surélévation serait zéro pour les vagues les plus faibles d'amplitude zéro et 0,978 m pour les vagues les plus fortes.

Cette différence est importante si l'on cherche à estimer le point le plus haut susceptible d'être atteint par des houles d'amplitude donnée, ou encore d'estimer l'amplitude d'une houle par la seule mesure de la cote atteinte par son sommet au-dessus du niveau de repos.

Notons enfin à propos de ces chiffres que les surélévations de niveau moyen sont proportionnelles au carré des amplitudes du battement, dépendent peu de la longueur des trains et enfin croissent rapidement lorsque le rapport L/h de la longueur d'onde à la profondeur croît.

b) Fluctuation du transport de masse :

En profondeur assez faible, le transport de masse présente des fluctuations opposées à celles que l'on escompterait d'après la théorie des houles d'amplitude régulière. C'est-à-dire que le transport de masse vers l'avant diminue ou même devient négatif au passage des plus fortes houles et au contraire augmente au passage des plus faibles.

L'amplitude des oscillations qui en résultent est souvent importante; dans l'exemple numérique que nous considérons, elle serait de 6 m en surface et de 7,34 m au voisinage du fond. Il est à noter d'ailleurs que, quoique les amplitudes soient fortes, les vitesses restent modérées car le cycle d'oscillations se fait à la fréquence relativement lente du passage des trains.

L'amplitude de ces oscillations du transport en masse est proportionnelle au carré de l'amplitude des vagues, au nombre de vagues contenues dans un train et de plus croît très rapidement avec le rapport L/h .

Il est clair que la connaissance de ces fluctuations est importante tant pour l'étude des problèmes de navigation en présence de houle que pour celle des seiches causées par les fluctua-

tions de transport de masse dans les ports ou les baies fermées.

Après avoir développé l'exemple du battement, nous allons énumérer sommairement quelques résultats nouveaux relatifs à d'autres cas d'application des formules générales.

On trouvera également sur l'encart ci-joint des équations du « clapotis imparfait » résultant de la rencontre de deux trains de houle de fréquences voisines de directions opposées et de même amplitude. Ces formules utilisent des approximations analogues à celles employées pour l'étude du battement.

L'étude, en particulier en profondeur infinie, de ce clapotis « imparfait » permet de montrer qu'il n'y a plus, dans ce cas, de fluctuation de pression se propageant à toute profondeur sans diminution d'amplitude¹. Cependant il existe une fluctuation de pression du second ordre et de fréquence double de celle du clapotis qui ne diminue avec la profondeur que comme :

$$e^{-2\Delta m y}$$

c'est-à-dire relativement lentement.

On voit immédiatement l'importance que peut avoir cette conclusion sur la théorie de la formation des microséismes.

L'étude du clapotis partiel, résultant de la rencontre de deux houles de même fréquence mais d'amplitude différente, se fait immédiatement grâce à l'application des formules générales. Celles-ci permettent de déterminer toutes les caractéristiques du second ordre du mouvement et en particulier :

L'amplitude des fluctuations de pression de fréquence double qui se propagent sans diminution d'amplitude à toutes les profondeurs;

L'amplitude des fluctuations de niveau en chaque point, ce qui permet, par des formules inverses, de calculer les amplitudes des houles composantes à partir des dénivellations observables. Ce calcul est essentiel pour les études du coefficient de réflexion des ouvrages, devant lesquels se produit un clapotis partiel, si l'on désire interpréter les mesures faites pour des houles de cambrure assez forte. Un abaque a d'ailleurs été tracé sur ce principe par M. CARRY qui aura bientôt l'occasion de le communiquer aux lecteurs de *la Houille Blanche*.

Nous regrettons de ne pouvoir, faute de place, nous étendre plus longuement sur les applications des formules que nous avons rapidement présentées ici. Nous espérons pouvoir revenir sur ce sujet dans un proche avenir.

1. Comme l'a montré M. Miché, pour le clapotis parfait, dans l'article cité plus haut.

Équations générales au second ordre de la houle irrégulière

General 2nd order equations of irregular waves

PAR F. BIESSEL

INGÉNIEUR AU LABORATOIRE DAUPHINOIS D'HYDRAULIQUE

(Complément à l'article publié dans le présent numéro, p. 372)